

第一篇 流体力学

目 录

第一章 流体的性质

§ 1-1	单 位	1-2
§ 1-2	因 次	1-7
§ 1-3	纯数, 有因次或无因次的常数和变数	1-10
§ 1-4	流体的粘性	1-12
§ 1-5	气体的粘度	1-15
§ 1-6	理想气体的膨胀和压缩	1-18

第二章 液体和气体的平衡

§ 2-1	流体中的压力和压力分布	2-2
§ 2-2	液体在重力下的平衡	2-3
§ 2-3	大 气 的 平 衡	2-5
§ 2-4	在其他力场中流体的平衡	2-8

第三章 流体动力学

§ 3-1	连 续 性 方 程	3-2
§ 3-2	不稳定流动的加速度	3-5
§ 3-3	伯 奴 利 方 程	3-9
§ 3-4	奈维-斯托克斯方程	3-14
§ 3-5	动 力 相 似 性	3-23
§ 3-6	层 流 与 湍 流	3-29
§ 3-7	流体的层流流动	3-31
§ 3-8	层流切应力、热传导与扩散	3-35
§ 3-9	湍流切应力、湍流传热和湍流传质	3-39

§ 3—1 0	粘性流体在光滑管和粗糙管中 流动时的压力降	3—46
§ 3—1 1	水力学直径	3—51
§ 3—1 2	流动分离与涡旋的形成	3—54
§ 3—1 3	物体和流体作相对运动时的阻力	3—58

第四章 能量平衡在流体运动中的应用

§ 4—1	管截面上的速度分布	4—1
§ 4—2	流体运动中的能量守恒	4—5
§ 4—3	粘性流体通过直管时的摩擦损失	4—7
§ 4—4	管道的突然扩大和收缩	4—9
§ 4—5	钢包出流	4—12
§ 4—6	流量的测量	4—14
§ 4—7	高炉冷风流量计的误差及校正	4—25

第五章 固定散料层

§ 5—1	比表面积和形状系数	5—2
§ 5—2	空隙度	5—5
§ 5—3	颗粒的平均粒度	5—7
§ 5—4	散料层的有效重	5—9
§ 5—5	流体流经散料层的压力降 ——札沃隆可夫方程	5—13
§ 5—6	流体流经散料层的压力降 ——柯曾尼(Kozeny)方程	5—18
§ 5—7	流体流经散料层的压力降 ——埃根(Ergun)方程	5—24
§ 5—8	散料层压力降方程的应用	5—27

第六章 边界层

§ 6-1 边界层厚度	6-1
一 边界层的物理厚度	6-3
二 边界层的位移厚度	6-3
三 边界层的动量厚度	6-5
§ 6-2 边界层的动量积分方程	6-6
§ 6-3 平板上湍流边界层的厚度	6-11
一 管内湍流流动的速度分布	6-12
二 平板上湍流边界层厚度	6-14
三 平板上纯湍流边界层的阻力系数	6-15
§ 6-4 平板上的复合边界层	6-16
§ 6-5 普朗特边界层方程及边界层的精确解	6-18
§ 6-6 管口的流动	6-26

第七章 因次分析与模型理论

§ 7-1 因次分析的基本用途	7-1
§ 7-2 无因次数	7-1
§ 7-3 白金汉定理 (π 定理)	7-3
§ 7-4 不可压缩、惰性、粘性液体的无因次方程	7-2
§ 7-5 单位的基本性质的数目	7-1'
§ 7-6 模型理论	7-20

第三章 流体动力学

随着航空工程、空间事业、动力机械和水利工程的发展，流体力学在近代获得很大发展，并且应用范围愈来愈广，当前不仅从事航空、空间各方面工作的工程技术人员需要丰富的流体力学知识，而且从事石油、化工和冶金各方面工作的工程技术人员也需要一定的流体力学方面的知识。由于血液在血管内的流动，眼球内房水的流动等也需要用流体力学这一有用工具进行研究，所以医学科研人员也需要具有流体力学方面的知识，因此这是一门应用范围很广的基础课程。

