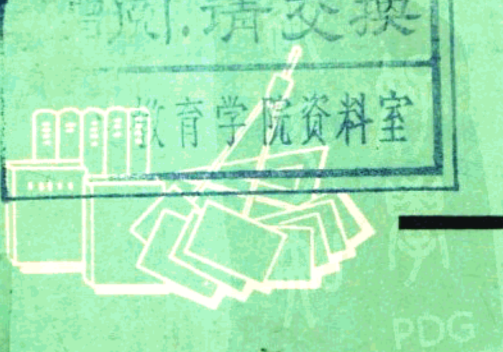
平面几何一题多解

包头市教育局教研室



说　明

平面几何是数学的一个重要分支，也是中学数学的重要教学内容。它是培养学生分析论证能力，逻辑思维能力，绘图能力的有力手段。学好平面几何对学习其他数学知识有着重要的作用。本书通过“一题多解”在分析论证平面几何问题上，总结了一些方法，特别在引辅助线问题上，归纳出一些规律，这对学好平面几何是有帮助的。为此，我们编辑出版，以供中学学生和中学教师及其他读者参考。

本书由包头四中高复祥和临河一中李琴堂二位同志编写的。在编写过程中，得到了包四中领导和数学组、临河文教局和临河一中等领导同志的大力支持：张效儒、秦崇师、马正春三同志曾为此书提出了宝贵意见。在此，我们表示深切的谢意。

陈林同志在本书的编写过程中，进行了具体的指导，并最后由他审核而定稿。

由于编写者的水平有限，时间仓促，书中缺点错误一定不少。敬请读者，特别是战斗在教学第一线的数学教师同志们，提出宝贵意见。

包头市教育局教研室

1978年10月

目　　录

一，引　言

本书是平面几何“一题多解”。对于一个平面几何问题的解答方法，基本上是根据几何图形的联系而得出的。由于几何图形的联系是多种多样的，这就决定了一个几何问题可以有多种解法；另外，由于几何与三角、代数联系密切，这也决定了一个几何问题可以有多种解法。

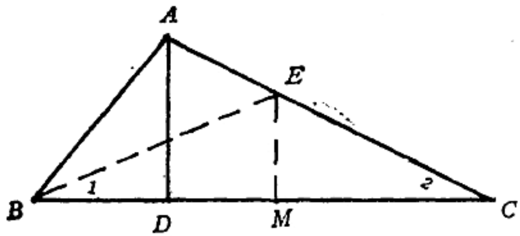
例如：

已知：$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle C$，$AD\perp BC$于D，M是BC的中点。

求证：$DM=\dfrac{1}{2}AB$

此题证$DM=\dfrac{1}{2}AB$，也可看作是要证$\dfrac{DM}{AB}=\dfrac{1}{2}$，考虑到$\angle ABC=2\angle C$的关系，有如下的证法：

证法一：见图一。



图一

作$\angle B$的平分线BE交AC于E，连结EM.

$\because \angle ABC = 2\angle C$(已知)，

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$.

$\because \quad M$是BC的中点，

$\therefore \quad EM \perp BC$（等腰三角形底边上的中线也是底边上的高）。

又 $AD \perp BC$(已知)，

$\therefore \quad EM \parallel AD$.

$\therefore \quad \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{AE}{EC}$(平行线截得比例线段定理).

$\because \quad BE$是$\angle ABC$的平分线，

$\therefore \quad \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$（三角形内角平分线的性质定理）.

$\therefore \quad \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{MC}{BC}$（更比定理）.

$\because \quad \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{1}{2}$（已知），

$\therefore \quad \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore \quad DM = \dfrac{1}{2}AB$.

若通过对图形的观察，考虑到AB的中点与中点M的联系或AC的中点与中点M的联系，便又有如下的两种证法：

证法二：见图二

取AB的中点E，连结EM、ED，则

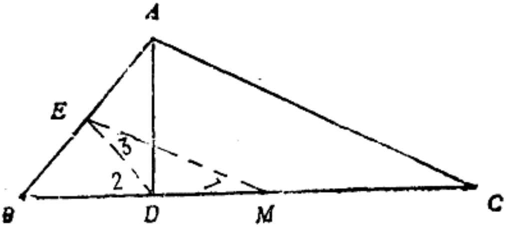


图 二

$EM \parallel AC$（三角形中位线定理）．

$\therefore\ \angle 1=\angle C$。（同位角）

$\because\ AD\perp BC$，

在$Rt\triangle ADB$中，

$\therefore\ ED=EB=AE$（直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半）．

$\because\ \angle 2=\angle B$（等腰三角形的两底角相等），

而 $\angle 2=\angle 1+\angle 3$，

又 $\angle 2=2\angle 1$

$\therefore\ \angle 1=\angle 3$。

$\therefore\ DM=DE$。

$\because\ DE=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore\ DM=\frac{1}{2}AB$．

