高 等 数 学

第二册

（試用教材）

成都电訊工程学院

1972. 8.

目　录

第三章　变化率和微分

第四章　积分及其应用

毛 主 席 語 录

这个辯証法的宇宙观，主要地就是教导人們要善于去观察和分析各种事物的矛盾的运动，并根据这种分析，指出解决矛盾的方法。

第三章　变化率和微分

在第一章里，我们从自然界的各种运动过程中，抽出它们的共性——变量之间的对应关系，建立了函数概念。在反映实际运动规律的函数关系中，有均匀变化和非均匀变化，这就是微积分的研究对象。在第二章里，我们举例说明了微积分是解决两大类问题的；一类是微分问题，这部分内容属于所谓微分学，它包括了变化率和微分；一类是积分问题，这部分内容即所谓积分学，它包括了积分和变化率（或微分）的原函数。在第二章里，揭露和分析了微分和积分的矛盾，并初步介绍了研究这两类问题的基本分析方法。往后我们还可以看到，变化率问题也是微分问题，微分可以从变化率得出，变化率本身就是微分系数。本章先讨论变化率，然后讨论微分。

第一节　变化率的概念

一、实践中的变化率問题

当我们研究实践中遇到的变量问题时，讨论变量变化的速度，通常是十分广泛和必要的。例如，飞机或火车运动的速度的大小是它们工作效能的重要标志，速度的大小就是路程对时间的变化比率；又如在R-C电路中电流就是与电容端电压对时间的变化比率成正比的。这样的例子可以举出很多。

毛主席教导我们：**“認識开始于經驗——这就是認識論的唯物論。”**为了说明什么是函数的变化率，我们先研究两个具体问题。

例1.　计算自由落体在$t=3$秒时的速度。

匀速（或称等速）运动，是速度不变的运动。物体的运动速度一般都是不均匀的，即速度是变化的。在地球表面附近，物体从静止开始下落（空气阻力忽略不计），这种落体称自由落体。比如，建筑工地用高架锤打桩，就是自由落体的例子。自由落体的下落是越落越快，说明这种运动不是匀速的。怎样计算它的速度呢？

1.　分析主要矛盾

实验告诉我们，自由落体所走的路程（距离）S（单位为米）与时间t（单位为

秒）的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2, \qquad (A)$$

（其中 g 为重力加速度等于9.8米/秒²），

或 $$S=4.9t^2。 \qquad (A')$$

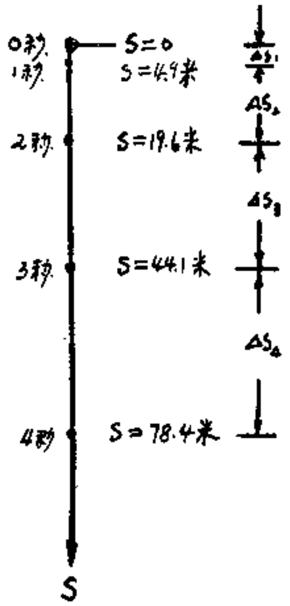


图3—1

它的运动示意图如3—1。

落体从 $t=0$ 开始下落，按（A）或（A'）式计算，

第1秒钟经过路程 $S=4.9\times1^2=4.9$(米)，

至第2秒末共经过路程 $S=4.9\times2^2=19.6$(米)，

至第3秒，第4秒，第5秒末落体经过的路程分别等于44.1米，78.4米，122.5米，

…………；

所以落体，

在第1秒钟内走了 $\varDelta S_1=4.9-0=4.9$(米)，

在第2秒钟内走了 $\varDelta S_2=19.6-4.9=14.7$(米)，

在第3秒钟内走了 $\varDelta S_3=44.1-19.6=24.5$(米)，

在第4秒钟内走了 $\varDelta S_4=78.4-44.1=34.3$(米)，

…………。

由此看出，落体每秒钟下落的路程是不均匀的，它越落越快，这与实际观察到的事实是相符的。如果物体是作匀速运动，它的速度就很容易求出。

$$速度=\frac{路程}{时间},$$

如果已知时间改变 $\varDelta t$，物体走过的路程为 $\varDelta S$ 时，对于匀速运动，则

$$速度=\frac{\varDelta S}{\varDelta t}。$$

但是，对于非匀速运动的速度，就不能简单地用 $\frac{\varDelta S}{\varDelta t}$ 来求。因为此时，$\frac{\varDelta S}{\varDelta t}$ 只能表示在 $\varDelta t$ 的时间内的平均速度。比如落体从第3秒到第4秒钟内共走了34.3米，于是