不同专业的技术工作者对流体力学中感兴趣的内容也不相同，冶金工程技术人员感兴趣的是流体力学在冶金工程中的应用，例如流体在管道内的流动，流体通过阀门，流体与物体的相对运动，流体通过散料层等等。这些课题与冶金工程技术人员日常工作密切相关。但就冶金工程更为复杂的是在冶金设备，例如高炉转炉、烧结机等中，下述三种现象往往同时存在。

- (1) 动量传递 — 由于流体具有粘性，在流动过程中产生动量传递；
- (2) 热量传递 — 表现为传热；
- (3) 质传递 — 这是冶金设备^内流体成分的不同，或由于化学反应引起设备内部各处流体成分的不同而引起的质传递。

冶金过程就是动量传递、热量传递和质传递三个单项过程的综合。了解流体在空间内各点的参数（速度、方向、密度等）是研究传热和传质的第一步。所以在讨论传热和传质之前必须熟悉流体力学的内容。

在研究流体运动时可以列出有关的微分方程，但是除了在不特别的最简单的边界条件下，很难获得通解。于是为了简化讨论，经常引进一些不带来很大误差的假设。

首先注：假设所讨论的流体的密度是不变的，这一点用于液体是准确的，因为液体的热膨胀系数很小，而且在一般的压力下体积变化极小。对气体来说，如果允许有10%的误差，那末就可以将不可压缩气体的方程用来讨论速度大约为150米/秒或密度改变大约1000米的气体。如果气体的流速为50米/秒，或密度差为100米，那末将它看成是不可压缩的气体所带来的误差大约是1%。在冶金过程中，除了顶吹转炉的氧枪等个别情况外，气体速度一般小于50米/秒，因而可以作不可压缩流体看待。其次，在分析问题时应尽量将三维空间的问题简化为一维流动，例如讨论管流阻损时，大多数情况下得到沿管长度上的阻力损失也就足够了，至于管截面上速度分布的不均匀可以不考虑。另外，作用于流体每个质点的力，这一类力称为体积力或物体力，重力是其中一种，对气体来说，由于它的密度较小，因而可以略去。对液体来说，如果流动是近似水平的，即流程上各点的密度差别不大，那么也可以略去，但当有明显密度差别时则不可略去。如果流程上各点的密度差虽然较大，但液体的压力很大，那末略去重力也不会引入很大误差。

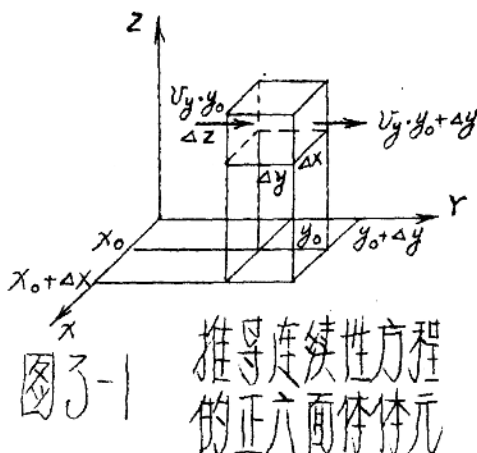
即使如此，有些问题的求解依然是不可能的，此时往往就求助于实验，但如何将庞大的冶金设备原型缩小为实验室中的一个模型，又能使模型实验中取得的数据可以推广到原型而不带来错误，这又是一个需要研究的问题，这将在模型理论中讨论。综上所述，流体动力学的内容极为丰富，本章主要讨论流体动力学的基础知识。

§3-1 连续性方程

在流动的流体中截取一个正六面体微元，它的体积为 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ，如图(3-10)所示。单位时间内穿过左侧与 y 轴相垂直的界面进入正六面体的流体质量为 $(\rho v_y)_0 \Delta x \Delta z$ ， v_y 是流体在 y 方向上的分速度，括号外的脚注 0 是指 $y = y_0$ 处的 ρ 与

