



中学数理化读物



数 学

复习参考资料

乐山地区文教局翻印

中学数理化读物

数学复习参考资料

北京师范大学
附属实验中学

编 辑 说 明

为了帮助广大青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料以及习题集等不同种类的数学、物理、化学方面的书籍。

在编写时，注意从实际出发，参照中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学技术和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

目 录

第一章 数	1
§ 1 实数	1
§ 2 复数	13
复习思考题一	21
第二章 代数式	23
§ 1 整式	23
§ 2 因式分解	29
§ 3 分式	37
§ 4 根式	42
复习思考题二	51
第三章 方程与不等式	54
§ 1 方程的一般理论	54
§ 2 整式方程	60
§ 3 分式方程与无理方程	76
§ 4 方程组	77
§ 5 不等式	91
复习思考题三	102
第四章 直线形	106
§ 1 基本概念	106
§ 2 三角形	118

§ 3 四边形	142
复习思考题四	152
第五章 圆	156
复习思考题五	177
第六章 函数	180
§ 1 函数和它的图象	180
§ 2 指数与对数	191
复习思考题六	203
第七章 三角函数	206
§ 1 三角函数的定义和基本性质	206
§ 2 三角恒等式	234
§ 3 反三角函数与三角方程	252
§ 4 三角形的解法	263
复习思考题七	276
第八章 数列与极限	280
复习思考题八	298
第九章 排列、组合与二项式定理	299
复习思考题九	308
第十章 平面解析几何	309
§ 1 平面直角坐标系	309
§ 2 曲线与方程	319
§ 3 直线	328
§ 4 圆锥曲线	341
§ 5 坐标变换与二次曲线	363
§ 6 极坐标和参数方程	371
复习思考题十	383

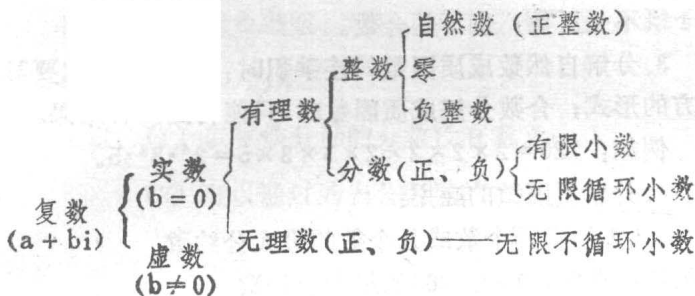
第十一章 空间图形	386
§ 1 直线和平面	386
§ 2 简单体	395
复习思考题十一	403
综合练习题	405
习题答案	416

第一章 数

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。

数是数学中主要的也是基本的概念之一，本章主要复习各种数的概念、性质及运算。

在中学数学的范围内，所学各种数的范围可归纳为如下数系表：



§ 1 实 数

复 习 提 要

一、自然数

自然数就是 1, 2, 3, …… , n, …… .

1. 自然数的性质：

(1) 自然数是无限多的；它有最小的数 1，没有最大的数；

(2) 任意两个自然数都可以比较大小，即自然数是有顺序的；

(3) 在自然数的范围内可以进行加法和乘法运算，当被减数比减数大的时候，可以进行减法运算。

2. 质数与合数：

质数：除 1 以外的自然数中，只能被 1 和这个数本身整除的数，叫做质数（或素数）。

合数：不但能被 1 及本身整除，还能被其它的数整除的自然数叫做合数。

1 既不是质数，也不是合数。

3. 分解自然数成质因数的连乘积时，相同的质数要写成乘方的形式；合数分解成质因数时，只能得到一种结果。

例如： $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ 。

4. 分解质因数的应用：

(1) 求两个数或几个数的最大公约数

例如：求 84，180，264 的最大公约数

先分解质因数： $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ ，

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5，$$

$$264 = 2^3 \times 3 \times 11；$$

这几个数的公约数含有 2 的最高次幂是 2^2 ，含有 3 的最高次幂是 3，此外再无其它公约数，因此，最大公约数是 $2^2 \times 3 = 12$ 。

(2) 求两个数或几个数的最小公倍数

例如：求 48，56，105，225 的最小公倍数。

先分解质因数： $48 = 2^4 \times 3$ ， $56 = 2^3 \times 7$ ， $105 = 3 \times 5 \times 7$ ， $225 = 3^2 \times 5^2$ ；

这些数的公倍数一定含有约数2、3、5、7，而且它们的幂指数至少等于在各分解式当中同一底的最高的幂指数，因此，最小公倍数应是 $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 25200$ 。

(3) 如果两个自然数的最大公约数是1，则称这两个数互质。例如，4和9是互质的。

二、有理数

1. 定义：设 p, q 为整数，若 $q \neq 0$ ，形如 $\frac{p}{q}$ 的数叫做有理数。

有理数包括正负整数、零以及正负分数，因为它们都可以表示成 $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) 的形式。

