数学物理方法讲稿

（下 册）

西安交通大学
计算数学教研室编

1976. 2.

目 次

第五章　变分法

本章的目的是叙述与变分计标有关的一些微分方程的近似解法。众所周知，力学的基本问题除了微分方程外，受所谓最小原理支配。例如，力学系统的平衡位置就是相应于它的位能（势能）最小的位置。所以该力学系统的微分方程边值问题的定解问题一般说等价于求一函数，这函数使得表示系统位能的积分为极小。在数学上，微分方程边值问题等价于求积分极小的问题——变分问题，而已知的微分方程作为这个变分问题的 Euler 方程。解变分问题，除了用 Euler 方程外，还可应用直接方法；由于上述的等价性，这些方法同时也是解微分方程边值问题的方法——数学物理直接方法。本章的目的就是叙述这类方法，其中最有名的是 Ritz 方法和 Галёркин 方法。在这里我们也顺便指出，与上章分离变易法相联系起来，也常利用变分方法来求分离变易法的核心问题——所为结的本征问题；同时我们也指出，变分方法非但本身是微分方程的一种近似解法，而且在它的基础上又发展建立了另一种微分方程近似解法——有限元法，这我们将在第七章加以介绍。以上我们都是从微分方程求解观点来看的；正如一开始所说数学物理许多问题都和变分法相关联，它乃是初等的极大极小理论的推广，形成数学分析的一个专门分支；不指出这一点就不可能全面理解变分法的内容。

§1．变分法和数学物理方程

在本章引子中我们已经说了：变分法是函数极值理论的发

展。它通过引进函数的变分建立泛函变分的概念化变分问题为微分方程问题，即建立微分方程问题与变分问题之间的联系。在这一节就是介绍这方面的内容。仅就一些最简单也是最重要的微分方程有关的变分问题来谈。通过这些例子可以得到关于变分法的基本情况和方法的足够明晰的概念（其中也包括变分基本概念的介绍）。因此，这节的目的是介绍变分法的一些思想，这些思想对于用直接方法来说是特别重要的。

变分法也是起源于求极值或定常值的问题。不过它的目标是求泛函的极值而不是求有限个自变数的函数的极值。所谓泛函，是指一个另或一个因变数，它的值依赖于一个或多个函数（以整个函数为变另！），而不是依赖于若干个离散的变数。换句话说，泛函的定义域是一些函数组成的一个集合，而不是坐标空间的一个区域；泛函定义域中的函数就叫做它的可取函数（或曰容许函数），泛函的可取函数全体（即它的定义域也就叫做该泛函的可取函数空间。因之，泛函乃是函数的函数，更为广泛的函数之意。变分法所牵涉到的是确定泛函的极大或极小值，一般说来即定常值的问题；就是要在可取函数的区域中求出这样一个变另函数，在这函数上泛函取所要求的定常值或极值，然后就可以定出这个极值。微积分中通常的极值问题一般并不牵涉到绝对的极大极小，而只是对极值点邻近的诸函数值而言的相对的极大极小；与此类似，我们将也只是对极值变另函数某一邻域内的变另函数而言泛函的相对极值。为此目的，我们必须定义某一函数的邻域的概念，这首先就得引进函数空间中距离的概念。通常，我们也以两函数差的绝对值取作其间距离的度另；这样，我们说函数 u_1 在函数 u 的 ε 邻域内是指在可取函数的定义域内恒有 $|u-u_1|<\varepsilon$．变分法的基本问题就是要在某一给定的可取函数空间中求出所给泛函的一个

（或几个）变量函数，在其上泛函取相对的极值，所谓相对是和可取函数空间内极值函数的充分的 ε 邻域内的其他变量函数来作比较。在通常极大极小的理论中，解的存在由 Weierstrass 基本定理给以保证。相反地，变分法的特有困难是问题可以有意义地提出却可以没有解答。例如，在 $\{y(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上，连续并有分段连续导数且 $y(-1)=-1$ 及 $y(1)=1\}$ 中要求 $y(x)$ 使泛函

$$J[y]=\int_{-1}^{1}x^4y'^2(x)dx=min$$

很容易看出，可以选适当的函数使这个积分为任意小，比如，取

$$y(x)=\begin{cases}-1, & -1\leq x<-\varepsilon,\\ x/\varepsilon, & |x|\leq\varepsilon,\\ 1, & 1\geq x>\varepsilon\end{cases}$$

得

$$J[y]=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^4/\varepsilon^2\,dx=2\varepsilon^3/5.$$

可是对任一可取函数而言它总不是零。因此，在变分法的某些问题中不能事先认为极值一定存在。不过在这里我们主要将表述达到极值的必要条件，至于在满足这些条件后是否的确达得到极值的问题可以暂时保留。下面就转向这方面的叙述。