U_y 值。

单位时间内自右侧相应面元流出的流体的质量是 $(\rho U_y)_{y_0+\Delta y} \Delta x \cdot \Delta z$ 。在均质流体中，由于流体是连续的，质量速度 ρU 在 y 方向上的分质必然是 y 轴的连续函数。于是 ρU_y 可以台劳级数展开，并只取前两项，得：



$$(\rho U_y)_{y_0+\Delta y} = (\rho U_y)_{y_0} + \Delta y \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y}$$

(3-1)

因此单位时间内自右侧流出和自左侧进入的流体质量之差可以写为：

$$\begin{aligned} & (\rho U_y)_{y_0+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z - (\rho U_y)_{y_0} \Delta x \cdot \Delta z \\ &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} = \Delta V \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3-2)$$

同样，在 x 方向和 z 方向上，可得

$$(\rho U_x)_{x_0+\Delta x} \cdot \Delta z \cdot \Delta y - (\rho U_x)_{x_0} \Delta z \cdot \Delta y = \Delta V \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} \quad (3-3)$$

$$(\rho U_z)_{z_0+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y - (\rho U_z)_{z_0} \Delta x \cdot \Delta y = \Delta V \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} \quad (3-4)$$

设单位时间内进入正六面体微元的流体的质量为 M_1 ，流出的为 M_2 ，则

$$M_1 - M_2 = \Delta V \left[\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} \right] \quad (3-5)$$

但 $M_1 - M_2$ 必须与正六面体微元之中质量的减少相等，即

$$M_1 - M_2 = -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta V \rho) = -\Delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-6)$$

以式 (3-6) 代入式 (3-5)，得微分方程形式的连续方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} \right) \quad (3-7)$$

3-4

如果流体的密度 ρ 在流动中没有改变, 即 $\frac{d\rho}{dt} = 0$, 则式 (3-7) 可改写:
$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (3-8)$$

式 (3-7) 和式 (3-8) 称为连续性方程, 前者适用可压缩流体, 后者适用不可压缩流体。连续性方程是质量守恒定律在流体力学中的应用。实用中如果以固体壁或另一种流体作为界面, 则在使用连续性方程时要求由固体壁构成的边界上不应有间隙, 两种流体则不发生掺混, 否则会产生错误。

设有一根截面可变的管子, 中心线为直线, 所以可将此管子放在 x 轴上, 当不可压缩流体流经此管子时, 虽然是一维流动, 由连续性方程式 (3-8) 得 $\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0$,

又仿式 (3-3) 得

$$(U_x)_{x_0+\Delta x} \cdot S_{x_0+\Delta x} - (U_x)_{x_0} \cdot S_{x_0} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0$$

所以

$$(U_x)_{x_0+\Delta x} \cdot S_{x_0+\Delta x} = (U_x)_{x_0} \cdot S_{x_0}$$

$$\text{即 } U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2 \quad (3-9)$$

式 (3-9) 中 U_1 显然是管子截面 S_1 上的平均速度, U_2 也应这样理解。所以流体作层流 (即一层层地平滑流动) 运动时, 管子内的流线如图 (3-2) 所示。由图 (3-2) 可见, 在管子截面较大的地方, 流线与流线的间距较宽, 而在管子的狭窄处, 间距较窄。由式 (3-9) 知, 管子狭窄处流体的流速快, 宽阔处流速慢。所以不可压缩流体作层流运动时在

流线稀疏的地方流速较慢,
流线密集的地方流速较快。

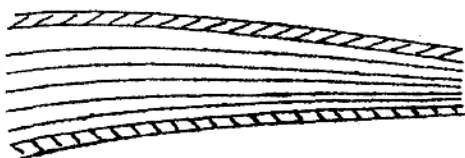
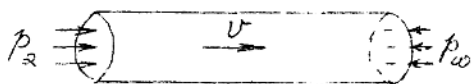