$$\frac{\varDelta S}{\varDelta t}=\frac{34.3米}{1秒}=34.3米/秒。$$

这只能表示这一秒钟内的平均速度，而不是我们要求的在 $t=3$ 秒时的速度，因为实际上落体在第3秒到第4秒这段时间内速度也是在逐渐变大的。在这里，主要矛盾是速度变与不变，亦即匀与不匀的矛盾。

2. 解决矛盾的方法

毛主席教导我们：**“一切矛盾着的东西，互相联系着，不但在一定条件之下共处于一个统一体中，而且在一定条件之下互相转化，这就是矛盾的同一性的全部意义。”**自由落体的速度虽然是在不断地变化，但在一个很短暂的时间里，它的变化不大，可以近

似看着是不变的。因此，在$|\Delta t|$很小的情况下，按等速运动求速度的公式，计算出变速运动的平均速度，

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(3+\Delta t)-S(3)}{\Delta t},$$

就近似等于$t=3$时的瞬时速度。下面进行一些具体计算。

$$\because \quad \Delta S=\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 3^2=\frac{1}{2}g[9+6\cdot\Delta t+(\Delta t)^2-9]$$

$$=\frac{1}{2}g[6\cdot\Delta t+(\Delta t)^2]=3g\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

$$=29.4\Delta t+19.7(\Delta t)^2,$$

$$\therefore \quad V_{平均}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=29.4+19.7\Delta t。\qquad (B)$$

这里，平均速度$V_{平均}$包括了两个组成部分，一部分是常量29.4米/秒，它是不变的，另一部分等于$19.7\Delta t$，它随Δt的改变而改变，是变动的。当时间不断细分，即时间间隔$|\Delta t|$越来越小时，变动部分$19.7\Delta t$也随之越来越小。如取$\Delta t=1$，0.1，0.01，0.001，0.0001，0.00001时，按公式（B）算出的平均速度列表于下：

Δt(秒)	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	……
V平均（米/秒）	34.3	29.89	29.449	29.4049	29.40049	29.400049	……

从表上可以看出，时间间隔$|\Delta t|$取得越小，平均速度$V_{平均}$越接近常量29.4（米/秒），显然，这个常量就是落体在$t=3$秒时的瞬时速度。

但是，以上作法，无论$|\Delta t|$如何小（不能取$\Delta t=0$），$V_{平均}$还是个近似值。要解决近似与精确的矛盾，可用取极限的方法。我们令$\Delta t\to 0$，直接对（B）式取极限，便得到落体在$t=3$秒时的瞬时速度的精确值即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}V_{平均}=\lim_{\Delta t\to 0}(29.4+19.7\Delta t)=29.4(米/秒)。$$

3． 计算步骤

总结上述，得计算步骤如下：

Ⅰ． 从$S=\frac{1}{2}gt^2$式中，分别算出$t=3$和$t=3+\Delta t$时刻落体下落的路程

$$S_1=\frac{1}{2}g\cdot 3^2;\qquad S_2=\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2。$$

Ⅱ． 计算时间从$t=3$秒变化到$3+\Delta t$秒时，路程的改变量$\Delta S=S_2-S_1$，即

$$\Delta S=\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 3^2=\frac{1}{2}g[9+6\cdot\Delta t+(\Delta t)^2-9]$$

$$=\frac{1}{2}g(6+\Delta t)\cdot\Delta t。$$

Ⅲ. 求平均速度

$$V_{平均}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(6+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(6+\Delta t)。$$

Ⅳ. 令$\Delta t\to 0$，求$V_{平均}$的极限值，即得V，

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}V_{平均}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(6+\Delta t)$$
$$=3g=29.4(米/秒)。$$

