马克思　恩格斯　列宁　斯大林

论　数　学

（试编本）

《数学参考资料》增刊

1977.5

目　　录

第 一 部 分
关于数学发展的一般问题

（一）

数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系

纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第35页

我们的几何学是从空间关系出发，我们的算术和代数学是从数量出发，这些数量和我们的地球上的关系相适应，……。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第245页

数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定

形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第35页

几何学的结果不外是各种线、面、体或它们的组合的自然特性，这些组合大部分早在有人类以前就已在自然界中出现了（放射虫、昆虫、结晶体等等）。

恩格斯：《〈反杜林论〉的准备材料》见《马克思恩格斯全集》第20卷第664页

为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线、a和b与x和y，即常数和变数；只是在最后才得到悟性的自由创造物和想象物，即虚数。甚至数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。矩形绕自己的一边旋转而得到圆柱形，在产生这样的观念以前，一定先研究了一定数量的现实的矩形和圆柱形，即使它们在形式上是很不完全的。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第35页

线、面、角、多角形、立方体、球体等等观念都是从现实中得来的，只有思想上极其幼稚的人，才会相信数学家的话：第一条线是由点在空间中的运动产生的，第一个面是由线的运动产生的，第一个体是由面的运动产生的，如此等等。甚至语言也反对这种看法。一个具有三度的数学图形叫做体，corpus solidum，就是说在拉丁文中这个词甚至是指

可以触摸到的物体，所以这个名称绝不是从悟性的自由想象中得来的，而是从确凿的现实中得来的。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第37页

全部所谓纯数学都是研究抽象的，它的一切数量严格说来都是想象的数量，一切抽象在推到极端时都变成荒谬或走向自己的反面。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第249页

这样一部机器就象几何学上的线或面一样是决不可能制造出来的，但是它按照自己的方式起了象这些数学抽象所起的同样的作用：它表现纯粹的、独立的、真正的过程。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第207页

数学以及其他科学把物体、现象、生活的一个方面抽象化。

列宁：《亚里士多德‹形而上学›一书摘要》（1915年）见《列宁全集》第38卷第422页

有人认为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不可能发明微积分。

列宁：《俄共(布)第十一次代表大会》（1922年3月28日）见《列宁全集》第33卷第282页

几何学得出自己的定理是，它从具体对象中抽象出来，把各种对象看成没有具体性的物体，它所规定的不是某些具

体对象之间的具体关系，而是没有任何具体性的一般物体之间的相互关系。

斯大林：《马克思主义和语言学问题》（1950年6月）第16页

（二）

数学是从人的需要中产生的

和其他一切科学一样，数学是从人的**需要**中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第35页

必须研究自然科学各个部门的**顺序的发展**。首先是**天文学**——游牧民族和农业民族为了定季节，就已经绝对需要它。天文学只有借助于**数学**才能发展。因此也开始了数学的研究。——后来，在农业发展的某一阶段和在某个地区（埃及的提水灌溉），而特别是随着城市和大建筑物的产生以及手工业的发展，**力学**也发展起来了。不久，**航海和战争**也都需要它。——它也需要数学的帮助，因而又推动了数学的发展。这样，科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第162页

几何学起源于土地丈量术。

马克思：《数学手稿》（1975年版）第206页

古代留传下欧几里得几何学和托勒密太阳系，阿拉伯人留传下十进位制、代数学的发端、现代的数字和炼金术；基督教的中世纪什么也没留下。在这种情况下，占首要地位的，必然是最基本的自然科学，即关于地球上物体的和天体的力学，和它同时并且为它服务的，是数学方法的发现和完善化。这里有了一些伟大的成就。在以牛顿和林耐为标志的这一时期末，我们见到这些科学部门已经在某种程度上完成了。最重要的数学方法基本上被确定了；主要由笛卡儿制定了解析几何，由耐普尔制定了对数，由莱布尼茨，也许还由牛顿制定了微积分。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第9页