图 3-2 层流运动时的流线图

§3-2 不恒定流动的加速度

设流体没有粘性，管水平安放，则流体流动时不受重力和粘性力的影响。管截面面积为 S ，两端分别有压力 p_a 和 p_w ，如图(3-3)。 p_a 推动流体截面 α 和 ω 间的流体向前运动，而压力 p_w 则阻滞流体运动。得



$$(p_a - p_w)S = \Delta p \cdot S = F = m \frac{dv}{dt}$$

图 3-3 作用在管段两端的压力

当计算 $\frac{dv}{dt}$ 时要看到加速度 $\frac{dv}{dt}$ 由两部分组成：

(1) 当管截面可变时，由式(3-9)知，在截面小的地方流速大，在截面大的地方流速小。不可压缩流体在进入狭窄区域时将被加速，所以流体的速度是位置的函数。

(2) 当流体的速度不仅随位置而改变，同时也随时间而变，即处在不恒定流动时，管边任一点上流体的速度与时间有关。

为了区别这两种情况，我们确定：

(1) 实质加速度，即 $\frac{dv}{dt}$ ，指流体质点在运动中实际受到的加速度，这是上述两种情况的综合。

(2) 当地加速度，在一维流动中写作 $\frac{\partial v}{\partial t}$ ，指管边某点上流体速度随时间而改变的变化率，相当上述第二种情况，在恒定流动时 $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ 。

(3) 迁移加速度，在一维流动中写作 $v \frac{\partial v}{\partial x}$ ，指流体质点在改变位置时引起的速度变动，相当上述第一种情况。

略去管边截面上的速度差，并且假定流体不可压缩，则流体如同一个刚体 $m = Sl\rho$ (l 为长度) 那样地运动，为了获得相应加速度而需要的力是

$$F = S \Delta p = m \frac{dv}{dt} = Sl\rho \frac{dv}{dt}$$

或
$$\Delta p = \rho l \frac{dv}{dt}$$

如果截面积是常数，则因截面积变动而引起的加速度为零，在这种情况下

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3-10)$$

所以在截面积不变，流体无粘性时只有在非恒定流动，即 $\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$ 时，压差才不等于零。如果截面积可变，不可压缩流体从截面积较大的地方流向截面缩口时流体必须逐步加速，虽然，沿截面长度上的速度变化率愈大，即 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 愈大，则加速度也愈大。此外，流体的加速还与流体的速度有关，我们设想如果 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 相同，流体的速度愈快，也即流体质点自速度较低到速度较高所需的时间愈少，则流体的加速度愈大，所以在截面可变的一维恒定流动中

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-11)$$

式(3-11)只适用恒定流动。在截面可变的一维非恒定流动中，那末式(3-10)和式(3-11)两种因素都起作用，因此式(3-10)和式(3-11)只是两个特例，在更一般的情况下，实质加速度是当地加速度和迁移加速度两者之和，如下：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-12)$$

式(3-12)也可用微分推导而不详述它的物理意义。因为速度 v 是 x 和 t 的函数，即 $v = f(x, t)$ ，则 v 的全微分为

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad (3-13)$$

将式(3-13)两端除以 dt ，得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

上式与式(3-12)相同。

图(3-4)是二维流动，在A点流体质点的速度为 v_A ，在B点为 v_B ，自A点到B点需时间 dt ，如果A点和B点相当接近，即 Δx 和 Δy 足够小，那么流体质点在B点的速度在 x 方向上的分

速度可以下式表示, 即

$$V_{Bx} = V_{Ax} + \Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial V_x}{\partial y} = V_{Ax} + V_x dt \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y dt \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

或 $\frac{V_{Bx} - V_{Ax}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (3-14)$