证法三：见图三

取AC中点N，连结MN，则

$MN\parallel AB$（三角形中位线定理）

再作$NE\parallel BC$，

$\therefore \quad AE=EB$。

$\therefore \quad EBMN$是

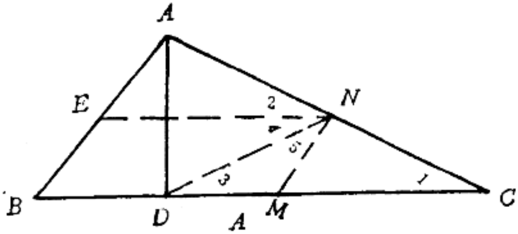


图 三

"▱"（两组对边分别平行的四边形是平四边形）。

连结DN，

在$Rt\triangle ADC$中，

$\because \quad AN=NC=DN$

$\therefore \quad \angle 1=\angle 3$。

$\because \quad \angle 1=\angle 2$（二直线平行、同位角相等），

$\therefore \quad \angle 2=\angle 3$。

又 $\angle 3=\angle 4$（二直线平行内错角相等），

但 $\angle 4+\angle 5=\angle B$（平行四边形的对角相等），

而 $\angle B=2\angle C$（已知），

$\therefore \quad \angle 4=\angle 5$。

$\therefore \quad \angle 5=\angle 3$。

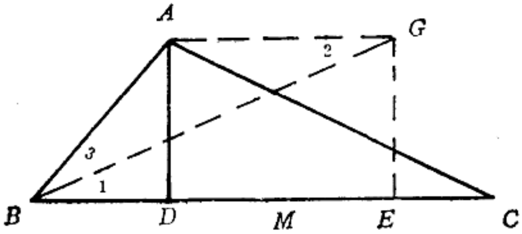
$\therefore \quad DM=MN$（在同一个三角形中等角对等边）。

$\because \quad MN=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore \quad DM=\frac{1}{2}AB$。

证法二是折半法，如果考虑加倍法，还有如下证法：

证法四：见图四



图四

在MC上截取$ME=DM$…………………①

分别过A、E两点作AD、BC的垂线AG、EG，设它们相交于G，连结BG，则

$ADEG$是矩形。

∵ $BM=MC$ （已知）…………②

由①+②得 $BE=DC$。

在 $Rt\triangle GEB$ 和 $Rt\triangle ADC$中，

∵ $BE=DC$，$GE=AD$，

∴ $Rt\triangle GEB\cong Rt\triangle ADC$

∴ $\angle C=\angle 1$（全等三角形对应角相等）。

∵ $\angle B=2\angle C$ （已知）。

∴ $\angle B=2\angle 1$。

又 $\angle B=\angle 1+\angle 3$，

∴ $\angle 1=\angle 3$

∵ $AG\parallel BC$

∴ $\angle 1=\angle 2$（二直线平行内错角相等）。

$\therefore \quad \angle 2=\angle 3$.

$\therefore \quad AB=AG$。

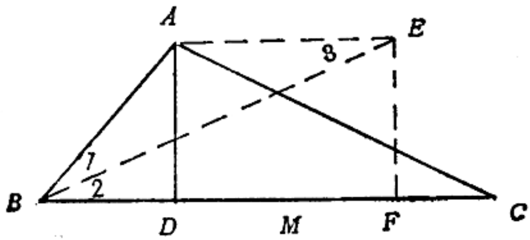
$\because \quad AG=DE$，　　$\therefore \quad DE=AB$。

$\because \quad DM=\frac{1}{2}DE$

$\therefore \quad DM=\frac{1}{2}AB$。

在证法四的启发下，又有如下证法：

证法五：见图五



图五

作$\angle B$的平分线BE，过A作$AE \parallel BC$，设BE、AE相交于E点，作$EF \perp BC$于F。

$\therefore \quad \angle 2=\angle 3$（二直线平行内错角相等）。

$\because \quad \angle B=2\angle C$，

$\therefore \quad \angle 2=\angle C$。

$\because \quad \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \quad \angle 1=\angle 3$。