机器在十七世纪的间或应用是极其重要的，因为它为当时的大数学家创立现代力学提供了实际的支点和刺激。

马克思：《资本论》第一卷第386—387页

从十七世纪中叶以来，几乎所有的大数学家，只要他们研究应用力学，并把它从理论上加以阐明，就都是从磨谷物的简单的水磨着手的。

马克思致恩格斯（1893年1月28日）见《马克思恩格斯全集》第30卷第319页

（三）

数学的应用

正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出

来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，作为世界必须适应的外来的规律而与现实世界相对立。社会和国家方面的情形是这样，**纯数学**也正是这样，它在以后被**应用**于世界，虽然它是从这个世界得出来的，并且只表现世界的联系形式的一部分——正是**仅仅因为这样**，它才是可以应用的。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第35—36页

数学的应用：在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已经比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中＝0。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第249页

由于数学公式的严密性，很容易使人忘掉其前提的假设性。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第118页

数学的抽象也只是在纯粹的数学中才是无条件地有效的。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第246—247页

如果我们有正确的前提，并且把思维规律正确地运用于这些前提，那末结果必定与现实相符，正如同解析几何的演算必定与几何作图相符一样，尽管二者是完全不同的方法。但是遗憾的是，这种情形几乎从来没有，或者只是在非常简

单的运算中才有。

恩格斯：《〈反杜林论〉的准备材料》
见《马克思恩格斯全集》第20卷第661—662页

从事计算的悟性——**计算机**！——数学演算同纯逻辑演算的滑稽的混合。数学演算适合于物质的证明，适合于检验，因为它们是建立在物质直观（尽管是抽象的）的基础上的；而纯逻辑演算只适合于推理证明，因此没有数学演算所具有的实证的可靠性——而且其中许多还是错误的！**求积分的机器**。

恩格斯：《〈反杜林论〉的准备材料》
见《马克思恩格斯全集》第20卷第663页

法国人巨大的功绩是使筑城法和精确的数学原理相结合，规定了各线之间适当的比例，并根据筑垒地点各种不同的地形条件运用科学理论。

恩格斯：《筑城》见《马克思恩格斯全集》第14卷第339页

土星光环从望远镜里观察似乎是连续的物质。数学家用计算证明这是不可能的，并且光谱的分析证实了根据计算而得出的结论。

列宁：《唯物主义和经验批判主义》（1960年版）
第276页

任何建设工作，任何国家工作，任何计划工作，没有正确的计算是不可想象的。而没有统计，计算是不可想象的。

斯大林：《俄共（布）第十三次代表大会》
见《斯大林全集》第6卷第189页

（四）

数学与辩证思维

数学：辩证的辅助工具和表现方式。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第3页

要确立辩证的同时又是唯物主义的自然观，需要具备数学和自然科学的知识。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第8页

在涉及概念的地方，辩证的思维至少可以和数学计算一样地得到有效的结果。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第70页

只是在数学——一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学——中，才有抽象的同一性及其与差异的对立，而且甚至在这里也在不断地被扬弃。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第192页

黑格尔关于某些数学公式所说的话，在这里也是适用的。他说，普通常识认为不合理的东西，其实是合理的，而普通常识认为合理的东西，其实是不合理的。

马克思：《资本论》第3卷第878页

数学本身由于研究变数而进入辩证法的领域，而且很明显，正是辩证哲学家笛卡儿使数学有了这种进步。辩证思维对形而上学思维的关系，和变数数学对常数数学的关系是一样的。这丝毫不妨碍大多数数学家只在数学领域中承认辩证法，也不妨碍他们中相当多的人完全按照旧的有局限性的形而上学方式去进一步运用通过辩证道路所得到的方法。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第119页

数学家们在做起来对自己方便的地方，都不动声色地在自己的计算中引用$x^0=1$，或引用分子和分母相等的分数，即等于一的分数，因而在数学上运用了包含在一中的多。但是，如果有人以一般的表达方式向他们说，一和多是不能分离的、相互渗透的两个概念，而且多包含于一中，正如一包含于多中一样，他们就会皱起鼻子，并做起鬼脸来。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第238页