在不稳定流动中还要计入
迁移加速度 $\frac{\partial V_x}{\partial t}$, 于是二维流
动中在 x 方向上的实质加速度
是两者的和, 即:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

(3-15)

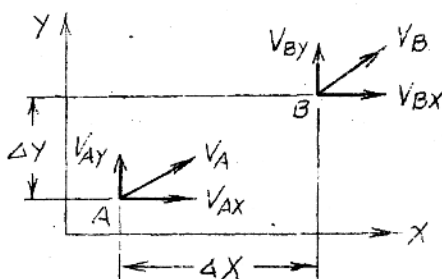


图 3-4 二维流动的加速度

同样在 y 方向上可得

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (3-16)$$

如果将图(3-4)中的 x 轴顺时针旋转以使 x 轴与 V_A 重合, 则 $V_A = V_x$, $V_y = 0$, 于是式(3-15)与式(3-12)相同, 成为一维流动。

对更一般的三维不稳定流动来说, 三个分速度 V_x 、 V_y 和 V_z 都是时间和三个坐标轴的函数, 即 $V_x = f(x, y, z, t)$, 余类推。仿照上述, 可得

$$dV_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} dt + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz$$

将两端除以 dt , 得

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (3-17)$$

同样可得

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad (3-18)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (3-19)$$

在 §3-1 节中曾提到了流线, 现在需要区别质点运动的流线与迹线的概念, 在同一时刻, 流线上各点的切线均为流体质点的速度的方向。而在相续时刻内将同一质点在空间内的位置连接起来所得流体质点的运动轨迹称为迹线。流线与迹线是不同的概念, 在稳定流动中两者重合, 在不稳定流动中两者并不重合。在三维空间中, 流线的方程为由三个常微分方程组成的方程组:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (3-20)$$

因为流线是同一时刻内各质点的速度的方向, 所以在式(3-20)中, 四个参变量 x, y, z, t 里, t 只是一个固定参变量。与此相反, 迹线在三个方向上的投影 dx, dy 和 dz 代表流体质点在时间 dt 内位移的投影, 即

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt.$$

由此得到由三个常微分方程组成的方程组, 参变量 x, y 和 z 是 t 的函数。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} &= dt \\ \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} &= dt \\ \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} &= dt \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

两组方程存在原则上的差异, 所以流线与迹线不相重合。在稳定流动的情况下, 任何时刻的速度分布不变, t 相当一个固定参变量, 此时方程式(3-20)与方程式(3-21)完全相同, 于是流线和迹线重合。

用几何图形也可解释上述。图(3-5)表示通过同一点 M 的流线 $MM_1, M_2M_3, \dots$ 和迹线 $M'M''M''' \dots$, 在绘制流线时选择一个时间, 然后固定, 引 M 点的速度向量 V , 在 V 上截取线段 $\overline{MM_1}$, 经过 M_1 点引同一时刻的速度向量 V_1 , 在 V_1 上截取线段 $\overline{M_1M_2}$,

