恩波考研辅导丛书

2005

ENBOEDUCATION 恩波教育

硕士研究生入学考试
数学辅导讲义
理工类

蔡燧林
胡金德
陈兰祥 编著

最权威的作者 原考研命题组组长、成员，享誉全国的一流名师，具有10多年考研命题、阅卷和辅导的经历。

最优化的内容 从复习应试角度，突出重点、难点与常考题型和解题方法技巧的分析；许多习题属于作者原创，难度与全真试题最接近，信度较高。

最精心的指导 根据多年阅卷中发现的典型错误，通过例题分析，指出常见的错误；从题型分类介绍方法，而不是用方法套例题。

最贴近的关怀 详尽的习题解答、独特的双色编排和较低的图书定价，处处为考生着想。

学苑出版社

根据教育部修订的最新考研大纲编写

2005硕士研究生入学考试

数学辅导讲义

(理工类)

浙江大学 蔡燧林

清华大学 胡金德

同济大学 陈兰祥

编著

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学辅导讲义. 理工类/蔡燧林、胡金德、陈兰祥编著 . －北京:学苑出版社,2002
ISBN 7-5077-1937-5

Ⅰ. 硕…　Ⅱ. ①蔡…②胡…③陈…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-试题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 013277 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号　100036
北京高岭印刷有限公司印刷　新华书店经销
787×1092　16 开本　33.25 印张　1000 千字
2004 年 2 月北京第 3 版　2004 年 2 月北京第 1 次印刷
印数:0001—10000 册　定价:42.00 元

前　言

一、本书写些什么？

本书是为考研学子们写的．近年来，社会对研究生的需求增加，有志青年也希望自己在学历上登上一个台阶，国家也扩大招生名额，由此而来的是，考研成为一大热点．

本书严格按照考研大纲编写．大纲上没有的不写，大纲上有的一定会写．但也不是主次不分，而是突出重点，热点，常考点．本书适用于数学一、二、三、四各类考生．只适用于某类考生的少量内容或例题，在标题或题号上均注明．例如标题或题号右上角注“①”的，表明仅数学一适用．无任何记号的，数学各卷均适用．

本书每节分三部分：基本内容，考查要点、解题方法、技巧及例题分析，综合杂例．“基本内容”这部分中，列举了大纲中要求的有关概念、定理、性质、关系、公式、法则．读者可根据自己的情况，详读，略读，或不读．“考查要点、解题方法、技巧与例题分析”，指出考查内容的命题方式，重点在哪里，常以何种面貌出现，尽可能多的指出各种题型以及解题方法．通过例题分析，指出解题技巧及注意事项，有时还指出常见的错误做法，这些大都是阅卷中发现的典型错误．熟悉各种题型和熟练掌握解题方法，对考生来讲是至关重要的．有许多考生，常由于题目面孔陌生，临阵而不知所措．尽可能多的介绍题型，指出多种解法，是本书一大特点．例如，在数列极限这一标题下，列出的题型有：极限概念的理解，用 $\varepsilon-N$ 证明某数为 $\{u_n\}$ 的极限，运算性质以及无穷大、无穷小之间关系的正确运用，u_n 为 n 项和的数列的极限，u_n 为 n 个因式连乘积的数列的极限，以迭代形式给出的数列的极限，等等．并不以方法，例如“用积分和式求极限”，“用夹逼定理求极限”等作为标题来区分，而是按照题目的形式来讨论采用什么方法为宜．读者学了之后，容易对号入座掌握方法．考研试题中，有很多综合题．“综合杂例”就是为此而选讲的．其中有的是考试真题，有的是作者精心设计的．读者会发现，本书中有不少例题和习题，是在别的书上见不到的．

本书共有例题和习题各约 1000 个．题号右上角有 * 的是往届的考研真题．习题中除少数简单的计算题只给出答案外，其他计算题，选择题和证明题，都给出较为详细的解法，而不仅仅是一句话的提示．不过作者不希望读者一开始就看解法，而是自己先做，做不出或做完后再核查对照，以便总结、对比、提高．

二、怎么考，如何复习迎考？

中国有句古话，叫做“知已知彼，百战不殆”．对立志考研的众多学子而言，“知已”，就是自己知道自己的状况；“知彼”，就是要弄清楚考些什么，怎么考．大纲中已明确规定考些什么，本书各章节中也都有说明，不再在此多说．现在要说的是，一张试卷从哪些方面来考查学生，考生应如何有的放矢去迎考．