$\therefore \quad AB=AE$。

$\because \quad AE \parallel BC$，$EF \perp BC$，$AD \perp BC$（已知）

$\therefore \quad ADFE$是矩形。

$\therefore\quad EF=AD$。

在$Rt\triangle EFB$和$Rt\triangle ADC$中，

$\because\quad \angle 2=\angle C, EF=AD$，

$\therefore\quad Rt\triangle EFB\cong Rt\triangle ADC$。

$\therefore\quad BF=DC$……………………①

$\because\quad BM=MC$，…………………②

①—②得　$MF=DM$。

$\because\quad DF=AE$，$AE=AB$，（已证）

$\therefore\quad DF=AB$。

$\because\quad DM=\frac{1}{2}DF$，

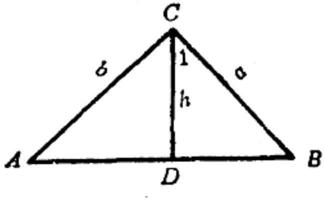
$\therefore\quad DM=\frac{1}{2}AB$。

又如：

已知：在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，$CD=h$，$BC=a$，$AC=b$

求证：$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

分析：因为$CD\perp AB$，所以图形中有三个直角三角形，且它们两两都是相似的。根据这个联系有如下证法。



图六

证法一：（图六）

在$Rt\triangle ACD$和$Rt\triangle ABC$中，

$\because\quad \angle A$公用

$\therefore\quad Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle ABC$。

$\therefore\quad \frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$（相似三角形对应边成比例）

就是 $\frac{b}{h}=\frac{AB}{a}$。

等式两边平方得 $\frac{b^2}{h^2}=\frac{AB^2}{a^2}$。

$\because$ $AB^2=AC^2+BC^2=b^2+a^2$（勾股定理），

$\therefore$ $\frac{b^2}{h^2}=\frac{b^2+a^2}{a^2}$.

整理 $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$。

如果考虑直角三角形中的边角关系，就又有如下证法：

证法二：图六

在$Rt\triangle ADC$中 $\because$ $\frac{h}{b}=\sin A$

平方得 $\frac{h^2}{b^2}=\sin^2 A$……………①

又 在$Rt\triangle BDC$中，

同理 $\frac{h^2}{a^2}=\cos^2\angle 1$，…………②

①+②得 $\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}=1$.

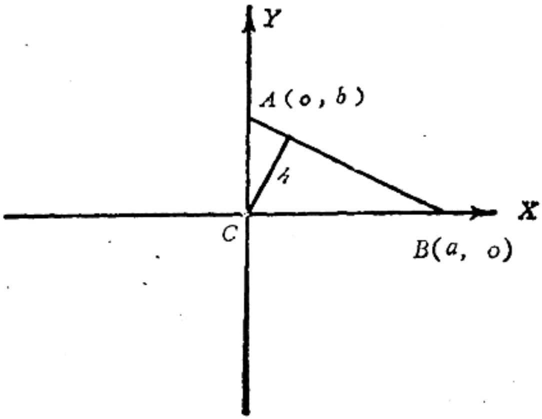
即 $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

如果以直角边AC、BC分别作x、y轴，建立直角坐标系，h就可看作原点c到直线AB的距离，根据这种联系还有如下证法：

证法三：图七

以BC、AC分别为x、y轴，建立直角坐标系，则$A(o,b)$ $B(a,o)$，$c(o,o)$，

直线AB的方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



图七

$\because$点c(o, o)到直线AB的距离为

$$h=\frac{|o+o-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},$$

整理 $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$。

从上面的例子可以看出，一个几何问题的多种解法，是被几何问题里的图形之间的多种多样的联系所决定的。因此，我们就去研究那些联系，利用那些联系，找出各种解法。

通过一题多解能够：

1、更广泛地复习所学知识，更好地灵活应用基础知识和提高论证演算技能。

一种解法和某些知识联系着，多种解法和许多知识联系

着．因此用多种方法解一个题就要应用和复习许多知识，从而就起到了牢固掌握基础知识、提高基本训练技能和灵活应用的作用。

2、能更有效的发展逻辑思维和提高分析问题的能力．

要用多种解法解一个题，就必须从各个不同角度进行反复研究，仔细推敲，把结论和已知条件联系起来，找出其间相互制约的关系，去寻求解题途径，从而使逻辑思维能力得到进一步发展和提高。

3、用多种方法解一个题，能深刻的理解解法的精神实质，便于真正掌握解法，找出最合理、最简捷的解题途径。

4、由于用多种方法解一个题，所涉及的知识很多，应用的技能和技巧也很多，这样就很自然地把所学的知识有机地联系起来。因而也使所学知识综合利用、融会贯通。

用多种方法解一个几何问题，必须对问题进行全面分析，根据问题各个部分的特点和各个部分之间的联系的特点，从结论出发，紧扣题目所给的条件进行反复分析，去寻找解题的途径。寻求各种解法并无一定之规可循，是因题而异。一般地说，寻求多种解法，大致可以归纳以下几种方法：

1、通过平移、旋转、摺转等图形的变换来寻求多种解法。

2、通过对图形中的有关线段的截长、补短、加倍、折半或角的加倍、折半、和、差来寻求多种解法。

3、通过引不同的辅助线来寻求不同的解法。

4、根据一种解题方法的精神实质，结合习题的特点分析，可以找出各种解法，

5、通过图形等积变换来找多种解法。

6、根据直角三角形的边角关系，任意三角形的边角关系（正、余弦定理）来寻求多种解法。

对于一个数学问题（其它问题也一样），是要求最合理，最简捷、迅速地得到正确的解答。因而不要对每一个问题都追求多种解法，事实上这既不可能也没有必要。一般说来，应该根据不同的题目和各种解法的不同作用，选择具有典型意义的习题较为合适。

