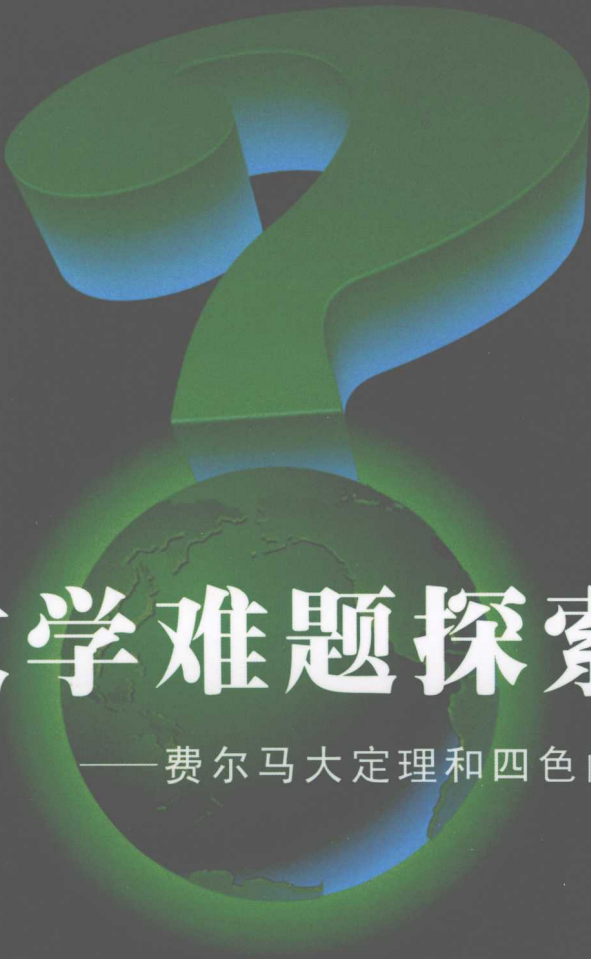




数学难题探索

——费尔马大定理和四色问题证明

徐俊杰 著

西北工业大学出版社

数学难题探索

——费尔马大定理和四色问题证明

徐俊杰 著



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书详细地介绍了费尔马大定理的初等证明方法和四色问题的数学证明方法。其中,分别运用无穷递降法和有穷递升法(根据 G. 法尔廷斯证明的莫德尔猜想)证明了费尔马大定理是成立的。同时,还运用数学推理方法证明了三次平面图形成定理和边二色回路定理,并进一步证明了四色问题也是成立的。这些证明的思路和方法,对于启发人们数学思考的多样化和推动基础数学研究的发展,是会大有益处的。

图书在版编目(CIP)数据

数学难题探索:费尔马大定理和四色问题证明/徐俊杰著. —西安:西北工业大学出版社,2007. 4
ISBN 978-7-5612-2200-3

I. 数… II. 徐… III. ①费马最后定理—证明②四色问题—证明 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 038260 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpu.com

印刷者:陕西天元印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:3.5

字 数:83 千字

版 次:2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

定 价:12.00 元

前 言

20 多年来,自己对数学中的两个难题——费尔马大定理和四色问题,在前人研究成果的基础上,进行了深入的研究和分析,并试图找到比较简单的数学证明方法。这里,把自己在证明过程中所写出的几份证明手稿汇集在一起。这既可以使大家了解证明的全过程,也可以作为资料保存下来。

因为人的认识是一个不断深化的过程,在探索中总会有些错误或不完善之处的。然而,只有在这种不断探索和不断完善的过程中,才能逐步地接近真理,并最终使之确立起来的。只有这样,才能鼓励人们去努力地攀登科学技术高峰。

经过多年艰苦的研究和探索,书稿于 2004 年 11 月 12 日最终在济南完成,后于 2006 年 11 月 5 日定稿于成都。

在大力提倡科学和技术创新的今天,如果本书能够有助于这些,则是自己的希望所在。对于其中不足之处,欢迎大家的批评和指正(联系电话:0531—82051543,028—87651028)。