上面说的是计算时刻$t=3$秒时的(瞬时)速度。同样，可以计算落体在运动过程中任意时刻t的速度：首先算出，时间由t时刻改变到$t+\Delta t$时刻，路程的改变量和平均速度，即

$$\Delta S=4.9(t+\Delta t)^2-4.9t^2=4.9(2t+\Delta t)\Delta t,$$

$$V_{平均}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{4.9(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=4.9(2t+\Delta t)。$$

这里，t和Δt都是任意给定的，它具有普遍性，可以用来计算落体在任何时刻，任何一段时间间隔内的平均速度。令$\Delta t\to 0$取极限。

$$\lim_{\Delta t\to 0}V_{平均}=\lim_{\Delta t\to 0}(9.8t+4.9\Delta t)=9.8t(米/秒),$$

即为落体在时刻t的瞬时速度V（简称速度），

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}V_{平均}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=9.8t(米/秒),$$

由于上式中的t是任意的，所以它是求落体瞬时速度的公式。

如令 $t=1$秒，$V(t)|_{t=1}=9.8(米/秒)$，
$t=2$秒，$V(t)|_{t=2}=19.6(米/秒)$，
$t=3$秒，$V(t)|_{t=3}=29.4(米/秒)$，
$t=4$秒，$V(t)|_{t=4}=39.2(米/秒)$，

即分别为落体在$t=1$，2，3，4秒时的瞬时速度。(这里$V(t)|_{t=1}$表示在$t=1$秒时的速度。)

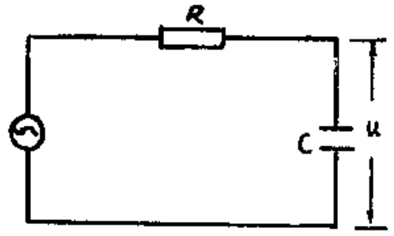


图3—2

例2. 交流电路中，已知电容器两端的电压，求电流强度。

设如图3—2的交流电路，已知电容器两端的电压是

$$U(t)=U_0\sin\omega t, \qquad (A)$$

其中U_0是电压的最大值（或称峰值），ω是交流电的角频率，电压波形如图3—3。

1. 分析主要矛盾

从电学知道，对于直流电，

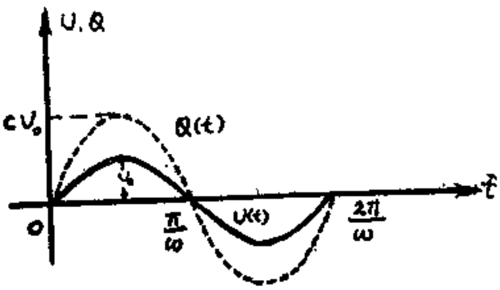


图 3—3

电流强度 $I=\frac{\text{电量}Q}{\text{时间}t}$　(B)

(如果电量的单位是库仑，时间的单位是秒，那么电流强度——简称电流——的单位是安培。)

由电容器上的电压，是可以知道电容器极板上的电量的。由电学公式知道，电容器极板上所堆积的电量Q与加在该电容器上的电压 U 是成正比的，其比例常数就是电容量 C，即

$$\frac{Q}{U}=C,$$

$$\therefore \quad Q(t)=CU(t)=CU_0\sin\omega t。$$

由于现在电流不断地在变化，计算直流电流的公式 (B) 就不能直接应用。现在遇到的主要矛盾仍然是变与不变的矛盾。

2. 解决矛盾的方法

如果我们把从时刻t到$t+\Delta t$的时间间隔$|\Delta t|$取得很短，那么，类似于例 1 的分析，这个很短的时间间隔$|\Delta t|$里，电流近似于不变，就是说，电流"变"与"不变"的矛盾，可以在时间的"无限细分"的条件下转化。因此，在"时间很短"的条件下，可以近似地用直流电代替交流电。至于近似与精确的矛盾，仍用取极限的方法来解决。下面就以这样的思想去求交流电流。仿照例 1 的计算步骤：

Ⅰ. 计算时刻在t和$t+\Delta t$时电容器极极上所堆积的电量

$$Q_1=Q(t)=CU_0\sin\omega t,\qquad Q_2=Q(t+\Delta t)=CU_0\sin\omega(t+\Delta t)。$$

