

實用無母數統計方法

Applied Nonparametric Statistics

顏月珠

——企管、醫療、環境及社會科學研究適用——



Y

C81
892

636609

實用無母數統計方法

——企管、醫療、環境及社會科學研究適用——



顏月珠著



90080469

現職：國立台灣大學財務金融學系副教授

實用無母數統計方法

(全一冊)

著 作：顏 月 珠

發 行：陳 昭 明

郵政劃撥：第 0163522-8 號 陳 昭 明

定 價：新台幣叁佰伍拾元 (NT\$350)

初 版：中華民國七十五年九月

版權所有 • 翻印必究

實用無母數統計方法

目 次

第一章 緒 論

1-1	統計資料的測量尺度	1
1-2	無母數統計學的意義	3
1-3	Chebyshev 不等式定理	8
1-4	一些主要的抽樣分配	10
1-4-1	常態分配	11
1-4-2	χ^2 分配	14
1-4-3	F 分配	16
1-4-4	t 分配	18
1-4-5	二項分配	20
1-4-6	歸納與比較	22
1-5	無母數統計方法的選擇	24

第二章 單一樣本的推論方法

2-1	適合度檢定	33
2-1-1	卡方檢定法	33
2-1-2	Kolmogorov - Smirnov 檢定法	34
2-2	獨立性檢定	42
2-3	聯立係數	48

I 實用無母數統計方法

2-4	結合指數	50
2-5	符號檢定法	52
2-6	Wilcoxon 符號等級檢定法	55
2-7	母體中位數 η 的區間估計	58
2-7-1	依符號檢定法	59
2-7-2	依 Wilcoxon 檢定法	60
2-8	母體比例 p 的估計與檢定	63
2-8-1	母體比例 p 的估計	63
2-8-2	母體比例 p 的檢定	65
2-9	隨機性檢定	72
2-10	Cox-Stuart 檢定法	77
2-11	母體分配函數之信賴帶的估計	81
2-12	與有母數統計方法之對應比較	84
2-12-1	Wilcoxon 符號等級檢定法 (或符號檢定法) 與 t 檢定法	84
2-12-2	中位數 η 之區間估計與算術平均數 μ 之區間估計	86
2-13	總 結	88

第三章 兩組獨立樣本的推論方法

3-1	齊一性檢定	99
3-1-1	卡方檢定法	99
3-1-2	Kolmogorov-Smirnov 兩樣本檢定法	100
3-2	Tukey 快速檢定法	103
3-3	中位數檢定法	105

3-4	兩母體比例差 $p_1 - p_2$ 的估計與檢定	108
3-4-1	兩母體比例差 $p_1 - p_2$ 的估計	108
3-4-2	兩母體比例差 $p_1 - p_2$ 的檢定	110
3-5	Mann-Whitney 檢定法	115
3-5-1	平均數的檢定	115
3-5-2	變異數的檢定	121
3-6	兩母體中位數差 $\eta_1 - \eta_2$ 的區間估計	122
3-7	Mood 檢定法	124
3-8	Moses 檢定法	128
3-9	Wald-Wolfowitz 連檢定法	130
3-10	Moses 極端反應檢定	134
3-11	Hollander 極端反應檢定	136
3-12	Fisher 真實檢定法	138
3-13	與有母數統計方法之對應比較	142
3-13-1	Mann-Whitney 檢定法與 t 檢定法	142
3-13-2	Moses 檢定法與 F 檢定法	145
3-13-3	$\eta_1 - \eta_2$ 的區間估計與 $\mu_1 - \mu_2$ 的區間估計	147
3-14	總 結	149

第四章 兩組有關樣本的推論方法

4-1	符號檢定法	161
4-2	Wilcoxon 符號等級檢定法	164
4-3	兩母體中位數差 η_D 的區間估計	168
4-3-1	依符號檢定法	168
4-3-2	依 Wilcoxon 檢定法	169

IV 實用無母數統計方法

4-4	McNemar 檢定法	171
4-5	與有母數統計方法之對應比較	176
4-5-1	Wilcoxon符號等級檢定法(或符號檢定法)與t 檢定法	177
4-5-2	中位數差 η_D 的區間估計與平均數差 $E(D)$ 的區間 估計	179
4-6	總 結	182

第五章 多組獨立樣本的推論方法

5-1	齊一性檢定的推廣	187
5-2	中位數檢定法的推廣	190
5-3	Kruskal-Wallis 檢定法	193
5-4	Jonckheere-Terpstra 檢定法	197
5-5	Dunn 之多重比較	201
5-6	與有母數統計方法之對應比較	205
5-6-1	Kruskal-Wallis 檢定法與一因子分類變異數分析 (ANOVA)之F 檢定法	205
5-6-2	Dunn 之多重比較與 Scheffe 之多重比較	208
5-7	總 結	212