(1) 填空题．填空题实际上是简单的计算题，是为扩大试卷的覆盖面而设计的．考生切勿因为它简单而掉以轻心．填空题的计算量少，但要求准确无误，做题的时间又不应花得多．为了将这部分的分数拿到手，应在复习时养成良好的计算习惯，切忌轻视基本题的训练．

(2) 选择题．数学选择题大致可分成三类：计算性的，概念性的与推理性的．近年来，减少

了计算性的，而加强了后面两类．这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质，甚至运算法则的理解，而不是死背条文．不但从正面来理解，还要掌握一些反例．逻辑推理上，要弄清楚充分与必要的区别．条件是充分而未说是必要的，则往往可以举出一些例子说明并非必要；添上某些条件后能保证结论是正确的，则没有这些条件时，结论往往就可能是不正确的．做这类选择题时，切忌想当然，应多一个心眼．本书设计了不少选择题，作了较详尽的分析，读者应给予足够的重视．

（3）证明题．以数学一为例，整张试卷中，一般有两道证明题：高等数学与线性代数各一道．高等数学证明题的范围大致有：极限存在性，单调性，奇偶性，不等式，零点的存在性及个数，定积分与变限积分的不等式及零点问题，级数敛散性的论证．线性代数有矩阵可逆与否的讨论，向量组线性相关与无关的论证，线性方程组无解、存在惟一解与存在无穷多解的论证，矩阵可否对角化的论证，两矩阵合同、相似、等价的论证，矩阵正定性的证明，关于秩的大小，并用它来论证有关的问题，等等．可以说，线性代数的证明题的范围相当广泛．至于概率统计，证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性，估计的无偏性等．为了做好证明题，就必须熟悉上面所说的有关理论．例如矩阵对角化这一问题，不但要会对角化（这是计算），而且要掌握什么条件下可以对角化（这就涉及理论）．这些条件中，有的是充分条件，有的是充要条件．复习时，就要熟悉这些条件并做必要的练习．又如证明不等式，本书中列举了许多题型和方法，其中有的是具体函数，有的为抽象函数，有的又以定积分或变限定积分形式出现．这就要求考生在复习时能很好的融会贯通，举一反三．

（4）计算题与综合题．一份试卷，包括填空题在内，计算题或计算性质的题占 80% 以上．计算题中有一部分是综合题．所以在复习时，应切实加强计算训练．公式当然重要，但仅记公式是不够的．应掌握基本运算方法，熟悉典型步骤，并且要求有熟练的运算能力．有两类综合题．一是形式上的综合，采取的对策是“分解”，将一题拆成几段，各个击破．计算时要特别小心，一步走错全盘皆输．数学二、数学四中有许多这种题．另一种是内在的综合，就要从条件去挖掘内涵或抽象出本质要点，然后去运算．这类综合题，不仅计算题中有，选择题与证明题中都有．

（5）应用题．每一试卷都有一道应用题．考生常常感到应用题较难对付．实际上，应用题着重考查学生的建模能力，而不考查专业知识面．不会出现对某一群体明显不利或明显有利的背景的题．应用题大致有几何，物理（一般限于力学和运动学），变化率，或与日常生活有关的（例如微分方程，线性代数，概率统计中的一些应用题）等等．数学三、四的应用题，常涉及经济方面．考生在复习时着重于量的数学描述，本书中有详尽的介绍．

最后，将下面几句话赠给读者：

备考时：理解概念，记住公式，掌握题型，熟练方法．

考场上：读通考题，选取方法，严密思维，准确运算．

预祝读者获得好的成绩．

本书承南京大学姜东平教授仔细审阅，作者深表谢意．

编著者

后阶段用可忽略细法!!