注意：(1) 以零作分母的分数没有意义；

(2) 可以通过约去公因数的方法，使得有理数 $\frac{p}{q}$ 的分子分母互为质数；

(3) 可以使有理数 $\frac{p}{q}$ 的分母均为正数。（如 $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ ）。

2. 性质：

- (1) 有理数中，既没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 有理数可以比较大小；
- (3) 在有理数范围内，可以进行加、减、乘、除（零不作除数）的运算。

3. 运算法则：

运 算 法 则	原 数		同 号		异 号	
	符 号	绝 对 值	符 号	绝 对 值	符 号	绝 对 值
加	保持原号	相 加	同绝对值较大者	相 减		
减	减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法作					
乘	+	相 乘	-	相 乘		
除	+	相 除	-	相 除		

注意：(1) 任何数加零或减零还等于原数。

(2) 零乘以或除以任何数都得零。

4. 乘方运算

(1) 定义： $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}}$

其中 a 是底数， n 叫做指数， a^n 叫作幂。

(2) 法则

i. $a = 0$ 时， $a^n = 0$;

ii. $a > 0$ 时， $a^n > 0$;

iii. $a < 0$ 时， n 为偶数， $a^n > 0$;
 n 为奇数， $a^n < 0$ 。

三、实数

1. 方根：

(1) 定义：若 $x^n = a$ ，则 x 叫做 a 的 n 次方根 (n 为自然数)，记作 $\sqrt[n]{a}$;

显然， $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 。

(2) 符号法则:

① 正数的偶次方根有两个值, 这两个值的绝对值相等, 而符号相反;

② 负数的偶次方根不存在;

③ 奇次方根的符号与被开方数的符号相同,

例如: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

④ 0 的方根是 0.

2. 算术根:

(1) 定义: 正数 a 的 n 次方根的正值叫做算术根, 符号仍是 $\sqrt[n]{a}$.

(2) 注意:

① 负数的奇次根可以用与它对应的算术根表示出来, 例如 $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$, 一般为 $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. ($a > 0$)

② 以后在实数范围内, 符号 $\sqrt[n]{a}$ 只表示算术根, 因此, 正数 a 的偶次方根的负值用 $-\sqrt[n]{a}$ 来表示。

3. 无理数: 无限不循环小数叫做无理数。

4. 实数: 有理数和无理数统称为实数。

5. 实数的性质:

(1) 任意两个实数可以比较大小;

(2) 在实数范围内, 可以进行加、减、乘、除运算, 在方根存在时, 可以进行开方运算。

6. 绝对值: 若 a 是实数, $|a|$ 叫做 a 的绝对值,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

7. 运算定律

a, b, c 为任意实数

$$a + b = b + a \quad (\text{加法交换律})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{加法结合律})$$

$$ab = ba \quad (\text{乘法交换律})$$

$$(ab)c = a(bc) \quad (\text{乘法结合律})$$

$$(a + b)c = ac + bc \quad (\text{乘法对加法分配律})$$

四、比和比例

1. 定义:

(1) 比: 两数 a, b 的商 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) 叫做 a 与 b 的比,

a 称做比的前项, b 称做比的后项。

(2) 比例: 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则称 a, b, c, d 四数成比例,

a 和 d 叫做比例外项, b 和 c 叫做比例内项。

2. 比例的性质:

(1) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $ad = bc$,

反之, 若 $ad = bc$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, (比例基本性质)

(2) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; (更比定理)

(3) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; (反比定理)

(4) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; (合比定理)

(5) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; (分比定理)

(6) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$; (合分比定理)

(7) 若 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$,

则 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$. (等比定理)

例题分析

例1 计算 $(-6) - (-3) + (-7) - (+5) + (+12)$.

解: 原式 $= -6 + 3 - 7 - 5 + 12 = 15 - 18 = -3$.

说明: 先化成代数和的形式, 然后利用加法的交换律与结合律把正数与正数合并, 负数与负数合并, 最后把合并后的正、负两数相加。

例2 计算 $16 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 12 \div 2 + (-60) \div (-4) + 18 \cdot (-2)^3 - (-3) \cdot 2$.

解: 原式 $= 16 \cdot 9 + 5 \cdot (-3) - 12 \div 2 + (-60) \div (-4) + 18 \cdot (-8) - (-3) \cdot 2 = 144 - 15 - 6 + 15 - 144 + 6 = 0$

说明: 1. 运算顺序应是先乘方、开方, 再乘、除, 最后加、减;

2. 相加时, 先合并相反数较为简便

例3 计算 $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \div 5 + \frac{3}{7} \div (-2) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

解: 原式 $= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{3}{14} + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} - \frac{1}{8}$
 $= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{3}{14} - \frac{2}{7}\right)$

$$= -\frac{3}{8} + \frac{5}{10} - \frac{7}{14} = -\frac{3}{8}.$$

说明：把分母间有倍数关系的分数先合并。

例4 计算 $2.75 - \left[\left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{5}{6} \right) + \left(-\frac{3}{8} \right) + 4\frac{2}{3} \right].$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - 4\frac{2}{3} \\ &= \left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) - \left(\frac{5}{6} + 4\frac{2}{3} \right) \\ &= 3\frac{5}{8} - 5\frac{1}{2} = -1\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