任何一个量的无，本身还是有量的规定的，并且仅仅因此才能用零来运算。一些数学家泰然自若地以上述方式用零进行运算，即把零当作一定的量的观念而用于运算，使它和其他量的观念发生量的关系，但是他们在黑格尔那里读到这被概括为：任何某物的无，是某个**特定的**无，就大惊失色了。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第239页

数学方面的情形也是一样。一般形而上学的数学家，都十分高傲地夸耀他们的科学的成果是绝对无法推翻的。但是

这些成果也包括一些虚数在内，从而这些虚数也就带有某种实在性。只要我们习惯于给$\sqrt{-1}$或第四度空间硬加上某种在我们的头脑以外的实在性，那末我们是否再往前走一步，是否也承认神媒的神灵世界，这就没有什么特别大的重要性了。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第44页

归纳法的全部混乱是英国人〔造成〕的——惠威尔，归纳科学包围着纯粹数学的〔科学〕，因而设想出了归纳和演绎的对立。关于这一点，不论旧的或新的逻辑学，都一无所知。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第205页

到上一世纪末，甚至到1830年，自然科学家和旧的形而上学还相处得相当不错，因为真正的科学当时还没有超出力学——地球上的和宇宙的力学的范围。虽然如此，高等数学已经引起了混乱，因为高等数学把初等数学的永恒真理看作已经被克服的观点，常常作出相反的判断，提出一些在初等数学家看来完全是胡说八道的命题。固定的范畴在这里消失了；数学走到了这样一个领域，在那里即使很简单的关系，如单纯的抽象的量之间的关系、恶无限性，都采取了完全辩证的形式，迫使数学家们既不自愿又不自觉地成为辩证的数学家。数学家们为了解决这种矛盾，为了调和高等数学和初等数学，为了弄清楚在他们看来是不可否认的结果的那些东西并不是纯粹荒诞无稽的东西，以及为了合理地说明那研究无限的数学的出发点、方法和结果所采用的牵强说法、无聊

诡计和应急方法，是最滑稽可笑不过的了。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第181页

每一种事物都有它的特殊的否定方式，经过这样的否定，它同时就获得发展，每一种观念和概念也是如此。微积分中的否定不同于从负根得出正的乘方时的否定。这一点和其他一切一样，是应该学习的。仅仅知道大麦植株和微积分属于否定的否定，既不能把大麦种好，也不能进行微分和积分，正如仅仅知道靠弦的长短粗细来定音的规律还不能演奏提琴一样。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第140页

辩证法内容的这一方面的正确性必须由科学史来检验。……

在数学中，正和负，微分和积分。

列宁：《哲学笔记》（1974年版）第407页

自然科学的辉煌成就，它向那些运动规律可以用数学来处理的同类的单纯的物质要素的接近，使数学家遗忘了物质。“物质消失了”，只剩下一些方程式。

列宁：《唯物主义和经验批判主义》（1960年版）第308页

（五）

数学定理触犯了阶级斗争中的阶级利益也会遭到强烈的反对

这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的（尤其在几何应用上是惊人的）结果。人们就这样把自己神秘化了，对这新发现评价更高了，使一群旧式正统派数学家更加恼怒，并且激起了敌对的叫嚣，这种叫嚣甚至在数学界以外产生了反响，而为新事物开拓道路，这是必然的。

马克思：《数学手稿》第88页

后来，他（注：指侨居美国的德国社会党人亨·威·法比安）攻击我对数学的辩证解释，并且告到马克思那里，说我污蔑了$\sqrt{-1}$。

恩格斯致卡尔·考茨基（1884年4月11日）
见《马克思恩格斯全集》第36卷第136页

有一句著名的格言说：几何公理要是触犯了人们的利益，那也一定会遭到反驳的。自然历史理论触犯了神学的陈腐偏见，引起了并且直到现在还在引起最激烈的斗争。

列宁：《马克思主义和修正主义》（1908年）
见《列宁选集》第2卷，第1页

难怪有人早就说过，如果数学上的定理一旦触犯了人们的利益（更确切些说，触犯了阶级斗争中的阶级利益），这些定理也会遭到强烈的反对。

列宁：《又一次消灭了社会主义》（1914年）
见《列宁全集》第20卷第194页

第 二 部 分

数学——辩证的辅助工具和表现方式

(一)