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续 ······ 1
§1 函数 ······ 1
§2 极限 ······ 6
§3 函数的连续与间断 ······ 25
第一章 习题 ······ 28
第一章 习题解答 ······ 32
第二章 一元函数微分学 ······ 35
§1 导数与微分 ······ 35
§2 导数的求法 ······ 40
§3 导数的应用[JY。] 46
*** §4 中值定理、不等式与零点问题 *** ······ 53
第二章 习题 ······ 67
第二章 习题解答 ······ 71
第三章 一元函数积分学 ······ 74
§1 不定积分与定积分的概念、性质和公式 ······ 74
§2 各种积分法 ······ 77
§3 广义积分 ··· 多看次 ······ 91
~~§4~~ 定积分在几何上和物理上的应用 ······ 94
§5 变限积分与定积分的证明题 ······ 100
第三章 习题 ······ 111
第三章 习题解答 ······ 116
第四章 向量代数和空间解析几何①[注] ······ 120
§1 向量代数 ······ 120
§2 平面与直线 ······ 125
§3 曲面与空间曲线 ······ 132
第四章 习题 ······ 135
第四章 习题解答 ······ 138
第五章 多元函数微分学 ······ 140
§1 极限、连续、偏导数、全微分 ······ 140
§2 多元函数的极值与最值 ······ 151
§3 方向导数、梯度、散度与旋度，曲面的切平面，曲线的切线① ······ 155
第五章 习题 ······ 162
第五章 习题解答 ······ 166
*** 第六章 多元函数积分学 ······ 167
§1 二重积分①~④、三重积分与第一型线、面积分① ······ 167

[注] 记号①表示本章(节)内容仅对数学一考生要求，②③④意义同此。

§2 平面第二型曲线积分① …… 189
§3 第二型曲面积分与空间第二型曲线积分① …… 197
第六章 习题 …… 211
第六章 习题解答 …… 216
第七章 无穷级数 …… 220
§1 数项级数及其敛散性的判定①③ …… 220
§2 幂级数①③ …… 234
§3 傅里叶级数① …… 247
第七章 习题 …… 250
第七章 习题解答 …… 254
第八章 常微分方程 …… 258
§1 基本概念与一阶及二阶可降阶方程(二阶方程数学三、四不要求) …… 258
§2 二阶及高阶线性方程(数学四不要求) …… 268
§3 常微分方程的应用 …… 276
第八章 习题 …… 283
第八章 习题解答 …… 285

第二篇 线性代数

第一章 行列式 …… 288
§1 n阶行列式的定义 …… 288
§2 n阶行列式的性质,展开定理及n阶行列式的计算 …… 289
§3 克莱姆法则 …… 298
第一章 习题 …… 302
第一章 习题解答 …… 304
第二章 矩阵 …… 309
§1 矩阵及其基本运算 …… 309
§2 矩阵的逆 …… 315
§3 初等变换与初等阵 …… 321
§4 分块矩阵 …… 324
第二章 习题 …… 327
第二章 习题解答 …… 329
第三章 向量 …… 336
§1 向量组的线性相关性 …… 336
§2 秩 …… 341
§3 向量空间① …… 345
第三章 习题 …… 350
第三章 习题解答 …… 353
第四章 线性方程组 …… 359
§1 齐次线性方程组 …… 359
§2 线性非齐次方程组 …… 364
第四章 习题 …… 369
第四章 习题解答 …… 372
第五章 矩阵的特征值和特征向量 …… 375
§1 特征值、特征向量 …… 375
§2 相似矩阵,矩阵的相似对角化 …… 379
§3 实对称矩阵的相似对角化 …… 387

第五章 习题 …… 390
第五章 习题解答 …… 392
第六章 二次型①③ …… 396
§1 二次型的矩阵表示,合同矩阵 …… 396
§2 化二次型为标准形,规范形 …… 398
§3 正定二次型,正定矩阵 …… 405
第六章 习题 …… 409
第六章 习题解答 …… 411

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件及其概率 …… 418
§1 随机试验和随机事件 …… 418
§2 古典概型和几何概型 …… 421
§3 频率与概率 …… 425
§4 全概率公式和贝叶斯定理 …… 429
第一章 习题 …… 431
第一章 习题解答 …… 433
第二章 一维随机变量及其分布 …… 436
§1 随机变量及随机变量的分布函数 …… 436
§2 一维离散型随机变量和连续型随机变量 …… 438
§3 一维随机变量函数的分布 …… 443
第二章 习题 …… 446
第二章 习题解答 …… 447
第三章 多维随机变量及其联合分布 …… 449
§1 二维随机变量及其联合分布函数 …… 449
§2 二维离散型随机变量和连续性随机变量 …… 451
§3 边缘分布和条件分布 …… 453
§4 随机变量的独立性 …… 458
§5 随机变量函数的分布 …… 460
第三章 习题 …… 466
第三章 习题解答 …… 467
第四章 随机变量的数字特征 …… 471
§1 随机变量的数学期望 …… 471
§2 随机变量的方差 …… 475
§3 协方差,相关系数和其他数字特征 …… 480
第四章 习题 …… 484
第四章 习题解答 …… 486
第五章 大数定律和中心极限定理 …… 489
第五章 习题 …… 492
第五章 习题解答 …… 492
第六章 数理统计的基本概念 …… 493
第六章 习题 …… 498
第六章 习题解答 …… 499
第七章 参数估计 …… 500
§1 点估计 …… 500
§2 区间估计 …… 507