其次，任何方法都是为了一定目的服务的。因此，不要盲目陷入追求多种解法中而浪费时间和精力。应用多种解法，要想想是为了达到全面复习知识呢？还是发展思维和提高分析问题的能力呢？还是加深理解，掌握问题解法的实质呢？总之，必须有明确的目的。

现举五十三个例题加以介绍：

例　　题

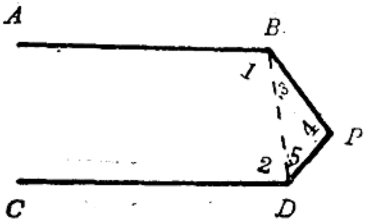
（一）直线形

例1. 已知：$\angle B+\angle P+\angle D=360^\circ$

求证：$AB\parallel CD$

分析：欲证$AB\parallel CD$，从图形来看，不具备引用平行线判定定理的条件，只有通过引辅助线这一“桥梁”，才能具备引用定理的条件。所以只要连结已知点B、D即可。

证法一：见图1—（1）



1-1

连结BD。

根据三角形内角和定理

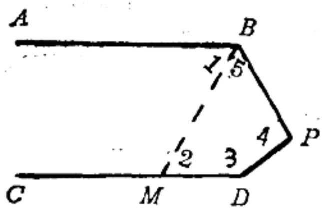
$\angle 3+\angle 4+\angle 5=180^\circ$……………①

$\because$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=360^\circ$(已知)………②

$\therefore$ ②−① $\angle 1+\angle 2=180^\circ$。

$\therefore$ $AB\parallel CD$(同旁内角互补二直线平行)。

证法二：见图1—〈2〉



1-2

过B点任意引直线BM交CD于M。

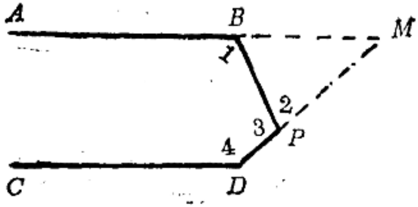
$\because \angle 1+\angle 5+\angle 3+\angle 4=360^\circ$(已知)，

又 $\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=360^\circ$(多边形内角和定理)，

$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$

故　$AB \parallel CD$（内错角相等二直线平行）。

证法三：见图 1—〈3〉



1-3

延长DP交AB的延长线于M，则

$\angle M=\angle 1-\angle 2$（三角形外角定理）。

又　$\angle 2=180^\circ-\angle 3$，

$\therefore\quad \angle M=\angle 1-(180^\circ-\angle 3)$。…………①

①式两边加$\angle 4$得

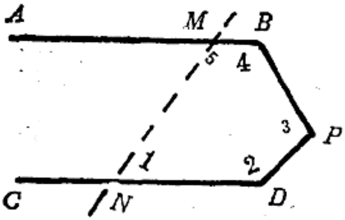
$\angle M+\angle 4=\angle 1+\angle 3+\angle 4-180^\circ$。

$\because\quad \angle 1+\angle 3+\angle 4=360^\circ$（已知），

$\therefore\quad \angle M+\angle 4=180^\circ$。

$\therefore\quad AB \parallel CD$（同旁内角互补二直线平行）。

证法四：见图 1—〈4〉



1-4

任意引一直线MN交AB、CD于M、N。则

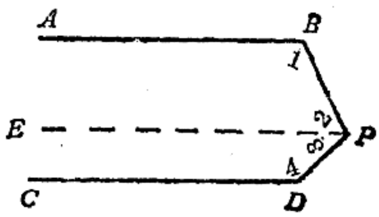
$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=540°,$$

又 $\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$(已知),

∴ $\angle 1+\angle 5=180°$.

∴ $AB\parallel CD$。

证法五：见图Ⅰ—〈5〉.



1·5

过P点引$PE\parallel AB$。

∴ $\angle 1+\angle 2=180°$(二直线平行同旁内角互补).

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$(已知),

∴ $\angle 3+\angle 4=180°$.

于是 $PE\parallel CD$。

∴ $AB\parallel CD$(同平行于一直线的二直线平行)

此题所引辅助线虽各有不同，各具特色，但这些不同的辅助线中，如作深入细致的研究，就可以发现它们息息相关，互相制约，它们实质上是一条线，只是在位置上有所不同。证法二——四所引的辅助线是证法一的一般情形，其目的就是为了具备平行线判定定理的条件。

引辅助线在几何证题中是使问题得到解决的关键，起着