由 Euler 首先导出的一变分问题的微分方程是一个函数在使某一给定泛函取极值时所必须满足的必要条件，在某些情况之下它也是充分条件（但是它却不永远是充分条件！）。这样，我们也就把变分问题与相应的微分方程问题（Euler 方程）建立起等价关系，此即所谓“变分原理”。变分原理的推证如同函数极值理论，考察相应于自变量的任意改变的可取函数的任意改变（谓之“可取函数的变分”）引起相应变量函数变化的泛函的变化（定义“泛函的变分”）。

考察泛函

$$J[u]=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2f(x,y)u\right]dx\,dy$$

的极小问题；更确切地说，要求函数$u(x,y)$，在平面区域Ω中这函数及其一阶与二阶偏导数是连续的，在区域的边界$\partial\Omega$上取已知值

$$u=\varphi(s)\,,\qquad 在\ \partial\Omega\ 上，$$

并且它使积分$J[u]$取极小值。

令$u(x,y)$使泛函取极小值；考察函数$u(x,y)+\alpha\eta(x,y)$的积分值，其中α为任意参数，$\eta(x,y)$是这样的函数：它以及它的一阶与二阶导数是连续的，并且在周线$\partial\Omega$上等于零（$\delta u\equiv\alpha\eta(x,y)$谓之可取函数的变分）：

$$J[u+\alpha\eta]=\iint\limits_{\Omega}\left\{\left[\frac{\partial(u+\alpha\eta)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(u+\alpha\eta)}{\partial y}\right]^2+2f\cdot(u+\alpha\eta)\right\}dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right]dx\,dy+2\alpha\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\eta\right]dx\,dy$$

$$+\alpha^2\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

当$|\alpha|$充分小时，

$$J[u+\alpha\eta]\approx J[u]+2\alpha\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\cdot\eta\right]dx\,dy$$

欲$J[u]$为极小，势必

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\cdot\eta\right]dx\,dy=0$$

利用Green公式

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\cdot\eta\right]dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$

$$-\iint\limits_{\Omega}\eta\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-f\right)dx\,dy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega}\eta\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-f\right)dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega}\eta\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

其中n为$\partial\Omega$的外法向．注意到在$\partial\Omega$上$\eta=0$．因此，

$J[u]$达到极值的必要条件是

$$\iint_{\Omega}\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-f\right)dx\,dy=0$$

因为对于任意函数$\eta(x,y)$，上式都要满足，所以u要满足下列Euler方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

此时，Euler方程就是Poisson方程

在此情况下，

$$J[u+\alpha\eta]=J[u]+\alpha^2\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy>J[u]$$

因此，条件也是充分的。这样一来，原来的变分问题就与Poisson方程附加同样边值条件 Dirichlet 问等等价。

如果$f=0$，Poisson方程变成Laplace方程，与之对应的泛函是：

$$J[u]=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

它称为Dirichlet积分。

我们考察其他形式的边界条件，为此，代之考察泛函

$$J[u]=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2fu\right]dx\,dy+\int_{\partial\Omega}\left[\sigma(s)u^2-2\varphi(s)u\right]ds$$

其中函数$u(x,y)$不与任何边界条件有关。相应地

$$J[u+\alpha\eta]=J[u]+2\alpha\left[\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\cdot\eta\right)dx\,dy+\right.$$

$$\left.+\int_{\partial\Omega}\eta(\sigma u-\varphi)ds\right]+\alpha^2\left\{\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_{\partial\Omega}\sigma(s)\eta^2 ds\right\}$$

同理当$|\alpha|$充分小时

$$J[u+\alpha\eta]\approx J[u]+2\alpha\left[\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\cdot\eta\right)dx\,dy+\int_{\partial\Omega}\eta(\sigma u-\varphi)ds\right]$$

欲 $J[u]$ 极小，势必

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+f\eta\right)dx\,dy+\int_{\partial\Omega}\eta(\sigma u-\varphi)ds=0$$

或

$$-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-f\right)\eta\,dx\,dy+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u-\varphi\right)\eta\,ds=0$$

由于 $\eta(x,y)$ 的任意性推得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) & (x,y)\in\Omega\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=\varphi(s) & s\in\partial\Omega\end{cases}$$

这就是说，将上述泛函的极小这一变分问题化为 Poisson 方程 Robin 问题（如果 $\sigma=0$，即是 Neumann 问题）。在此情况下，此必要条件也是充分的；这样，就建立了变分问题与微分方程边值问题之间的等价联系。

上述问题可以作物理解释。在由函数 $f(x,y)$ 所表示的载荷强度下，弹性薄膜（当弯曲很小时）的位能是

$$U=\iint_{\Omega}\left\{\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+f(x,y)u\right\}dx\,dy,$$