Ⅱ. 计算t到$t+\Delta t$这段时间Δt内，电量的改变量$\Delta Q=Q_2-Q_1$，即

$$\begin{aligned}\Delta Q&=Q(t+\Delta t)-Q(t)=CU_0\sin\omega(t+\Delta t)-CU_0\sin\omega t\\&=CU_0[\sin\omega(t+\Delta t)-\sin\omega t]。\end{aligned}$$

Ⅲ. 在Δt内电量的平均改变量，即平均电流强度为

$$I_{\text{平均}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=CU_0\frac{\sin\omega(t+\Delta t)-\sin\omega t}{\Delta t}。$$

显然，时间间隔$|\Delta t|$越小，$I_{\text{平均}}$越接近t时刻的电流。

Ⅳ. 解决近似与精确的矛盾。令$\Delta t\to0$，取$I_{\text{平均}}$的极限，此极限值即时刻 t的电流强度。

$$\therefore \quad I(t)=\lim_{\Delta t\to0}I_{\text{平均}}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}CU_0\frac{\sin\omega(t+\Delta t)-\sin\omega t}{\Delta t}。$$

为了求出这个极限，利用三角函数的和差化积公式

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}。$$

现在$A=\omega(t+\Delta t)$，$B=\omega t$，

$$\therefore\quad I(t)=\lim_{\Delta t\to 0} CU_0\frac{2\cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t},$$

当$\Delta t\to 0$时，$\cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\longrightarrow\cos\omega t$。再利用极限公式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，

取$x=\frac{\omega\Delta t}{2}$，可求出，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t}=\lim_{\frac{\omega\Delta t}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}}\cdot\frac{\omega}{2}=1\cdot\frac{\omega}{2}=\frac{\omega}{2}。$$

$$\therefore\quad I(t)=\lim_{\Delta t\to 0} CU_0\frac{2\cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\Delta t}$$

$$=CU_0(2\cos\omega t)\left(\frac{\omega}{2}\right)=C\omega U_0\cos\omega t,\qquad (C)$$

这就是所要求的电流强度。

二、变化率概念

上面两个例子，虽然具体内容不同，一个是由距离$S(t)$求速度，一个是由电量$Q(t)$求电流，但分析矛盾和解决矛盾的方法则是一样的。它们之间的共同点是，计算因变量对于自变量的变化速度，即因变量的改变量（ΔS或ΔQ）与自变量的改变量（Δt）之比的极限$\left(V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t},\ I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)$。对于这类问题，我们把它概括如下：

設y是自变量x的函数$y=f(x)$，当x从x_0变到$x_0+\Delta x$，x的改变量是Δx，相应地，y就从$f(x_0)$变化到$f(x_0+\Delta x)$，y有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，那末，当$x_0+\Delta x$无限接近于$x_0$，即当$\Delta x\longrightarrow 0$时，函数改变量$\Delta y$与自变量改变量$\Delta x$的比値$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限値

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

称为y在$x=x_0$时的变化率（或者称为导数），記为$f'(x_0)$或$y'(x_0)$。

这里的x_0是任意一个固定点，通常也就用x本身来记它。这样，变化率就可写成$f'(x)$或y'。

按照变化率的概念，上小节例1中的速度就是路程S对t的变化率；例2中的电流就是电量Q对时间t的变化率。

例3.　求$y=x^3$的变化率

仍按四个步骤计算。

Ⅰ.　设自变量从x变到$x+\Delta x$，计算y的对应量，即

$$y_1=x^3,$$
$$y_2=(x+\Delta x)^3。$$

Ⅱ.　计算函数改变量Δy。

$$\begin{aligned}\Delta y&=y_2-y_1=(x+\Delta x)^3-x^3\\&=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3\\&=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,\end{aligned}$$

Ⅲ.　求函数改变量Δy与自变量改变量Δx的比值，即平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2。$$

Ⅳ.　令$\Delta x\to 0$，取$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值，即得$y'$，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right]=3x^2。$$

这里，在$x=1$处的变化率是$y'|_{x=1}=3x^2|_{x=1}=3\cdot 1^2=3$，在$x=0$处的变化率是$y'|_{x=0}=3x^2|_{x=0}=3\cdot 0^2=0$，等等。