徐俊杰

2006 年 11 月 12 日

目 录

第一部分 数学难题探索(第一稿)	1
一、费尔马大定理的初等证明方法	1
(一) 基本知识	1
(二) $n = 4$ 时的证明	2
(三) $n = p$ 时的证明	4
二、四色问题的数学证明方法	18
(一) 基本知识	18
(二) 两个定理	21
(三) 四色问题的证明	29
(四) 三次平面图的图解	30
参考文献	33
第二部分 数学难题探索(第二稿)	34
一、费尔马大定理的初等证明方法	34
(一) 由勾股定理引出的数学问题	34
(二) 有关的数学知识	35
(三) $n = 4$ 时的证明	39
(四) $n = 2p$ 时的证明	43
(五) $n = p$ 时的证明	48
二、四色问题的数学证明方法	55
(一) 由地图着色引出的数学问题	55
(二) 有关的数学知识	56
(三) 三次平面图的形成问题	60
(四) 四色问题的证明	63

(五) 证明过程中的思考	65
参考文献	66
第三部分 数学难题探索(第三稿)	67
一、费尔马大定理的初等证明方法	67
(一) 有关的基本知识	67
(二) 几个定理	68
(三) $n = 4$ 时的证明	72
(四) $n = p$ 时的证明	72
二、四色问题的数学证明方法	83
(一) 有关的基本知识	83
(二) 几个定理	85
(三) 三次平面图的形成问题	86
(四) 四色问题的证明	89
参考文献	91
第四部分 费尔马大定理的初等证明方法(论文)	92
(一) $n = 4$ 时的证明	92
(二) $n = p$ 时的证明	93
参考文献	99
第五部分 四色问题的数学证明方法(论文)	100
(一) 几个引理	100
(二) 四色问题的证明	104
(三) 三次平面图的图解	105
参考文献	105

第一部分 数学难题探索(第一稿)

一、费尔马大定理的初等证明方法^①

(一)基本知识

(1)1637年,法国数学家费尔马(Fermat)指出,在 $n > 2$ 时,方程

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

无正整数解。以下,正整数解均简称为解^[8]。

(2)因为 $n > 2$ 时,可有4整除 n ,或者奇素数 p 整除 n ,所以只要证明 $n = 4, n = p$ 时,方程(1)无解即可^[3]。

(3)定理1 在 x, y, z 彼此互素, x 为偶数时,方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

的解为

$$x = 2mn \quad (3)$$

$$y = m^2 - n^2 \quad (4)$$

$$z = m^2 + n^2 \quad (5)$$

这里, $m > n > 0, (m, n) = 1, mn$ 为偶数,即 mn 为一奇一偶^[3]。

(4)定理2 设 $f(x, y)$ 为有理系数多项式,在代数曲线 $f(x, y) = 0$ 的亏格 $g > 1$ 时,则其最多有有限组有理数解。由此可推

^① 1990年2月18日完成初稿,1995年5月20日完成修改稿,1995年6月16日在济南完成第二次修改稿,2006年11月2日在成都完成此第三次修改稿。

得: 在 $n > 3$ 时, 方程(1) 最多有有限组解^[6]。

(5) 无穷递降法: 如果方程 $f(x) = 0$ 的解是若干个正整数, 则在其中必有一个最小的正整数 x ; 如果可以得到另一个方程 $f(x_0) = 0$ 也有一个解为正整数 x_0 , 并且 $x_0 < x$ 。于是, 方程 $f(x) = 0$ 无正整数解^[3]。

(6) 有穷递升法: 如果方程 $f(x) = 0$ 的解是有限个正整数, 则在其中必有一个最大的正整数 x ; 如果可以得到另一个方程 $f(x_0) = 0$ 也有一个解为正整数 x_0 , 并且 $x_0 > x$ 。于是, 方程 $f(x) = 0$ 无正整数解。