第六章 多組有關樣本的推論方法

6-1	Friedman 檢定法	219
6-2	Hollander-Wolfe 之多重比較	222
6-3	Page 檢定法	224
6-4	Durbin 檢定法	226

6-5	Cochran 檢定法	229
6-6	與有母數統計方法之對應比較	232
6-6-1	Friedman 檢定法與二因子分類未重複實驗之 ANOVA 的 F 檢定法	233
6-6-2	Hollander-Wolfe 之多重比較與 Scheffe 之多重比較	235
6-7	總 結	240

第七章 相關與迴歸

7-1	Spearman 等級相關係數	245
7-2	Kendall 的相關分析	249
7-3	母數 τ 的區間估計	254
7-4	Olmstead-Tukey 檢定法	258
7-5	Kendall 的 W 檢定法	261
7-6	迴歸直線的配合	264
7-6-1	Brown-Mood 法	264
7-6-2	Theil 法	265
7-7	α 和 β 的檢定	267
7-7-1	Brown-Mood 法(一)	267
7-7-2	Brown-Mood 法(二)	268
7-7-3	Theil 法	269
7-8	β 的區間估計	273
7-9	兩條迴歸線的比較檢定	274
7-10	斜率母數差 θ 的區間估計	279
7-11	與有母數統計方法之對應比較	281

VI 實用無母數統計方法

7-11-1 Spearman 等級相關係數與 Pearson 積差相關係數.....	281
---	-----

7-11-2 迴歸係數 β 之檢定.....	284
------------------------------	-----

7-11-3 迴歸係數 β 之區間估計.....	287
--------------------------------	-----

7-11-4 兩條迴歸線的比較檢定.....	290
------------------------	-----

7-12 總 結.....	296
---------------	-----

參考書目.....	303
-----------	-----

統計附表.....	305
-----------	-----

第一章 緒 論

1 — 1 統計資料的測量尺度

統計方法處理的對象是統計資料，統計資料是指自然現象或社會現象的群體，在一特定時間及空間，依據群體內個體的特性，由點計或度量所獲得的資料。群體內個體所顯現的特性，可以是性質，也可以是數量。屬於性質的資料，通常是由點計而來；屬於數量的資料，通常是由度量而來。

由調查（點計或度量）而獲得的統計資料，其測量尺度分成四種，即

- | | | |
|------|---|-----------------------|
| 測量尺度 | { | ①名義尺度（Nominal Scale） |
| | | ②序列尺度（Ordinal Scale） |
| | | ③等距尺度（Interval Scale） |
| | | ④比例尺度（Ratio Scale） |

分述於下：

①名義尺度：又稱類別尺度，使用數字來辨認事物或類別，這種尺度的變數只告訴我們此一事物與他一事物不同，並不說明事物與事物之間差異的大小和形式。例如以 1 至 50 代表 50 位學生，以 1 至 7 代表彩虹的顏色，以 0、1 代表男、女等。以名義尺度表示的變數可以用來表示類別的不同，何者排在前面或何者排在後面，並沒有特別

的意義，故以 0、1 代表男、女或以 0、1 代表女、男皆可。

②序列尺度：又稱等級尺度或次序尺度，就一事物之好壞依某一特質之次序加以排列，例如以第一名、第二名……來表示成績的好壞，或以甲、乙、丙、……，A、B、C、……來表示學習的效果。以這種尺度表示的變數，不但各個體有名稱可區別，而且可排出各個體多少、大小或好壞的次序。序列尺度與名義尺度可稱初級測量尺度，是較次階層的測量尺度，二者之主要不同處係在於序列尺度有“方向次序”存在，即以序列尺度表示的變數可適用“ $a > b$ ， $b > c$ ，則 $a > c$ ”的規則。序列尺度亦只陳述個體與個體在特性的次序，並不陳述特性之差異的大小量，即只知第一名比第二名好，甲比乙好，A 比 B 好，但並沒有以數量表示前者比後者好多少。在心理學上的態度量表，受試者須就“極不滿意、不滿意、無所謂、滿意、極滿意”或“極不贊成、不贊成、無意見、贊成、極贊成”加以評定，亦是序列尺度之例。

③等距尺度：以此種尺度表示的變數，不但可以區別及排出大小順序外，還可算出差別之大小量。此尺度具有名義尺度的特性——區分類別，序列尺度的特性——大小順序，更有一個基本特性——相等單位，例如今天甲地氣溫 30°C ，乙地氣溫 20°C ，丙地氣溫 10°C ，則甲地氣溫減去乙地氣溫與乙地氣溫減去丙地氣溫之差相等，即

$$30^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C} = 20^{\circ}\text{C} - 10^{\circ}\text{C}$$