其中 μ 在均匀薄膜情况下是一常数，因此，拉紧的弹性薄膜的平衡问题归结为在边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\varphi(s)$ 下求位能最小；它等价于在同样边界条件下求解 Poisson 方程：

$$\Delta u=\frac{1}{\mu}f(x,y)$$

至于泛函附加线积分项的力学意义是：如果膜的边界是可以活动的，并在边界上作用有线密度为 $\varphi(s)$ 的外力以及力图使边界保持平衡位置的弹性力，其单位长度的弹性模量等于 $\sigma(s)$ 则这时膜的位能就要加上那一项线积分。

从上面我们看到：第一类边界条件对于变分问题同样需要单独列出，强加上去，谓之"强加边界条件"，而第二、三类边界条件则含于泛函中，无须单独列出，谓之"自然边界条件"。

下面我们转向比较一般的讨论。考察泛函

$$J[u]=\iint\limits_{\Omega} F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} B(x,y,u)\,dS$$

的极小问题。

只要我们注意到以上推导的实质是借助于函数的变分把泛函转化为依赖于参数α的普通函数所获得的结果，这就不难解决一般问题了。

引进函数变分

$$\delta u=\alpha\eta(x,y)$$

则化泛函为普通函数

$$J[u+\delta u]\equiv\Phi(\alpha)$$

$$=\iint\limits_{\Omega} F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} B(x,y,u+\alpha\eta)\,dS$$

欲$J[u]$达到极值，即$\Phi(0)$达到极值，势必（函数达到极值的必要条件）

$$\delta J[u]\equiv\alpha\Phi'(0)=\alpha\Big\{\iint\limits_{\Omega}[F_u(x,y,u,u_x,u_y)+\eta_x F_{u_x}(\cdots)$$

$$+\eta_y F_{u_y}(\cdots)]\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega}\eta B_u(x,y,u)\,dS\Big\}=0$$

我们把$\Phi'(0)\alpha$定义为泛函的一阶变分，记为$\delta J[u]$。

复利用Green公式

$$\iint\limits_{\Omega}[\eta_x F_{u_x}+\eta_y F_{u_y}]\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}\Big[\frac{\partial}{\partial x}(\eta F_{u_x})+\frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y})\Big]\,dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_{\Omega}\eta\Big[\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big]\,dx\,dy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega}\eta\Big[\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big]\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega}\eta[F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)]\,dS$$

推得

$$\iint_{\Omega}\eta\left[F_u-\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\right]dxdy+\int_{\partial\Omega}\eta\left[F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)+\right.$$

$$\left.+B_u(x,y,u)\right]ds=0$$

由于 $\eta(x,y)$ 的任意性，故所述泛函取极值的必要条件是

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-F_u=0\ ,\qquad (x,y)\in\Omega$$

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)+B_u'(x,y,u)=0\ ,\quad (x,y)\in\partial\Omega$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向。

利用同样思想，我们可以推导诸如依赖于多个变易函数的多元泛函的极值的必要条件，等等。我们需要着重指出的是，这一方法乃是极值理论的本质的思想。

作为这一节结束，我们仅指出如下事实：变分原理是数学物理方法的一个重要环节，从 Euler 开始，已有二百多年的历史。最近十几年来，这一领域有两项重要进展。其一是把变分原理与剖分逼近相结合而发展了有限元数值解法（将在第七章介绍）；另一项是把变分原理拓广到具有单边约束的场合，得到所谓“变分不等式”，它拓广了数学物理课题对象，从“方程”推广到“不等方程”，也有椭圆、抛物、双曲型之分，适合于物理条件比较复杂的问题，如单向性或自控边界条件、接触问题，多相问题，自由边界问题等等，它对一系列单边约束的力学问题和连续介质的材料非线性问题，如弹——塑固体、刚——粘性流体、带电离的电磁场、含相变的传热等等以及最优控制问题提供了一项新的数学工具。

练　习

1．考察变分问题：在强加边界条件下

$$J[y,z,w]=\int_a^b F(x,y(x),z(x),w(x),y'(x),z'(x),w'(x))dx=min$$

试建立相应的Euler微分方程组。

2．考察变分问题：在强加边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$ 下，

$$J[u]=\int\cdots\int_\Omega F(x_1,\cdots,x_n,u(x_1,\cdots,x_n),u_{x_1},\cdots u_{x_n})dx_1\cdots dx_n$$
$$=min$$

试建立相应的 Euler 微分方程。

3．试证：变分问题

$$\begin{cases} J[u]=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2f(x,y,z)u\right]dxdydz=min \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

与三维 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad (x,y,z)\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