(二) $n = 4$ 时的证明

1. 第一种方法

在 x, y, z 彼此互素, x 为偶数时, 设方程

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad (1)$$

的解为 (x, y, z) , 并且 z 是所有解中的最小解。

因为 yz 为奇数, 设 $z = a + b, y = a - b$, 由式(1) 可有

$$x^4 = (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2) \quad (2)$$

这里, $a > b > 0, (a, b) = 1, ab$ 为偶数。因为 $(8ab, a^2 + b^2) = 1$, 由式(2) 可有

$$c^4 = 8ab \quad (3)$$

$$e^4 = a^2 + b^2 \quad (4)$$

根据定理 1, 在 a 或 b 为偶数时, 式(4) 的解为

$$a \text{ 或 } b = 2uv \quad (5)$$

$$b \text{ 或 } a = u^2 - v^2 \quad (6)$$

$$e^2 = u^2 + v^2 \quad (7)$$

这里, $u > v > 0, (u, v) = 1, uv$ 为偶数。由式(3), (5), (6) 可有

$$c^4 = 16uv(u + v)(u - v)$$

即

$$(c/2)^4 = uv(u + v)(u - v) \quad (8)$$

因为 $(u, v) = 1$, uv 为偶数, 所以 $uv, u+v, u-v$ 彼此互素。由式(8)可有

$$u = r^4 \quad (9)$$

$$v = s^4 \quad (10)$$

$$u + v = t^4 \quad (11)$$

$$u - v = k^4 \quad (12)$$

这里, $r > s > 0$, $(r, s) = 1$, rs 为偶数, kt 为奇数。把式(9), (10)代入式(11), 可有

$$r^4 + s^4 = t^4 \quad (13)$$

于是, 从式(13)可以得出, (r, s, t) 也是式(1)的解。由式(6), (11)可有

$$z = a + b > b \text{ 或 } a = u^2 - v^2 \geq u + v = t^4 > t$$

$$z > t$$

这与假设 z 是式(1)的最小解相矛盾。因此, 式(1)无解。

这种证明方法是 1989 年 4 月 28 日得出的。

2. 第二种方法

在 x, y, z 彼此互素, x 为偶数时, 设方程

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad (1)$$

的解为 (x, y, z) 。根据定理 1, 式(1)的解为

$$x^2 = 2mn \quad (2)$$

$$y^2 = m^2 - n^2 \quad (3)$$

$$z^2 = m^2 + n^2 \quad (4)$$

这里, $m > n > 0$, $(m, n) = 1$, m 为奇数, n 为偶数。于是, 在式(2)有解的同时, 式(3)也同时有解。设 m 是式(3)所有解中的最小解。

根据定理 1, 式(3)的解为

$$m = a^2 + b^2 \quad (5)$$

$$n = 2ab \quad (6)$$

$$y = a^2 - b^2 \quad (7)$$

这里, $a > b > 0$, $(a, b) = 1$, ab 为偶数。由式(2), (5), (6) 可有

$$x^2 = 4ab(a^2 + b^2) \quad (8)$$

因为 $(a, b) = 1$, ab 为偶数, 所以 $(4ab, a^2 + b^2) = 1$ 。由式(8) 可有

$$c^2 = 4ab \quad (9)$$

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad (10)$$

于是, 从式(10) 可以得出, (a, b, e) 也是式(3) 的解。由式(5), (10) 可有

$$m = a^2 + b^2 = e^2 > e$$

$$m > e$$

这与假设 m 是式(3) 的最小解相矛盾。因此, 在式(2) 有解的同时, 式(3) 无解, 进而式(1) 无解。

同理, 也可以证明在式(2) 有解的同时, 式(4) 无解, 进而式(1) 无解。

这种证明方法是 1994 年 10 月 15 日得出的。

实际上, 对于方程(2), (3), (4), 单独地看, 每一个方程都是有解的。然而, 却无法找到相应的 m 和 n , 使这三个方程同时有解。因此, 只要证明其中两个方程不同时有解, 也就能证明式(1) 无解。以下的证明思路, 也是如此。

(三) $n = p$ 时的证明

1. 第一种方法

在 x, y, z 彼此互素时, 设方程

$$x^p + y^p = z^p \quad (1)$$

的解为 (x, y, z) 。由式(1) 可有

$$(x^{p/2})^2 + (y^{p/2})^2 = (z^{p/2})^2 \quad (2)$$

因此, (x, y, z) 也是式(2) 的解。

根据定理 1, 由式(2) 可知, z 只能为奇数。于是, 在 x 为偶数

时, 式(2) 的解为

$$x^{p/2} = 2mn \quad (3)$$

$$y^{p/2} = m^2 - n^2 \quad (4)$$

$$z^{p/2} = m^2 + n^2 \quad (5)$$

这里, $m > n > 0$, $(m, n) = 1$, mn 为偶数。

由式(3), (4), (5) 可知, x, y, z 又只能都为平方数。设 $x = r^2$, $y = s^2$, $z = t^2$, 则式(2) 和式(1) 为

$$r^{2p} + s^{2p} = t^{2p} \quad (6)$$

(1) 方程(6) 可为

$$(s^2)^p = (t^p)^2 - (r^p)^2 \quad (7)$$

式(7) 的解为

$$r^p = n \cdot g(m, n) \text{ 或 } n \cdot g(n, m) \quad (8)$$

$$s^2 = m^2 - n^2 \quad (9)$$

$$t^p = m \cdot f(m, n) \text{ 或 } m \cdot f(n, m) \quad (10)$$

这里, $m > n > 0$, $(m, n) = 1$, m 为奇数, n 为偶数; $(m, f(m, n)) = 1$ 或 p , $(n, g(m, n)) = 1$ 或 p ;