表示氣溫這一變數具有相等單位，亦即氣溫的測量尺度為等距尺度。在古典之統計學上所討論到的平均數、標準差、以及 Pearson 積差相關等統計方法，皆適用於以等距尺度表示的統計資料。

④比例尺度：以此尺度所表示的變數，除了可以說出名稱、排出順序、算出差距外，還可以表示出比例的關係。以比例尺度表示的變

數有一最重要的條件——有絕對零點 (Absolute Zero)，即數量是代表從自然原點 (Natural Origin) 起算的一段距離。例如身高、體重的測量尺度都屬此種尺度，0 公分、0 公斤為長度、重量的絕對零點，160 公分、60 公斤乃是自 0 公分、0 公斤起算的一段距離。比例尺度與等距尺度可稱高級測量尺度，是較高階層的測量尺度，尤其是比例尺度為最高階層的測量尺度。

1 — 2 無母數統計學的意義

統計學 (Statistics) 為蒐集、整理、陳示、分析與解釋統計資料，並可由樣本 (Sample) 推論母體 (Population)，使能在不確定情況下作成決策的科學方法。因統計學沒有固定的研究對象與領域，可知其為一種方法、一種工具，故統計學亦可稱為統計方法。

嚴格地說，一般統計學所討論的為古典統計學，例如依據 t 分配、 χ^2 分配、 F 分配等抽樣分配進行的估計或檢定，都須假設母體是常態分配。若假設與實際之母體有重大的偏差，便須使用與母體分配無關的方法。1930 年代末期，統計學家開始用不同的方法來尋找機率分配，其特點乃在於盡量減少或不修改其建立的模型，並用簡單的方法來找尋所想要的正確機率或至少接近於所要的機率而不修改其模型，這種新的統計理論 (方法) 稱為無母數統計學 (Nonparametric Statistics) 或無母數統計方法。

此統計方法有別於古典統計方法，古典的統計推論具有兩個特性：

① 以樣本的統計量 (Statistic) 推論特定母體的母數 (Parameter)。例如以樣本均數 $\bar{X}$ 推論母體均數 μ 、樣本比例 $\hat{p}$ 推論母體

4 實用無母數統計方法

比例 p 、樣本變異數 $\hat{S}^2$ 推論母體變異數 σ^2 、樣本相關係數 r 推論母體相關係數 ρ 等。

②常須假定母體分配為已知，有的更甚至須假設母體為常態分配，或還須假定其他有關母數的訊息，才能作推論。例如以樣本均數 $\bar{X}$ 推論母體均數 μ 時，須假定母體變異數 σ^2 為已知或母體為常態分配等。

古典的統計推論須在假設或其他有關母體的訊息已知下才能進行，如假設不成立或母體的訊息欠缺，則推論工作即告無效。更有些研究對象不能確切量化，即無數量意義，此時唯有採用無母數統計方法才能達到目的。

所謂無母數統計學，通常可以是不以母體之母數為對象而進行估計或檢定的統計方法，此種統計方法不限定母體的分配性狀，故又稱為自由分配統計學 (Distribution-free Statistics)。又此種統計方法常就按大小或出現先後順序排列的統計資料就可進行分析，故又稱之為順序統計學 (Order Statistics)。但習慣上一般皆稱其為無母數統計學或無母數統計方法。

綜合以上所述，可知無母數統計學具有下列五種特質：

- ①其所推論的對象可不限定母體分配的性狀。
- ②其所推論的常不是母體的任何母數。
- ③其常就按大小或出現先後順序排列的資料進行分析。
- ④當母體分配性狀為已知，其推論效率即不如假設母體已知的統計方法。
- ⑤就按大小或出現先後順序排列的資料，即可進行分析。常以中位數代表中心位置，以位差代表離散程度。

由於無母數統計方法適用於母體分配性狀未知、或母體常變動之

事件的推論，以及只知出現順序、等級而不知確切數值之事件的推論，故本統計方法在心理學、教育學、社會學、經濟學、品質管制、企業管理、醫學、遊憩管理、行政管理等的研究上，應用極廣。

由無母數統計方法的特質及適用的對象，可歸納出本統計方法的優點及缺點，分述於下：

優點：

- ①本統計方法的計算過程極為簡單。
- ②本統計方法適合於小樣本之研究，在特殊對象或特殊情況的研究上，不會由於樣本大小的限制，而無法作客觀之統計分析。
- ③本統計方法可用簡易的機率理論，來解釋有關的抽樣分配。
- ④本統計方法的限制條件較少，使用名義尺度、序列尺度，甚至僅有正負符號的資料，即可進行分析。