目 录

第七章 习题…… 512
第七章 习题解答…… 513
第八章 假设检验…… 515
§1 假设检验的基本概念 …… 515
§2 正态总体均值和方差的显著性检验 …… 517
第八章 习题…… 522
第八章 习题解答…… 522

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

§1 函 数

一、基本内容

1. 函数的定义

设在某个过程中，有两个变量x和y，当变量x在它的变化范围D(实数集)内每取一个值时，变量y按照一定的规律有惟一确定的实数值与它对应，则称y为x的函数，记作

$$y = f(x), x \in D.$$

x称自变量，y称因变量，f称对应关系，也称$f(x)$为x的函数．当x在D内取值时，由对应关系f，y取值的集合称为函数的值域，常记为R_f．以后如不作另外声明，x、y均取实数．

两个函数相同，当且仅当定义域相同，并且对应关系f相同．至于自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的．

2. 函数的一些特性的定义及判定

(1) **奇偶性**　设函数$f(x)$在对称于原点$x=0$的某D上有定义，并且对于任意$x \in D$，必有$f(-x) = f(x)$，则称$f(x)$在D上为偶函数；如果对于任意$x \in D$，必有$f(-x) = -f(x)$，则称$f(x)$在D上为奇函数．

在直角坐标xOy中，偶函数在D上的图像关于y轴对称；奇函数在D上的图像关于原点(0,0)对称．

判别函数的奇偶性的方法主要是靠定义，当然，如果函数的定义域不对称于$x=0$，则该函数不可能是奇(偶)函数．

(2) **周期性**

设函数$f(x)$的定义域是D，如果存在常数$T>0$，当$x\in D$时，必有$x \pm T \in D$，并且$f(x+T) = f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T称为它的一个周期．通常称的周期是指使$f(x+T) = f(x)$成立的最小正数T(如果存在的话)．

判别函数$f(x)$是否为周期，主要根据定义，有时也用别的办法．

(3) **有界性**

设函数$f(x)$在X上有定义，如果存在常数M，当$x \in X$时$f(x) \leqslant M$，则称$f(x)$在X上有上界；如果存在m，当$x\in X$时$f(x) \geqslant m$，则称$f(x)$在X有下界；如果$f(x)$在X上既有上界又有下界，则称$f(x)$在X上有界．即如果存在常数$M>0$，当$x\in X$时$|f(x)| \leqslant M$，称$f(x)$在X上有界，若不论M多么大，总有$x\in X$，使$|f(x)| > M$，则称$f(x)$在X上无界．

判别函数$f(x)$在X上有上(下)界，一般是将$f(x)$在X上放大(缩小)，直至明确它小于(大于)某常数．

函数$f(x)$在点$x=x_0$存在极限，则存在该点的一个去心邻域U，在U内$f(x)$有界；若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界；若$f(x)$在(a,b)内存在最大(小)值，则$f(x)$在(a,b)内有上(下)界．

函数$f(x)$在点$x=x_0$邻域无界与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$是两个概念．若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则$f(x)$在$x=x_0$邻域必无界；反之未必成立．例如$f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$邻域取$x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$时，$f(x_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，对

于任意大的 M,当正整数 $n>\frac{M}{2\pi}-\frac{1}{4}$ 时,$f(x_n)>M$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内无界．但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 并不为 ∞,而是振荡型的不存在．

(4) **单调性**

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果对于 X 上的任意两点,$x_1,x_2,x_1<x_2$,必有 $f(x_1)\leqslant(\geqslant)f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加(减少);如果必有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加(减少)．有的教科书上将这里的单调增加(减少)称为单调不减(不增),将这里的严格单调增加(减少)称为单调增加(减少)．

常用的判别单调性的方法:简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定;复杂一些的初等函数或可导的抽象函数,用微分学的方法判定,见第二章 §3、§4.

3. 反函数、复合函数、初等函数、分段函数

(1) **反函数**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R_f,若对于 R_f 中的每一个 y,由 $y=f(x)$ 有惟一的一个 $x\in D$ 与之对应,则记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数．与此相呼应,称 $y=f(x)$ 为直接函数．反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域．

例如函数 $y=x^2$,定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,对于 R_f 中的每一个 y,由 $y=x^2$ 在 D 中对应的 x 不惟一,不合乎反函数定义,所以不存在反函数．若将 D 限制为 $G=[0,+\infty)$,则对于 R_f 中的每一个 y,由 $y=x^2$ 在 G 内存在惟一的 x,所以存在反函数 $x=\sqrt{y},y\in R_f,x\in G$.