$$f(m, n) = C_p^0 m^{p-1} + C_p^2 m^{p-3} n^2 + \cdots + C_p^{p-3} m^2 n^{p-3} + C_p^{p-1} n^{p-1} \quad (11)$$

$$f(n, m) = C_p^1 n^{p-1} + C_p^3 n^{p-3} m^2 + \cdots + C_p^{p-2} n^2 m^{p-3} + C_p^p m^{p-1} \quad (12)$$

$$g(m, n) = C_p^1 m^{p-1} + C_p^3 m^{p-3} n^2 + \cdots + C_p^{p-2} m^2 n^{p-3} + C_p^p n^{p-1} \quad (13)$$

$$g(n, m) = C_p^0 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-3} m^2 + \cdots + C_p^{p-3} n^2 m^{p-3} + C_p^{p-1} m^{p-1} \quad (14)$$

其中, $f(n, m)$ 和 $g(n, m)$ 式子中的各项是分别把 $f(m, n)$ 和 $g(m, n)$ 式子中的各项颠倒过来写的, 并且 $C_p^i = C_p^{p-i}$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, p-1, p$)。

于是, 在式(9) 有解的同时, 式(8) 也同时有解。

根据定理 1, 由式(25), 式(9) 的解为

$$m = a^2 + b^2 \quad (15)$$

$$n = 2ab \quad (16)$$

$$s = a^2 - b^2 \quad (17)$$

这里, $a > b > 0$, $(a, b) = 1$, ab 为偶数. 由式(8), (16) 可有

$$r^p = 2ab \cdot g(m, n) \text{ 或 } 2ab \cdot g(n, m) \quad (18)$$

(2) 方程 (6) 还可为

$$(r^p)^2 + (s^p)^2 = (t^p)^2 \quad (19)$$

根据定理 1, 式(19) 的解为

$$r^p = 2uv \quad (20)$$

$$s^p = u^2 - v^2 \quad (21)$$

$$t^p = u^2 + v^2 \quad (22)$$

这里, $u > v > 0$, $(u, v) = 1$, uv 为偶数. 同时, 式(21) 的解为

$$u = a \cdot f(a, b) \quad (23)$$

$$v = b \cdot g(a, b) \quad (24)$$

$$s = a^2 - b^2 \quad (25)$$

由式(20), (23), (24) 可有

$$r^p = 2ab \cdot f(a, b) \cdot g(a, b) \quad (26)$$

这里, $(a, f(a, b)) = 1$ 或 p , $(b, g(a, b)) = 1$ 或 p .

(3) 在 a 为偶数, b 为奇数时, 分别有

① 在 p 不整除 ab 时, 从式(18) 可知, p 不整除 $g(m, n)$. 因为 $(2ab, g(m, n)) = 1$, 由式(18) 可有

$$r_1^p = 2a \quad (27)$$

$$r_{25}^p = g(m, n) \quad (28)$$

$$r_3^p = b \quad (29)$$

因此, 在式(27) 有解的同时, 式(28) 也同时有解. 设 r_{25} 是式(28) 所有解中的最小解.

从式(26) 可知, p 不整除 $f(a, b)$, p 不整除 $g(a, b)$. 因为

$(a, f(a, b)) = 1, (b, g(a, b)) = 1$, 由式(26) 可有

$$r_1^p = 2a \quad (30)$$

$$r_2^p = f(a, b) \quad (31)$$

$$r_3^p = b \quad (32)$$

$$r_4^p = g(a, b) \quad (33)$$

于是, 从式(33) 可以得出, (a, b, r_4) 也是式(28) 的解。由式(28), (33) 可有

$$r_{25}^p = g(m, n) > r_4^p = g(a, b) \quad (34)$$

$$r_{25} > r_4$$

② 在 p 不整除 a , p 整除 b 时, 从式(18) 可知, p 整除 $g(m, n)$ 。因为 $(a, g(m, n)) = 1, (b, g(m, n)) = p$, 由式(18) 可有

$$r_5^p = 2a \quad (35)$$

$$pr_{26}^p = g(m, n) \quad (36)$$

$$r_7^p = pb \quad (37)$$

因此, 在式(35) 有解的同时, 式(36) 也同时有解。设 r_{26} 是式(36) 所有解中的最小解。这里, 式(36) 实际上就是 $r_{26}^p = g(m, n)/p$ 。以下类似的, 也是如此。