例4.　求$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$的变化率。

解： Ⅰ. 计算　$y(x)=\dfrac{1}{x}$，　$y(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$；

Ⅱ. 求　$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$；

Ⅲ. 求　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}$，

Ⅳ.　$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}\right)=-\dfrac{1}{x^2}。$

顺便指出，在第一章里，我们已知线性函数$y=ax+b$是均匀变化的，即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$。由于$y=ax+b$的变化率

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

所以线性函数$y=ax+b$的变化率y'与$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$是一致的，它们都等于该直线的斜率$a$。

三、 变化率的几何意义

我们已经有了函数的变化率概念。但是一般地说，一个函数不仅可用式子表出，还可用曲线图形来表示，这种形数结合的办法，能够帮助我们更直观地认识函数的变化规律。那么函数 $y=f(x)$ 的变化率 $y'(x_0)$ 在图形上表示什么呢？前面已经讲过，线性函数 $y=ax+b$ 的变化率

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

等于该直线的斜率（图 3—4）。但对于一般曲线就不如线性函数这样简单。

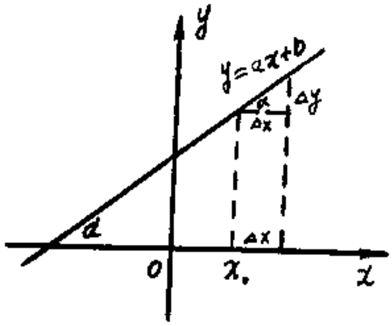


图 3—4

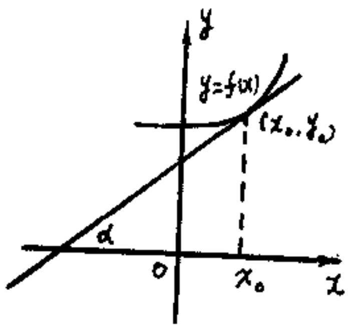


图 3—5

对于非线性函数 $y=f(x)$，在 x_0 处的变化率，则等于它的曲线在点 $[x_0, y(x_0)]$ 处的切线的斜率（图 3—5）。下面从实际出发，先介绍曲线的切线的作法，然后说明曲线切线的斜率等于函数的变化率。

1. 工人师付如何作曲线的切线。

工人师付画线遇到作曲线的切线时，常是用钢尺贴着切点 A，不断转动钢尺来找到切线位置的（图 3—6）。这个过程就是把钢尺放到曲线上，除去切点 A 外，常要与曲线在另一点 B 相交，成为曲线的一条割线，逐渐转动钢尺，使 B 沿曲线无限接近于 A，钢尺的极限位置就是切线的位置。

2. 函数的变化率等于曲线的切线斜率，这就是变化率的几何意义。

下面说明函数的变化率等于曲线的切线斜率。

图 3—6

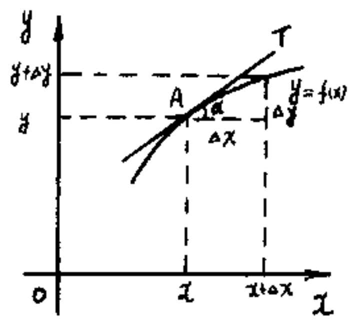


图 3—7

设曲线的方程为 $y=f(x)$。过 A 点作曲线的割线，与曲线另交于一点 B。先求割线的斜率（图 3—7）。设 A 点坐标为 (x, y)、B 点坐标为 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$，因 A、B 都是曲线上的点，所以

$$y=f(x) \qquad y+\Delta y=f(x+\Delta x)。$$

两式相减，得

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)。$$

割线 AB 的斜率 m_{AB} 就是 AB 两点的纵坐标之差 Δy 与横坐标之差 Δx 之比，即

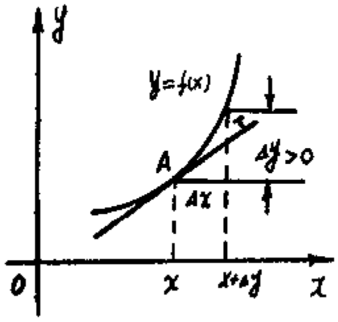
$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