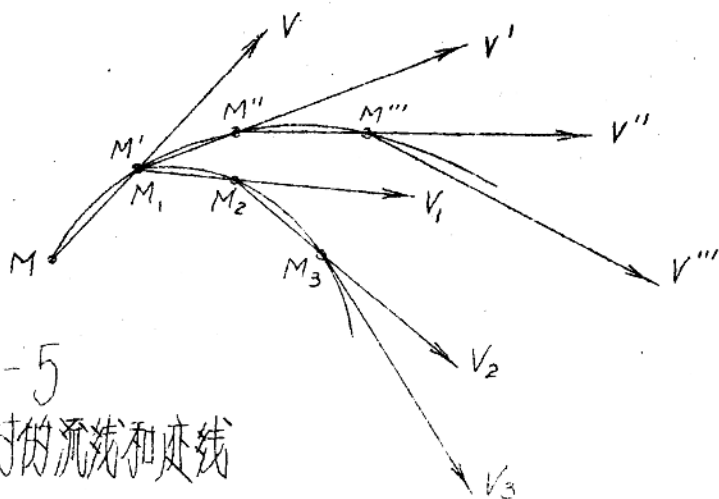


图 3-5
非恒定流动时的流线和迹线

再经过 M_2 点引 V_2 , 如此继续下去绘成流线, 所有这些都是在同一固定瞬时所作的。至于迹线的画法则不同, 利用起始时间的任意性, 也有 M 点开始, 在 M 点上截取线段 $\overline{MM'} = \overline{MM_1}$, 由于是非恒定流动, 虽然 M' 点与 M_1 点重合, 在经过时间 Δt 后, M' 点的速度 V' 已经不同于在 t 时刻 M_1 点的速度 V_1 , 因此迹线与流线在空间就分开了。如果是恒定流动, 尽管时间改变了 Δt , 但在 M' 和 M_1 点上的速度是相同的, 同样其他各点的速度也相同, 于是迹线和流线相重合。

由流线所构成的管称为流管, 因为在所考虑的瞬时, 质点不能偏离流线, 流体就好像在一个固体壁围成的管中流动一样。

§3-3 伯努利方程

将式 (3-12) 中的实质加速度代入牛顿运动方程可以得到一个无粘性流体的基本运动方程, 即伯努利方程。

我们设想在流动流体的流线方向上截取一个圆柱体微元, 截面积为 dS , 长为 ΔL , 如图 (3-6) 所示, 左侧端面作用力为 p , 右侧端面作用力为 $p + \Delta L \cdot \frac{\partial p}{\partial L}$, 两力的方向相反, 作用在此流体微元上的合力为 $-dS \cdot \Delta L \cdot \frac{\partial p}{\partial L}$, 又 $dS \cdot \Delta L = dV$, 则合力为 $-dV \frac{\partial p}{\partial L}$, 流体微元的重量为 ρdV , 重量在流动方向上的分力

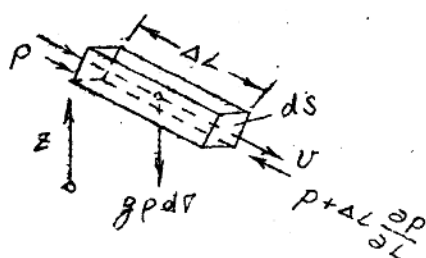


图 3-6 流动流体中微元的受力分析

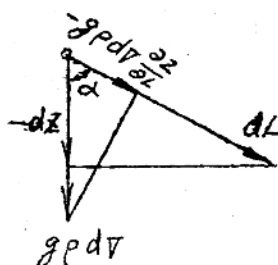


图 3-7 重力的分力

是 $g\rho dV \cos\alpha = -g\rho dV \frac{\partial z}{\partial L}$ (参看图 3-7), 这里向上 z 值为正, 向下为负。设流体无粘性, 即 $\mu=0$, 按照牛顿定律, 流体微元所受到的力必等于流体微元的质量与加速度的乘积, 即

$$-dV \frac{\partial p}{\partial L} - dV g\rho \frac{\partial z}{\partial L} = \rho dV \frac{dv}{dt}$$

消去 dV , 并以式 (3-12) 代入, 得

$$\frac{\partial p}{\partial L} + g\rho \frac{\partial z}{\partial L} + \rho v \frac{\partial v}{\partial L} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3-22)$$

无粘性流体的流动总是恒定流动, 于是 $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, 再将 $\rho v \frac{\partial v}{\partial L}$ 写作 $\frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial L}$ 。如果 $\rho = \text{常数}$, 则沿流线将式 (3-22) 积分, 得

$$p + g\rho z + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{常数} \quad (3-23)$$

这就是伯努利方程。如果在流管上任意取两个截面, 其位置各为 α 和 ω , 则

$$p_\alpha + g\rho z_\alpha + \frac{\rho}{2} v_\alpha^2 = p_\omega + g\rho z_\omega + \frac{\rho}{2} v_\omega^2 \quad (3-24)$$