从式(26) 可知, p 不整除 $f(a, b)$, p 整除 $g(a, b)$ 。因为 $(a, f(a, b)) = 1, (b, g(a, b)) = p$, 由式(26) 可有

$$r_5^p = 2a \quad (38)$$

$$r_6^p = f(a, b) \quad (39)$$

$$r_7^p = pb \quad (40)$$

$$pr_8^p = g(a, b) \quad (41)$$

于是, 从式(41) 可以得出, (a, b, r_8) 也是式(36) 的解。由式(36), (41) 可有

$$pr_{26}^p = g(m, n) > pr_8^p = g(a, b) \quad (42)$$

$$r_{26} > r_8$$

③ 在 p 整除 a , p 不整除 b 时, 从式(18) 可知, p 整除 $g(n, m)$ 。

因为 $(a, g(n, m)) = p$, $(b, g(n, m)) = 1$, 由式(18) 可有

$$r_9^p = 2pa \quad (43)$$

$$pr_{27}^p = g(n, m) \quad (44)$$

$$r_{11}^p = b \quad (45)$$

因此, 在式(43) 有解的同时, 式(44) 也同时有解。设 r_{27} 是式(44) 所有解中的最小解。

从式(26) 可知, p 整除 $f(a, b)$, p 不整除 $g(a, b)$ 。因为 $(a, f(a, b)) = p$, $(b, g(a, b)) = 1$, 由式(26) 可有

$$r_9^p = 2pa \quad (46)$$

$$pr_{10}^p = f(a, b) \quad (47)$$

$$r_{11}^p = b \quad (48)$$

$$r_{12}^p = g(a, b) \quad (49)$$

于是, 从式(47) 可以得出, (a, b, r_{10}) 也是式(44) 的解。由式(44), (47) 可有

$$pr_{27}^p = g(n, m) > pr_{10}^p = f(a, b) \quad (50)$$

$$r_{27} > r_{10}$$

(4) 在 a 为奇数, b 为偶数时, 分别有

① 在 p 不整除 ab 时, 从式(18) 可知, p 不整除 $g(m, n)$ 。因为 $(2ab, g(m, n)) = 1$, 由式(18) 可有

$$r_{13}^p = 2b \quad (51)$$

$$r_{28}^p = g(m, n) \quad (52)$$

$$r_{15}^p = a \quad (53)$$

因此, 在式(51) 有解的同时, 式(52) 也同时有解。设 r_{28} 是式(52) 所有解中的最小解。

从式(26) 可知, p 不整除 $f(a, b)$, p 不整除 $g(a, b)$ 。因为 $(a, f(a, b)) = 1$, $(b, g(a, b)) = 1$, 由式(26) 可有

$$r_{13}^p = 2b \quad (54)$$

$$r_{14}^p = g(a, b) \quad (55)$$

$$r_{15}^p = a \quad (56)$$

$$r_{16}^p = f(a, b) \quad (57)$$

于是,从式(55)可以得出, (a, b, r_{14}) 也是式(52)的解。由式(52), (55)可有

$$r_{28}^p = g(m, n) > r_{14}^p = g(a, b) \quad (58)$$

$$r_{28} > r_{14}$$

② 在 p 整除 a , p 不整除 b 时,从式(18)可知, p 整除 $g(n, m)$ 。因为 $(a, g(n, m)) = p$, $(b, g(n, m)) = 1$,由式(18)可有

$$r_{17}^p = 2b \quad (59)$$

$$pr_{29}^p = g(n, m) \quad (60)$$

$$r_{19}^p = pa \quad (61)$$

因此,在式(59)有解的同时,式(60)也同时有解。设 r_{29} 是式(60)所有解中的最小解。

从式(26)可知, p 整除 $f(a, b)$, p 不整除 $g(a, b)$ 。因为 $(a, f(a, b)) = p$, $(b, g(a, b)) = 1$,由式(26)可有