有时,也将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$．在同一直角坐标系中,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合．$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

定理　若函数 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调,其值域记为 R_f,则在 R_f 上 $y=f(x)$ 存在严格单调(具有相同单调性)的反函数,其值域为 X;若又设 X 为区间,且 $y=f(x)$ 在 X 上连续,则值域 R_f 也是一个区间,且反函数在 R_f 也是连续的;若再设 $f'(x)$ 存在且不为零,则反函数在 R_f 亦可导,且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$,其中 $x=f^{-1}(y)$.

(2) **复合函数**

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ,值域是 R_φ．若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,它的定义域是 $\{x\mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}$．这里 $\varnothing$ 表示空集．

(3) **初等函数**

① **常值函数**　C(C 为常数),$x\in\mathbf{R}$;

② **幂函数**　x^α(α 为常数),定义域由 α 确定,但不论 α 如何,在$(0,+\infty)$ 内总有定义;

③ **指数函数**　a^x(常数 $a>0,a\neq1$),$x\in\mathbf{R}$;

④ **对数函数**　$\log_a x$(常数 $a>0,a\neq1$),$x\in(0,+\infty)$;

⑤ **三角函数**　$\sin x,x\in\mathbf{R}$;$\cos x,x\in\mathbf{R}$;$\tan x,x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$;$\cot x,x\in(k\pi,(k+1)\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$;

⑥ **反三角函数**　$\arcsin x,x\in[-1,1]$;$\arccos x,x\in[-1,1]$;$\arctan x,x\in\mathbf{R}$;$\operatorname{arccot}x,x\in\mathbf{R}$.

以上 ①～⑥ **类函数称基本初等函数**．

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称**初等函数**．

(4) **分段函数**

一个函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示,称这种形式表示的函数为分段函数．

分段函数仅是说函数的表示形式,并不是说它是几个函数．

常见的分段函数有:

① **绝对值函数**　$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

② **符号函数** $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

③ **取整函数** $[x]$表示不超过x的最大整数：$[x]=n$，当$n\leqslant x<n+1$，其中n为整数．

例如：$[\pi]=3,[-\pi]=-4,[2]=2$.

④ $\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$

分段函数也可能是初等函数．例如$|x|=\sqrt{x^2}$是初等函数．

二、考查要点、解题方法、技巧与例题分析

考研题中与本节有关的可以说比比皆是，例如若用单调有界准则求极限，就要检查数列的单调性与相应的有界性；利用导数可以证明单调性，利用单调性可以证明某些不等式；定积分，甚至二重、三重、曲线、曲面积分的某些计算，牵涉到函数的奇、偶性，可以用此来化简计算；将复合函数分解为一些基本初等函数的复合，是求导的重要一环；至于说建立函数关系以及使用基本初等函数的基本性质，到处皆是．

但是**单独以本节内容命题的考题不多．大致有：函数的表示；分段函数的复合；反函数**．

1. 求函数的定义域

这里指的函数$f(x)$是由一个式子表示的初等函数，求出使该表达式有意义的x的范围．至于实际问题列出式子求定义域，将在有关章节中讨论．

例 1 函数$y=\arccos\dfrac{3x}{x^2+2}$的定义域是______．

解 应填$(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$．这是一个复合函数$y=\arccos u,u=\dfrac{3x}{x^2+2}$．$\arccos u$的定义域是$|u|\leqslant 1$．但$u=\dfrac{3x}{x^2+2}$，所以$x$只能取值在使$\left|\dfrac{3x}{x^2+2}\right|\leqslant 1$的范围．此不等式等价于$-(x^2+2)\leqslant 3x\leqslant x^2+2$．即$(x-2)(x-1)\geqslant 0$且$(x+2)(x+1)\geqslant 0$，解之得如上填．