缺點：

- ①本統計方法適用的資料為較次階層之資料，即以名義尺度或序列尺度表示者，過於簡化，因而造成研究資料的浪費。
- ②本統計方法之分析結果的解釋力較有母數統計方法（Parametric Statistical Method）為低，即如母體分配為已知，傳統推論方法的效率較高。
- ③本統計方法缺乏廣泛應用的機率表。
- ④本統計方法僅能處理一因子的資料，而無法檢定變數間的“交互作用”（Interaction）。

但是無論如何，在小型個案式的研究上，以及母體分配型態未知或母體常變動之事件的推論上，無母數統計方法不失為一個理想而可以簡易使用的統計方法，亦是值得推廣而擴大使用的一種研究工具。

無母數統計方法雖然發展的歷史極短，但可使用的方法已有不少

，本書將介紹一些具有應用價值的方法，如：

1 一組樣本的推論方法：

- ① 適合度檢定 (Goodness-of-Fit Test)
- ② 獨立性檢定 (Test of Independence)
- ③ 聯立係數 (Contingency Coefficient)
- ④ 結合指數 (Index of Predictive Association)
- ⑤ 符號檢定法 (Sign Test)
- ⑥ Wilcoxon符號等級檢定法 (Wilcoxon Signed-ranks Test)
- ⑦ 母體中位數 η 的區間估計
- ⑧ 母體比例 p 的估計與檢定
- ⑨ 隨機性檢定 (Test for Randomness)
- ⑩ Cox-Stuart 檢定法
- ⑪ 母體分配函數之信賴帶的估計
(Confidence Band for the Population Distribution Function)

2 兩組獨立樣本的推論方法：

- ① 齊一性檢定 (Test of Homogeneity)
- ② Tukey 快速檢定法 (Tukey's Quick Test)
- ③ 中位數檢定法 (Median Test)
- ④ 兩母體比例差 $P_1 - P_2$ 的估計與檢定
- ⑤ Mann-Whitney 檢定法
- ⑥ 兩母體中位數差 $\eta_1 - \eta_2$ 的區間估計
- ⑦ Mood 檢定法
- ⑧ Moses 檢定法
- ⑨ Wald-Wolfowitz 連檢定法 (Wald-Wolfowitz Runs Test)
- ⑩ Moses 極端反應檢定 (Moses Test of Extreme Reactions)

- ⑪ Hollander 極端反應檢定
 - ⑫ Fisher 真實檢定法 (Fisher Exact Test)
3. 兩組有關樣本的推論方法：
- ① 符號檢定法
 - ② Wilcoxon 檢定法
 - ③ 兩母體中位數差 η_D 的區間估計
 - ④ McNemar 檢定法
4. 多組獨立樣本的推論方法：
- ① 齊一性檢定的推廣 (Extension of the Test of Homogeneity)
 - ② 中位數檢定法的推廣 (Extension of the Median Test)
 - ③ Kruskal-Wallis 檢定法
 - ④ Jonckheere-Terpstra 檢定法
 - ⑤ Dunn 多重比較 (Multiple Comparisons)
5. 多組有關樣本的推論方法：
- ① Friedman 檢定法
 - ② Hollander-Wolfe 多重比較
 - ③ Page 檢定法
 - ④ Durbin 檢定法
 - ⑤ Cochran 檢定法
6. 相關與迴歸：
- ① Spearman 等級相關係數 (Spearman Rank Correlation Coefficient)
 - ② Kendall 的相關分析
 - ③ 母數 τ 的區間估計
 - ④ Olmstead-Tukey 檢定法
 - ⑤ Kendall 的 W 檢定法

⑥ 迴歸直線的配合

⑦ α 和 β 的檢定

⑧ β 的區間估計

⑨ 兩條迴歸線的比較檢定

⑩ 斜率母數差 θ 的區間估計

(Confidence Interval for the Difference Between Slope Parameters)

這些無母數統計方法將在往後各章節裡詳加介紹，下兩節先介紹不易歸類的 Chebyshev 不等式定理，以及五個主要抽樣分配，以便於說明無母數統計方法的應用以及其與有母數統計方法的對應比較。

1 — 3 Chebyshev 不等式定理

描述樣本或母體分配的性狀，最常用的表徵數是算術平均數與標準差。一分配的標準差小，則大部分數值應集中於平均數附近，此時平均數的代表性強；若標準差大，則大部分數值不能如前者的集中而比較分散，此時平均數的代表性弱。蘇俄數學家 Chebyshev 首先提出 Chebyshev 不等式定理來說明一分配之平均數與標準差間的機率關係。此定理可適用於任何理論機率分配及實際次數分配，故為無母數統計學的一部分。

其定理為：假設隨機變數 X 的機率分配有平均數 μ ，變異數 σ^2 ，則對任一 $k > 0$ ，恒有下式：

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

此不等式的優點是其能適用於任何分配，應用範圍極廣，在品質管制、行銷管理等方面都可使用；但其結果不夠堅強，即由此不等式