以 ρg 除上式, 得到

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{常数} \quad (3-25)$$

式 (3-25) 中每一项的因次都是长度, z 是基准面以上的高度, 基准面可以在后选择, 离基准面愈高, 流体的位能愈大, z 称为位压头。 $v^2/2g$ 相当水自喷嘴向上喷射, 当其初速为 v 时所

能达到的高度，所以称为速度头或动压头。 $P/\rho g$ 是指密度为 ρ 的液体在重力场中，当能得到静压力 P 时所需的液柱高度，称为压力头或静压头。

式(3-23)是沿流线积分得到的，因此由伯努利方程可知，静压头、动压头和位压头之和沿流线不变，但当流线的表示各不相同的时候，式(3-23)中的常数将因流线而异。假如流体来自同一洞口，或都来自静止液体，则所有流线的常数具有相同数值。对静止液体来说，常数是洞口中液体压力 P_0 与 $\rho g z$ (z 为液柱高度)之和。液体在截面可变的管边中流动，由式(3-9)知，截面狭窄处流速快，管边中的流体来自同一洞口时，由上述可知，流速大的部位压力低，反之亦然。

现在利用伯努利方程讨论下述三个问题。

(1) 洞口中液体在重力作用下的射流。

洞口中液体的自由面 A 和射流 B 都暴露在大气中(图3-8)，它们所受的大气压力相互抵消， z_A 和 z_B 分别为自由面 A 和射流中心线 B 到基准面的距离，所以 $z_A - z_B = h$ 。此外自由面 A 的下降速度比 B 处的射流速度小得多，可以假设 $U_A = 0$ 。 B 处射流的流线都来自同一洞口，由伯努利方程得

$$gz_B + \frac{1}{2} U_B^2 = gz_A$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{2} U_B^2 = gh, \quad U_B = \sqrt{2gh} \quad (3-36)$$

式(3-36)说明在 B 处质点的射流速度与同一个质点自由降落高度 h 所能达到的速度一样。当自由面 A 处的质点所具有的位能 ρgh ，在 B 处转化为动能 $\frac{1}{2} \rho U^2$ 。由此可见，伯努利方程是能量守恒在流体运动中表现的一种形式。

(2) 容口内有余压时的射流

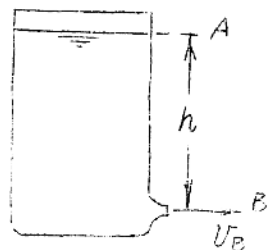


图3-8 容口中液体的射流

液体置于密封塔内，塔内压力 p_1 大大高于大气压力 p_0 ，为此A和B两点间的速度差可以不计，并且忽略A点外的速度，由伯努利方程得

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_B^2 = \frac{p_1}{\rho}$$

$$\text{即 } v_B = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_0)}{\omega}} \quad (3-37)$$

如果把 $\frac{p_1 - p_0}{\omega}$ 看作单位体积

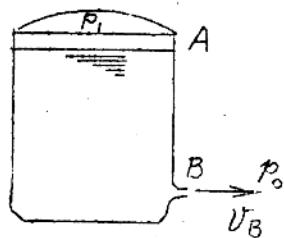


图3-9 容器内有
余压时的射流

的重量为 ω ，而且上下两端的压力差为 $(p_1 - p_0)$ 的液柱的高度 h ，那末式(3-37)也可写为 $v = \sqrt{2gh}$ 。

假如液体可压缩，利用式(3-37)可以估计一个极限速度，流体的速度在小于此极限速度时带来的误差不大于指定范围，由于液体可压缩，在承受压力 p_1 到 p_0 的压力变化时密度相应发生改变，设允许密度变化 $\Delta\rho/\rho$ 不超过 0.01，由式(1-24)得

$$p_0 = K \cdot \rho_0^\gamma, \quad p_1 = K \cdot \rho_1^\gamma$$

$$\text{即: } \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^\gamma \approx \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0}.$$