关于数学公理

数学上的所谓公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的规定。数学是数量的科学；它从数量这个概念出发。它给这个概念下一个不充分的定义，然后再把未包含在定义中的数量所具有的其他基本规定性，当作公理从外部补充进去，这时，这些规定性就表现为未加证明的东西，自然也就表现为数学上无法证明的东西。对数量的分析会得出这一切公理式的规定，即数量的必然的规定。斯宾塞说得对：我们所认为的这些公理的**自明性是承继下来的**。这些公理只要不是纯粹的同义反复，就是可以辩证地证明的。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第235页

数学公理是数学不得不从逻辑那里借用的极其贫乏的思想内容的表现。它们可以归结为以下两个：

1.整体大于部分。这个命题纯粹是同义反复，因为从数量上来看的部分这一观念，一开始就确定地和整体这个观念有关，就是说，“部分”直接表示数量上的“整体”是由几

个数量上的"部分"组成的。这个所谓的公理明确地陈述了这一点，但我们没有因此前进一步。这一同义反复，在一定程度上还可以这样来证明：整体是由几个部分组成的东西；部分是集合好几个才构成整体的东西；因此部分小于整体——在这里重复的空洞更强烈地显示了内容的空洞。

2.如果两个数量各等于第三个数量，那末它们也彼此相等。正象黑格尔所已经证明过的，这个命题是逻辑可以担保其正确性的那种结论，因此它已经得到证明了，虽然是在纯数学之外得到证明的。其他关于相等和不相等的公理只是这个结论的合乎逻辑的扩展。

不论在数学或在其他方面，这样贫乏的命题都是无济于事的。为了继续前进，我们必须汲取真实的关系，来自现实物体的关系和空间形式。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第36—37页

不能从任何数学公理中构造出三角形、球形，或者推论出毕达哥拉斯定理……。

恩格斯：《〈反杜林论〉的准备材料》
见《马克思恩格斯全集》第20卷第663页

如果在我们中间，例如数学公理对每个八岁的小孩都似乎是不言而喻的，都无需用经验来证明，那末这只是"积累起来的遗传"的结果。要用证明来给布须曼人或澳大利亚黑人把这些公理解说清楚，却未必可能。

恩格斯：《自然辩证法》（1971年版）第244页

两类经验：外在的、物质的经验，以及内在的经验——

思维规律和思维形式。思维形式一部分也是通过发展继承下来的（例如，数学公理对欧洲人来说，是不证自明的，而对布须曼人和澳大利亚黑人来说，肯定不是这样）。

恩格斯：《〈反杜林论〉的准备材料》
见《马克思恩格斯全集》第20卷第661页

人的实践活动必须亿万次地使人的意识去重复各种不同的逻辑的格，以便这些格能够获得公理的意义。这点应注意。

列宁：《哲学笔记》（1974年版）第203页

人的实践经过千百万次的重复，它在人的意识中以逻辑的格固定下来。这些格正是（而且只是）由于千百万次的重复才有着先入之见的巩固性和公理的性质。

列宁：《哲学笔记》（1974年版）第233页

（二）

初等数学也充满着矛盾

但是连初等数学也充满着矛盾。例如，A的根应当是A的幂，这就是矛盾，可是毕竟$A^{\frac{1}{2}}=\sqrt{A}$。

恩格斯：《反杜林论》（1970年版）第119页

数学问题。看来，再没有什么东西比四则（一切数学的要素）的差别具有更牢固的基础。然而，乘法一开始就表现为一定数目的相同数量的缩简的加法，除法则为其缩简的减