上面求出的割线斜率 m_{AB}，当 $|\Delta x|$ 足够小时，它近似于切线斜率。当 B 点沿曲线无限贴近 A 点时（此时 $\Delta x\to 0$）割线无限趋近其极限位置，即切线的位置，割线的斜率也跟着无限接近切线 AT 的斜率。所以切线斜率

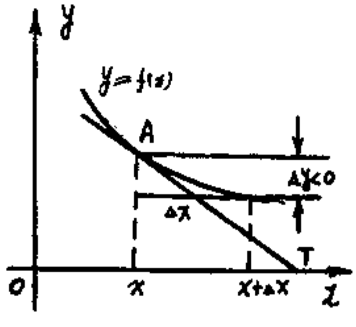
$$m_A=\lim_{\Delta x\to 0} m_{AB}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)。$$

因此，曲線 $y=f(x)$ 对应于 x 处的切綫斜率就是函数 $y=f(x)$ 在該点 x 处的变化率。

根据变化率的意义，变化率的正负，可以确定函数值的增减即函数图形的上升下降。当变化率为正，即 $y'>0$ 时，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$，即 $\Delta x>0$，$\Delta y>0$，故 x 增大 y 也增大（图 3—8a）。当变化率为负，即 $y'<0$ 时，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$，即 $\Delta x>0$，$\Delta y<0$，故 x 增大，y 反而减小（图 3—8b）。利用变化率（即切线斜率）的正负来判别函数的增减是研究函数变化的一种方法。



(a) $y'>0$



(b) $y'<0$

图 3—8

本　节　小　結

1. 按照毛主席的教导：**“人們总是首先认識了許多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认識諸种事物的共同的本质。”** 本节里我们先研究了两个变化率问题：一个是速度问题，一个是电流问题，然后通过分析，进行概括，找出它们有下列共同点。

問 题	已有知識	主要矛盾	解决矛盾的方法
求速度 $v(t)$	会求匀速运动速度：$v=\frac{s}{t}$	匀与不匀（即变与不变）	Ⅰ．当$\|\Delta t\|$很小时，以匀代不匀 Ⅱ．取极限$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v(t)$
求电流$I(t)$	会求直流电流：$I=\frac{Q}{t}$	变与不变	Ⅰ．当$\|\Delta t\|$很小时，以不变代变 Ⅱ．取极限$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=I(t)$

在分析过程中，“变与不变”、“匀与不匀”的矛盾用“细分区间”以“不变代变”。“匀代不匀”的方法来解决；“近似与精确的矛盾”用取极限的方法来解决。

两个例子虽然具体内容不同，但分析矛盾解决矛盾的方法则是相同的。它们之间有一个共同点，即它们都是刻划着因变量对于自变量的变化速度。变化率就是这一类问题的概括。

2． 变化率的定义：设 y 是自变量 x 的函数 $y=f(x)$。当 x 从 x_0 变化到$x_0+\Delta x$，x 的改变量是Δx，相应地，y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$，y有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$，那末，当$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，称为 y在 $x=x_0$ 处的变化率（或称为导数），记为 $y'(x_0)$或 $f'(x_0)$。（这里 x_0 是任意一个固定点，经常就用 x 本身来记它，变化率就写成 y' 或 $f'(x)$。）

3． 函数的变化率在几何上代表曲线的切线斜率；它的绝对值的大小，反映了函数变化的快慢，它的符号反映了函数变化是增大或是减小。

4． 求变化率的计算步骤：Ⅰ．求自变量从 x 变到 $x+\Delta x$ 所对应的函数值$f(x)$及 $f(x+\Delta x)$；Ⅱ．求y的增量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；Ⅲ．计算平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；Ⅳ．令$\Delta x\to 0$求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