例 2 函数$y=\sqrt{\ln\sin\pi x}$的定义域是______．

解 应填$x=\dfrac{1}{2}+2n,n\in Z$．y由下述一串函数复合而成：

$$y=\sqrt{u},u=\ln v,v=\sin\pi x.$$

由左往右逐个考虑定义域、值域、定义域，…．

$$u\geqslant 0,\ln v\geqslant 0,v\geqslant 1,\sin\pi x\geqslant 1,$$

但$\sin\pi x\leqslant 1$，所以只能是$\sin\pi x=1$，故如上填．

注 ① 由例2可见，即使是初等函数，其定义域也可以仅是一些离散的点构成的集合．

② **求复合函数定义域的方法如下**：先求最外层函数的定义域，以此定义域作为第二层函数的值域求出第二层的定义域，…，如此直至最后获得自变量的变化范围．此法对分段函数求定义域亦类似，只是略为困难、麻烦．

2. 求函数的表达式

(1) 给出简单的函数方程，求函数的表达式

这一类问题求解的方法很多，有的甚至要用到微分方程(题中给出可导条件者)，有的要用到极限(题中给出连续等条件者)，这里只限于仅给出函数方程求解$f(x)$．

例 3 设对于任意$x,f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，则$f(x)=$______．

解 应填$\dfrac{1}{3}(x^2+2x-2)$．由$f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，有$f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$，即

$$2f(x)+f(1-x)=x^2-1,$$
$$4f(x)+2f(1-x)=2x^2-2.$$

由此推知 $3f(x)=x^2+2x-2$，$f(x)$ 即为所填．

(2) 给出周期性、奇偶性并知道 $f(x)$ 在某一区间上的表达式，求它在另一指定区间上的表达式

例 4 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2$．求当 $x\in(-2,0)$ 时 $f(x)$ 的表达式．

解 当 $-2<x<-1$ 时，$2<x+4<3$，由周期性有

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2.$$

当 $-1<x<0$ 时，$0<-x<1$，$2<-x+2<3$．由 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，有

$$f(x)=f(-x)=f(-x+2)=(-x+2)^2$$

所以
$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2, & -2<x<-1,\\ (-x+2)^2, & -1<x<0.\end{cases}$$

在 $x=-1$ 处，$f(x)$ 无定义，原因是原给表达式在 $x=3$ 处没有定义．

(3) 给出复合关系求复合函数或中间函数的表达式

例 5* 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　[　]

解 应选[D]．因为

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2-x, & -x>0,\end{cases}\text{即 } f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0.\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 6* 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域．

解 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{(\varphi(x))^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 0$．

例 7 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$，$n=2,3,\cdots$，求 $f_n(x)$ 的表达式．

解 $f_2(x)=f_1(f_1(x))=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

猜想
$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

当 $n=1$ 时由定义知成立．设 $n=k$ 时成立，则

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

所以 $n=k+1$ 时亦成立．由数学归纳法知，对一切正整数 n，猜想成立．

(4) 求分段函数的复合函数

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$．

解 对于 $f(g(x))$，按 $f(x)$ 的定义，有

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$

再由 $|g(x)|<1$，根据 $g(x)$ 的定义，其对应的 x 应 $|x|\leqslant 1$；由 $|g(x)|\geqslant 1$，对应的 x 应 $|x|>1$．于是

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

例 9* 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$　　[　]

解　应选[B]. 将里层的 $f[f(x)]$ 看成一个函数，所以

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1, & |f[f(x)]|\leqslant 1,\\ 0, & |f[f(x)]|>1.\end{cases}$$

再考察 $|f[f(x)]|$，由 f 的定义知，无论里层 $|f(x)|\leqslant 1$ 还是 $|f(x)|>1$，总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$，而不可能 $|f[f(x)]|>1$. 所以无论 $|x|$ 如何，总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

3. 求反函数的表达式

例 10　函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$ 的反函数，$f^{-1}(x)=$______.

解　应填

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$$

记 $y=f(x)$，当 $x\leqslant 1$ 时 $0\leqslant y<+\infty$，$x=f^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$；当 $x>1$ 时 $-\infty<y<0$，$x=f^{-1}(y)=1-\dfrac{1}{y}$，所以反函数 $f^{-1}(x)$ 如上.

注　此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不单调，但反函数却存在，应分单调区间，再分段求出反函数.

三、综合杂例

例 11　已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$. 试证明 $f(x)$ 为周期函数，并且它的(最小正)周期为 2π.

证　$f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=f(x)+\sin x+\sin(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为周期函数. 设存在 $0<a<2\pi$，使 $f(x+a)=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(\pi+a)=f(\pi)=f(0+\pi)=f(0)+\sin 0=f(0)=f(a)$，再以 $x=a$ 代入题中条件，有 $f(a+\pi)=f(a)+\sin a$，得 $\sin a=0$，所以 $a=\pi$. 由假设 a 为 $f(x)$ 的周期，故 $f(x+\pi)=f(x)$，再由定义式得 $\sin x\equiv 0$. 矛盾. 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

例 12　求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的反函数及其定义域.