说明：如果算式中有小数也有分数，一般先把小数化成分数。

例5 计算 $-1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times (-0.2) \times 1\frac{3}{4} \div 1.4 \times \left(-\frac{3}{5} \right).$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= -\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{5} \right) \times \frac{7}{4} \times \frac{5}{7} \times \left(-\frac{3}{5} \right). \\ &= -\frac{3 \times 4 \times 1 \times 7 \times 5 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7 \times 5} = -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

说明：1. 乘除混合运算时，先化成连乘积；

2. 乘除运算中，带分数要化成假分数；

3. 连乘积的符号由乘数中负数的个数来决定；

有偶数个负数时，积为正；有奇数个负数时，积为负。

例6 计算 $\left[(-5)^2 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + 15 \right] \times 8 \div 7 + 1.$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \left[25 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + 15 \right] \times 8 \div 7 + 1 \\ &= (-15 + 15) \times 8 \div 7 + 1 = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

说明: 要注意防止 $(-5)^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = (-1)^2 \cdot (-3) = -3$

的错误.

例7 计算 $-2^2 + (-2)^2 - (-3)^2 - (-3)^3$.

解: 原式 $= -4 + 4 - 9 + 27 = 18$.

说明: 要注意 $-2^2 \neq (-2)^2$, $-(-3)^2 \neq +3^2$.

例8 求 $\frac{1}{(-0.3)^2}$.

解: $\frac{1}{(-0.3)^2} = \frac{1}{0.09} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

说明: 注意 $(-0.3)^2 \neq 0.9$.

例9 如果 a 是任意实数, 求 $\sqrt{a^2}$ 的值.

解:
$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

例10 设 a 是任意实数, 化简 $\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2}$.

解:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2} &= |a| + |1-a| \\ &= \begin{cases} 2a-1 & \text{当 } a \geq 1 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } 0 \leq a < 1 \text{ 时} \\ 1-2a & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned}$$

说明: 应注意不要产生 a 一定表示正数, 而 $-a$ 一定表示负数的错觉.

例11 求 $a = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})$ 的不足近似值和过剩近似值 (使误差小于 $\frac{1}{10^2}$).

解: $a = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{7}) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{21} = \sqrt{48} + \sqrt{84}$

查平方根表得:

$$6.928 < \sqrt{48} < 6.929$$

$$9.165 < \sqrt{84} < 9.166$$

$$\therefore 16.093 < \sqrt{48} + \sqrt{84} < 16.095$$

$$16.09 < a < 16.10.$$

即所求 a 的不足近似值是 16.09;

所求 a 的过剩近似值是 16.10.

例12 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 用反证法

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 那么 $\sqrt{2}$ 可表示成分数, 即 $\sqrt{2} =$

$\frac{n}{m}$ (其中 m, n 是自然数, 且 m, n 互质)

$$\therefore 2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}, \quad n^2 = 2m^2,$$

n^2 是偶数, n 也是偶数, 设 $n = 2p$.

那么 $m^2 = 2p^2$,

$\therefore m$ 也是偶数;

这样, m, n 都是偶数, 与 m, n 互质的假设相矛盾.

因此, $\sqrt{2}$ 不是有理数, 而是无理数.

说明: 读者可仿此证明 $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, 也是无理数.

习 题 一

1. 下列方程中, 哪些在自然数范围内有解?

(1) $x + 2 = 5$;

(2) $x - 5 = 6$;

(3) $x + 5 = 1$;

(4) $x + 2 = 2$.

2. 下列方程中, 哪些在有理数范围内有解?

(1) $5x + 4 = 0$; (2) $2x^2 + 7 = 0$; (3)

(3) $3x^2 - 2 = 0$; (4) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

3. 哪些自然数能满足下列关系?

(1) $x < 1$; (2) $x + 2 < 2$;

(3) $x < 8$; (4) $-2 < x < 6$;

(5) $x^2 - 3x - 18 = 0$; (6) $2x^2 - 15x + 7 = 0$.

4. 把下列各数分解成质因数:

(1) 1980; (2) 8475; (3) 40950.

5. 在五位数3427•里, 在•的位置上要填上哪些数字, 就能使这个数成为: (1) 2的倍数; (2) 3的倍数; (3) 4的倍数; (4) 5的倍数; (5) 8的倍数; (6) 9的倍数; (7) 10的倍数; (8) 11的倍数.

6. 求除以32、36、48时都余15的最小数.

7. 写出下列各数的相反数; 相反数的倒数; 倒数的相反数.

3; $\frac{1}{2}$; -5; $-\frac{4}{3}$.

8. 用不等号把下面三个数连接起来:

$-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, -0.666.

9. 用一个有一位整数的数和10的整数次幂的积表示下列各数.

(例如: 地球的表面积是510000000平方公里可表示成 5.1×10^8 平方公里)

(1) 地球的体积是1080000000000立方公里;