习题一

1． 举出一些例子，说明什么是变化率。

2． 求出 (a) $y=ax$； (b) $y=c$； (c) $y=\frac{1}{x^2}$ 的变化率。

3． 设有抛物线 $y=\frac{1}{12}x^2$，求它在任何一点上的切线斜率，分别画出 (2，0.33) 和 (3，0.75) 两点上的切线。

4． 求鱼腹梁 $y=0.0000851x^2$ 在 A (10，0.00851)，B (100，0.851) 的切线斜率。

5． 求正弦曲线 $y=\sin x$ 在任何一点上的切线斜率，画出正弦曲线及在（0，0）和（$\frac{\pi}{2}$，1）处的切线，并写出切线方程。

6. 讨论正弦曲线 $y=\sin x$ 值的增减与变化率正负的关系。

第二节　变化率的計算方法

毛主席教导我们：**“我們不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法問題。”**前面我们讨论了变化率的概念，为了更好地解决实际问题，还需要掌握函数变化率的计算方法。

一、 基本函数的变化率公式

1. 常量的变化率

$$\boxed{C'=0} \tag{3-1}$$

设 $y=C$（常数），当 x 变化 $\varDelta x$ 时，函数 y 的值不变化，总是等于 C，所以 $\varDelta y=f(x+\varDelta x)-f(x)=C-C=0$

$$y'=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{C-C}{\varDelta x}=0\text{；}$$

即常数的变化率为0。

从函数图形上可以看出，$y=C$ 是平行 x 轴的一条直线，它的斜率 $tg\alpha=0$，也就是它的变化率为0（图3—9）。

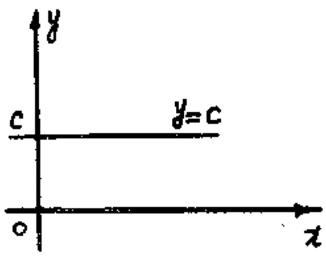


图 3—9

2. 幂函数 x^α 的变化率公式

$$\boxed{(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\text{（}\alpha\text{ 为任何实数）}} \tag{3-2}$$

设 $y=x^\alpha$（α 为任何实数），当 $\alpha=1$，即 $y=x$ 时，x 变化 $\varDelta x$，y 的变化为 $\varDelta y=(x+\varDelta x)-x=\varDelta x$

$$\therefore\qquad y'=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta x}=1\text{；}$$

当 $\alpha=2$，即 $y=x^2$ 时，x 变化 $\varDelta x$，y 的变化为 $\varDelta y=(x+\varDelta x)^2-x^2=2x\,\varDelta x+(\varDelta x)^2$，

$$\therefore\quad y'=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{2x\varDelta x+(\varDelta x)^2}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}(2x+\varDelta x)=2x\text{；}$$

利用同样的方法，对于 $y=x^n$ 可以得出

$$y'=nx^{n-1},$$

（其中 n 为自然数）。不仅如此，对于任意的实数 α，$y=x^\alpha$ 的变化率，仍有如下形式

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}\text{；}$$

例如：

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}。$$

3. 三角函数的变化率公式

对于 $y=\sin x$ 的变化率，我们在第一节例2求电流 I 时，其实已经推导出来，不过在那里自变量用 t，现在用 x，而且 U_0、C、ω 在现在都等于1，其公式为

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x} \tag{3-3}$$

学员可根据变化率的定义自行推导。

这里应注意的是：在三角函数的变化率的公式中，自变量 x 是以弧度来表示的，应用时要注意。

仿照第一节例1的推导方法可得

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x} \tag{3-4}$$

具体推证我们在这里不做了。

4. 指数函数 e^x 的变化率公式

$$\boxed{(e^x)'=e^x} \tag{3-5}$$

设 $y=e^x$，当 x 变化 Δx 时，y 变化 Δy，

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0$，求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限时，由于 e^x 不包括 Δx，所以 e^x 不变。为要知道 $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 的极限，下面按 $\Delta x\to 0$ 列表观察它的变化趋势。

Δx	0.1	0.01	0.001	0.0001	……
$e^{\Delta x}$	1.10517	1.01005	1.0010005	1.000100005	……
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1.0517	1.005	1.0005	1.00005	……