$$r_{17}^p = 2b \quad (62)$$

$$r_{18}^p = g(a, b) \quad (63)$$

$$r_{19}^p = pa \quad (64)$$

$$pr_{20}^p = f(a, b) \quad (65)$$

于是,从式(65)可以得出, (a, b, r_{20}) 也是式(60)的解。由式(60), (65)可有

$$pr_{29}^p = g(n, m) > pr_{20}^p = f(a, b) \quad (66)$$

$$r_{29} > r_{20}$$

③ 在 p 不整除 a , p 整除 b 时,从式(18)可知, p 整除 $g(m, n)$ 。因为 $(a, g(m, n)) = 1$, $(b, g(m, n)) = p$,由式(18)可有

$$r_{21}^p = 2pb \quad (67)$$

$$pr_{30}^p = g(m, n) \quad (68)$$

$$r_{23}^p = a \quad (69)$$

因此,在式(67)有解的同时,式(68)也同时有解。设 r_{30} 是式(68)所有解中的最小解。

从式(26)可知, p 不整除 $f(a, b)$, p 整除 $g(a, b)$ 。因为 $(a, f(a, b)) = 1$, $(b, g(a, b)) = p$, 由式(26)可有

$$r_{21}^p = 2pb \quad (70)$$

$$pr_{22}^p = g(a, b) \quad (71)$$

$$r_{23}^p = a \quad (72)$$

$$r_{24}^p = f(a, b) \quad (73)$$

于是,从式(71)可以得出, (a, b, r_{22}) 也是式(68)的解。由式(68), (71)可有

$$pr_{30}^p = g(m, n) > pr_{22}^p = g(a, b) \quad (74)$$

$$r_{30} > r_{22}$$

(5) 根据式(34), (42), (50), (58), (66), (74) 的结论,这与假设 $r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}$ 分别是一个最小解相矛盾。因此,在式(27), (35), (43), (51), (59), (67) 分别有解的同时,式(28), (36), (44), (52), (60), (68) 分别无解。于是,在式(9)有解的同时,式(8)无解,进而式(6)无解,式(1)也无解,费尔马大定理成立。

这种证明方法是 1995 年 5 月 28 日最终得出的。其中,证明方程(6)无解的方法是 1990 年 1 月 12 日得出的。

2. 第二种方法

在 $p > 3$, x, y, z 彼此互素时,设方程

$$x^p + y^p = z^p \quad (1)$$

的解为 (x, y, z) 。于是,可有

(1) 在 z 为偶数时,设 $x = a + b, y = a - b$ 。由式(1)可有

$$z^p = (a + b)^p + (a - b)^p = 2a \cdot f(a, b) \quad (2)$$

这里, $a > b > 0$, $(a, b) = 1$, a 为偶数, b 为奇数; $(2a, f(a, b)) = 1$ 或 p 。

① 在 p 不整除 ab 时, 因为 $(2a, f(a, b)) = 1$, 由式(2) 可有

$$z_1^p = 2a \quad (3)$$

$$z_2^p = f(a, b) \quad (4)$$

② 在 p 不整除 a , p 整除 b 时, 因为 $(2a, f(a, b)) = 1$, 由式(2) 可有

$$z_3^p = 2a \quad (5)$$

$$z_4^p = f(a, b) \quad (6)$$

③ 在 p 整除 a , p 不整除 b 时, 因为 $(2a, f(a, b)) = p$, 由式(2) 可有

$$z_5^p = 2pa \quad (7)$$

$$pz_6^p = f(a, b) \quad (8)$$

(2) 在 x 为偶数时, 设 $z = a + b, y = a - b$. 由式(1) 可有

$$x^p = (a + b)^p - (a - b)^p = 2b \cdot g(a, b) \quad (9)$$

这里, $a > b > 0, (a, b) = 1, a$ 为奇数, b 为偶数; $(2b, g(a, b)) = 1$ 或 p .

① 在 p 不整除 ab 时, 因为 $(2b, g(a, b)) = 1$, 由式(9) 可有

$$x_1^p = 2b \quad (10)$$

$$x_2^p = g(a, b) \quad (11)$$

② 在 p 整除 a , p 不整除 b 时, 因为 $(2b, g(a, b)) = 1$, 由式(9) 可有

$$x_3^p = 2b \quad (12)$$

$$x_4^p = g(a, b) \quad (13)$$

③ 在 p 不整除 a , p 整除 b 时, 因为 $(2b, g(a, b)) = p$, 由式(9) 可有

$$x_5^p = 2pb \quad (14)$$

$$px_6^p = g(a, b) \quad (15)$$

根据定理 2, 方程(1) 最多有有限组解, 所以在式(3), (5), (7), (10), (12) (14) 分别有解的同时, 式(4), (6), (8), (11), (13), (15)