解　$f(-x)=-f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是奇函数. $x>0$ 时 $f(x)>0$，$x<0$ 时 $f(x)<0$，$f(0)=0$. 今证明，当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是严格单调增函数. 为此，计算

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2-x+1}}$$

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时显然 $f'(x)>0$. 因此只需证明当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时上式分子大于零即可. 此等价于证明

$$((2x+1)\sqrt{x^2-x+1})^2>((2x-1)\sqrt{x^2+x+1})^2.$$

经计算，上式等价于 $x>0$. 从而证明了当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为严格单调增. 并且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1,$$

所以当 $x>0$ 时 $y=f(x)$ 的值域为 $0<y<1$. 将 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 移项

$$y+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2+x+1}$$

两边平方得

$$2y\sqrt{x^2-x+1}=2x-y^2,$$

再平方得

$$4x^2(1-y^2)=(4-y^2)y^2.$$

于是得反函数

$$x=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}},\quad |y|<1.$$

因此得

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}},\qquad |x|<1.$$

注 为了弄清楚反函数及其定义域，必须将直接函数的单调性及其值域弄清楚．

例 13 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调增加函数，且恒有 $f(f(x))=x$. 试证明 $f(x)\equiv x$．

证 反证法，设存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x_0)>x_0$，于是 $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$，与 $f(f(x))=x$ 矛盾．同理可证，若存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x_0)<x_0$，亦导致矛盾．故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)\equiv x$．

例 14 设 $f(x),g(x),h(x)$ 均为单调增加函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 证明 $f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

证 由 $f(x)$ 是增函数，故 $f(f(x))\leqslant f(g(x))$，又由 $f(x)\leqslant g(x)$，所以 $f(g(x))\leqslant g(g(x))$. 于是 $f(f(x))\leqslant g(g(x))$. 同理可证 $g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

§2 极 限

一、基本内容

1. $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$ 的定义与左、右极限的定义

这里的 $x\to\square$ 可以表示 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 等等．相应地，当 $x\to x_0$ 时 U 表示 x_0 的某去心邻域，当 $x\to\infty$ 时 U 表示 $|x|>X$，其中 $X>0$ 为某个数．为简单起见，数列 $\{u_n\}$ 的极限也列在下表中：

序号与记号	对于任给	存在	当……时	就有
1. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$	$\varepsilon>0$	$N>0$	$n>N$	$\lvert u_n-A\rvert<\varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X<0$	$x<X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 记为 $f(x_0^+)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 记为 $f(x_0^-)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$-\delta<x-x_0<0$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
7. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

重要关系： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}u_{2n}=\lim_{n\to\infty}u_{2n-1}=A.$$

讨论分段函数分界点处的极限常用第一式；分奇、偶数列讨论数列的极限常用第二式．

2. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$,称$x\to\square$的过程中$f(x)$为无穷小．即:极限为零的变量(函数)为无穷小．**凡说到无穷小,必须同时说明其过程．0是惟一的常量无穷小．**

(2) **无穷大**$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$

序号与记号	对于任给	存在	当……时	就有
8. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$0<\mid x-x_0\mid<\delta$	$\mid f(x)\mid>M$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$	$M>0$	$X>0$	$\mid x\mid>X$	$\mid f(x)\mid>M$

仔细区分,又有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$等,不赘述．

3. 重要关系

(1) **无穷小与极限的关系**

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)-A=\alpha(x),\lim_{x\to\square}\alpha(x)=0.$$

戴了极限号帽子运算不方便时,可以利用此关系脱去帽子运算,必要时再戴上极限帽子．

(2) **存在极限与有界的关系**

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$存在,则存在$U$(意义见1),在$U$内$f(x)$有界．但反之不真．

(3) **保号性**

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A>(<)0$,则存在$U$,当$x\in U$时$f(x)>\frac{A}{2}(<\frac{A}{2})$,这说明在$U$内$f(x)$与$A$同号．

这里的$\frac{A}{2}$,也可以是kA,$0<k<1$.

推论 设存在U,当$x\in U$时$f(x)\geqslant(\leqslant)0$,且$\lim\limits_{x\to\square}f(x)\overset{\text{存在}}{=\!=}A$,则$A\geqslant(\leqslant)0$.