由上表可以看出，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\longrightarrow 1$。

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x。$$

这里顺便指出：（1）e^x 的变化率仍等于 e^x；（2）因为 $e^x>0$，所以 $(e^x)'$ 恒为正，即函数 $y=e^x$ 总是随 x 的增大而增大的，而且 $x>0$ 时，x 越大，$(e^x)'$ 越大于 1，如

$$(e^x)'\Big|_{x=0}=e^0=1,$$

$$(e^x)'\Big|_{x=1}=e^1\doteq 2.7,$$

$$(e^x)'\Big|_{x=3}=e^3\doteq 20。$$

所以，函数的增长特别快。当 $x<0$ 时，x 负得越多，e^x 的变化率越小，比如

$$(e^x)'\Big|_{x=-1}=e^{-1}\doteq 0.37,$$

$$(e^x)'\Big|_{x=-3}=e^{-3}\doteq 0.05。$$

所以，函数的增长也越小。此性质在图 3—10 中也可看出。

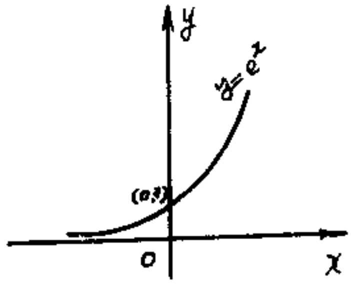


图　3—10

5.　对数函数的变化率公式

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}} \tag{3-6}$$

对数函数是指数函数的反函数，即

$$y=\ln x \qquad 可写成 \qquad x=e^y,$$

设 x 变化 Δx，y 变化 Δy，且 $\Delta x\to 0$，Δy 也 $\to 0$ 利用公式（3—5）有

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}\longrightarrow x_y'=(e^y)_y'=e^y=x$$

（x_y' 表示 x 对 y 的变化率）。所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{x_y'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x},$$

即

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}。$$

在此说明二点：（1）$\because x>0$，$\therefore \ln x$ 的变化率总是正，即 $\ln x$ 总是随 x 的增大而增大的；（2）由于 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，即 $x(>0)$ 越大时，$\ln x$ 的变化率愈小，所以 $y=\ln x$ 的曲线上升得愈来愈“平”，如图 3—11。

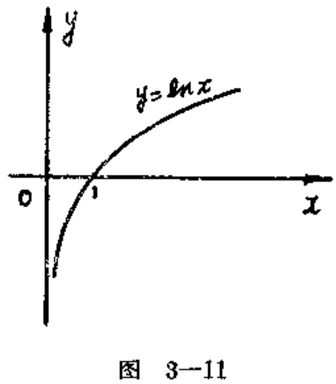


图　3—11

习题二

1. 求下列各函数的变化率；

(1) $y=x^{10}$； (2) $y=x^{\frac{3}{2}}$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x^3}$； (4) $f(t)=t^{0.3}$；

(5) $u=\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}}$； (6) $S=\frac{1}{\sqrt{t}}$；

(7) $y=x^5\cdot\sqrt[6]{x}$； (8) $S=\frac{\sqrt[3]{t}}{t^2}$；

(9) $y=10$； (10) $u=e^2$。

2. 求下列函数在指定点的变化率：

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$， 求 $y'(0)$，$y'(1)$；

(2) $y=e^x$， 求 $y'(2)$，$y'(\frac{1}{2})$；

(3) $f(x)=\ln x$， 求 $f'(1)$，$f'(2)$；

(4) $S=\cos t$ 求 $S'(0)$，$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$S'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$。

二、 变化率的基本运算规律

上面我们介绍了一些基本函数的变化率公式，但如只有这些公式，还不能满足解决实际问题的需要。因为实际问题碰到的函数常常是这些函数经过加减乘除或套叠面得到的。例如，$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$，以 v_0 为初速度的上抛物体的路程 $S=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，交流电流 $I=I_0\sin(\omega t+\varphi_0)$ 等等，都是一些基本函数经过一定的四则运算和套叠而得来。为要求它们的变化率，就要讨论变化率的基本运算规律。

1. 两个简单的运算规律

(1) 两个函数 $u(x)$，$v(x)$ 代数和的变化率

$$\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'} \tag{3—7}$$

设 $y=u(x)+v(x)$，当 x 有改变量 Δx 时，则 $u(x)$、$v(x)$ 分别有改变量 Δu、Δv，y 相应有改变量 Δy，即

$$\begin{aligned}\Delta y&=[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\Delta u+\Delta v,\end{aligned}$$

所以