在指定了 $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ 的范围后，可以确定 Δp 值如下

$$\Delta p = \gamma \cdot p_0 \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = 1.405 \times 1.0133 \times 10^5 \times 0.01 = 1418.5 \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^{-2}$$

在上述压力范围内，取空气密度的平均值为 $1.23 \text{ 千克} \cdot \text{米}^{-3}$ 。

由式(3-37)得：

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2305} = 48 \text{ 米/秒}.$$

这就是说，在流速不超过约 50 米/秒时可压缩流体的密度变化不超过 0.01，可作为不可压缩流体看待。如果允许密度变化 $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ 不超过 0.1，则极限速度 $v = 48 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1} \times \sqrt{10} \approx 150 \text{ 米/秒}$ ，亦就是说，

可压缩流体流速为150米/秒时，密度变化达10%，如作为不可压缩流体看待，带来误差为10%。

(3) 流体被障碍物阻挡

在一个以速度 U_0 均匀流动的流体里设置一个障碍物，则障碍物前方的流体受阻挡而向各方向分散以绕过此物体，见图(3-10)，在阻挡区域中必有一点，在该点流体变为静止，称该点为驻点。该驻点压力为 P_1 ，流体未受障碍物干扰时的压力和速度分别为 P_0 和 U_0 ，在通过驻点的流线上应用伯努利方程，得

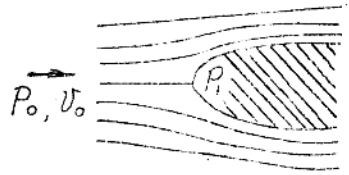


图3-10 流体流经障碍物

$$\frac{P_1}{\rho} + 0 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} U_0^2$$

$$\text{即: } P_1 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \quad (3-38)$$

上式中 $\frac{1}{2} \rho U_0^2$ 称为动压力， P_0 称为静压力， P_1 称为驻点压力或总压力，动压和静压之和为总压。比托(Pitot)管是测量总压的一种结构简单的仪口，如图(3-11)所示。

用一根弯曲管插入流体，并使其与流线平行，流体在管端受到阻挡，管端开有小孔，总压 P_1 通过此孔传送到压力显示仪口。在工业炉窑中为了测量每米料柱的压力损失，常在炉窑

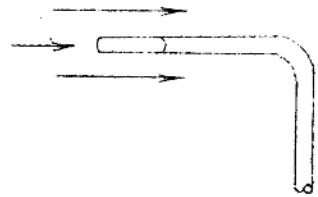


图3-11 比托管

炉内开有2-3排测压孔，如果测量总压，需将类似比托管的仪口插入到炉墙以内，显然任何仪口在炉墙以内的寿命是不长的，因此一般利用开孔取样测量，所测得的压力自然为静压。将沿长度上2-3排的压力绘成图形称为静压力分布，对分析工业炉窑过程很有帮助。

伯努利方程的实际应用将在第四章中进一步讨论。

§3-4 奈维-斯托克斯方程

本节讨论粘性可压缩流体的运动方程，这是一个更一般的方程，称为奈维-斯托克斯方程。

图(3-12)是从流体中截取的微小正六面体微元，它的一角与坐标原点 O 重合，边长各为 ΔX 、 ΔY 和 ΔZ ，相应与 X 、 Y 和 Z 轴重合。六面体微元的每一面上承受了正压力和切应力。由于微元正六面体的面积都很小，因而认为每一面上承受的正压力都是定值。与无粘性流体不同的是在流体的任一点上，在若干方向上的正压力是不同的，所以一般来说正压力在三个坐标轴上的分力 P_x 、 P_y 和 P_z 是不同的。

在任一点上的切应力都相等，在同一面上切应力的改变略而不计。同时认为 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 。

以下逐点讨论：