(4) **无穷小与无穷大的关系**

$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\square}\frac{1}{f(x)}=0$;$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$但$x\to\square$过程中$g(x)\neq0$,$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\square}\frac{1}{g(x)}=\infty$.

4. 运算法则

(1) **在$\lim\limits_{x\to\square}u(x)\overset{\text{存在}}{=\!=}A$,$\lim\limits_{x\to\square}v(x)\overset{\text{存在}}{=\!=}B$的条件下,极限的四则运算法则**

在上述条件下,有

① $\lim\limits_{x\to\square}[u(x)\pm v(x)]=\lim\limits_{x\to\square}u(x)\pm\lim\limits_{x\to\square}v(x)=A\pm B$;

② $\lim\limits_{x\to\square}[u(x)v(x)]=(\lim\limits_{x\to\square}u(x))\cdot(\lim\limits_{x\to\square}v(x))=AB$;

③ $\lim\limits_{x\to\square}(Cu(x))=C\lim\limits_{x\to\square}u(x)=CA$;

④ $\lim\limits_{x\to\square}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}u(x)}{\lim\limits_{x\to\square}v(x)}=\frac{A}{B}$ (当$B\neq0$).

(2) **复合函数的极限** 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$且存在$x_0$的一个去心邻域$\mathring{U}(x_0)$,当$x\in\mathring{U}(x_0)$时$\varphi(x)\neq u_0$,又设$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.

或可写成

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

此又可称为求极限的变量变换法.

(3) **在$\lim\limits_{x\to\square}u(x)$与$\lim\limits_{x\to\square}v(x)$一些特殊情况下的一些运算结论**

① 设$\lim\limits_{x\to\square}u(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=+\infty$,则$\lim\limits_{x\to\square}(u(x)+v(x))=+\infty$;

② 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\square}v(x)=-\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}(u(x)+v(x))=-\infty$.

③ 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to\square}v(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to\square}[u(x)\pm v(x)]$ 不存在.

④ 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=0$, $x\to\square$ 的过程中 $v(x)$ 有界, 则 $\lim\limits_{x\to\square}[u(x)v(x)]=0$.

⑤ 设 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)\xlongequal{\text{存在}}A\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\square}v(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\infty$.

⑥ 设 $x\to\square$ 过程中 $u(x)$ 有界, $\lim\limits_{x\to\square}v(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$.

注 上面 ①、② 不能写成 $\lim\limits_{x\to\square}(v(x)+v(x))=\pm\infty+(\pm\infty)=\pm\infty$; ④ 不能写成 $\lim\limits_{x\to\square}[u(x)v(x)]=\lim\limits_{x\to\square}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}v(x)=0\cdot\lim\limits_{x\to\square}v(x)=0$; ⑤ 不能写成 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{A}{0}=\infty$.

5. 重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(\text{常数 } a>0).$$

推广:

$$\lim_{*\to 0}\frac{\sin *}{*}=1,\ \lim_{*\to 0}(1+*)^{\frac{1}{*}}=\mathrm{e}.\ \text{这里 } *\neq 0.$$

6. 无穷小的比较与等价无穷小代换

(1) 无穷小的比较

设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为两个无穷小, 且 $x\to\square$ 的过程中 $\beta(x)\neq 0$, $\alpha(x)$ 不恒等于 0.

若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\xlongequal{\text{存在}}A$, $A\neq 0$, 则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小;

若 $A=1$, 则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小, 记成 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

若 $A=0$, 则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小记成 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, 则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的低阶无穷小, 即 $x\to\square$ 过程中 $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

(2) 重要的等价无穷小

$x\to 0$ 时 $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(3) 重要的高阶无穷小.

$x\to+\infty$ 时 $x^{-\delta}=o\left(\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^k\right)$, $\delta>0$, $k>0$;

$x\to+\infty$ 时, $\mathrm{e}^{-\delta x}=o(x^{-k})$, $\delta>0$, $k>0$;

(4) 求积、商的极限时等价无穷小代换

设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim a(x)$, $\beta(x)\sim b(x)$, 则

$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{a(x)\gamma(x)}{b(x)\delta(x)}.$$

即整个式子中的乘、除因式, 可用其等价无穷小代换求其极限. 加、减时不能用等价无穷小代换; 部分式子的乘、除因子也不能用等价无穷小代换.

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^3}=\dfrac{1}{2}$ 是正确的;

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}$ 在加、减中用了"等价无穷小代换", 是错误的. 又如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)$$

$$\xlongequal{*}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}-\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$