等价。

4．推导变分问题

$$J[u]=\iint_\Omega F(x,y,u(x,y),u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})dxdy=min$$

的Euler 方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0$$

§2. 直接方法基本思想

从上节的讨论我们清楚地看到：变分问题的求解可以归结到微分方程问题的求解，在某些情况下，这二者还是等价的转换。因此，只要能够直接求解变分问题，那么就可以把微分方程问题化为变分问题直接求解；这种直接求解微分方程问题方法的思想加以拓广形成了一整套数学物理直接方法。

所谓变分直接方法的基本思想是把变分问题看作某些有限多个变量的函数的极值问题的极限情况，这与含有有限多个变量的函数的极值问题可以用通常的求普通函数的极值的方法来求解，以后再通过取极限以获得所要求的变分问题的解答。这是基于泛函可以看作含有无穷多个变量的函数的观点，化泛函的极值问题为普通函数极值问题的极限。如果我们假定，可取函数能够展成n级数，或展成Fourier级数，或更一般地展成形如

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

的广义Fourier级数，其中φ_n为已给的可取函数空间的规格化正交函数基。那么，泛函

$$J[u]=J(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots),$$

即泛函$J[u]$的值由给出的无穷数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$所确定，也就是说，泛函是无穷多个变量的函数。这样一来，变分问题和含有有限多个变量的函数极值问题不同之点是在于，在变分的情况中，必须对含无穷多个变量的函数值来做一番探讨。因此，如上面所说的那样，变分直接方法的基本思想就是把变分问题当做有限多个变量的函数极值问题的极限情况来处理，这就显得十分自然了。这要用通俗的话来说，就是先搭架子尔后逐步完善，即先求如下形状的u的近似解

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i.$$

此时，对应泛函化为通常的n元函数，

$$J[U_n]=J(a_1,\cdots,a_n)$$

由函数的极值理论确定 $a_1,\cdots,a_n$，从而也就确定了 U_n；然后令 $n\to\infty$，这样就有可能期望 U_n 的极限 $U=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$ 仍使得 $J(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ 取极值，因之就是所要求变分问题的解。

以上方法用来求解微分方程问题有赖于变分原理把微分方程问题化为相应的变分问题的基础上来进行，即是说先要求出对应于微分方程问题的泛函，我们就把它叫做微分方程问题的支配泛函。显然，求微分方程问题的支配泛函并非一件容易的事情。我们是否能够保留变分直接方法的核心本质而回避这一具体的困难呢？变分直接方法的核心本质就是化求一个函数为求无穷多个变数。求微分方程问题的解函数是否也可以转化为求无穷多个变数。其实，上章所述的分离变量法就是这样的一种方法，不过，那里的基函数是通过微分方程变量分离求解与所要求解的未知函数展开系数一并确定的。现在，可以参照变分直接方法在求解的函数空间中取定某个基函数系（不必求解微分方程）寻求直接确定所要求解的未知函数关于该基函数系展开系数的方法，如此化求解未知函数为确定无穷多个变数，而无穷多个变数的确定同样又可以由有穷多个的极限过程来实现。这就是一般数学物理直接方法的基本思想。

下面我们就转到一些数学物理直接方法的具体介绍。

§3. Ritz 法

Ritz 法是把微分方程问题化为相应的变分问题，即先得求

立微分方程问题的支配泛函 J[u]，再在可取函数空间中选取适当的基函数系 $\{\varphi_n\}$，並且不把泛函 J[U] 的值放在变分问题里的任意可取函数上考察，而是就次形的具常系数的各种可能的线性组合式

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i$$

上考察，这样泛函 J[U_n] 转变成系数 $a_1,\cdots,a_n$ 的函数 $J(a_1,\cdots,a_n)$，待定系数 $a_1,\cdots,a_n$ 要这样来选取，以使函数 $J(a_1,\cdots,a_n)$ 达到极值，因而 $a_1,\cdots,a_n$ 应当由方程组

$$\frac{\partial J(a_1,\cdots,a_n)}{\partial a_i}=0\ ,\quad i=1,\cdots,n$$

来确定；令 $n\to\infty$ 以完成极限运算，当极限存在时，我们就得到函数

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n\ .$$

这个函数（只要对泛函 J[u] 和 $\{\varphi_n\}$ 加上适当的要求）就是我们所要求的变分问题的解，也即原微分方程问题的解。如果不完成极限运算，那么所求得的就是相应的近似解。我们如果泛函的绝对极小值是用这个方法求得的，则求得的极小值的近似值是偏大的；因为泛函在任意的可取函数上的极小值不大于该泛函上述线性组合可取函数类（它的一部分上）的极小值；同样，若用它来求泛函的极大值，则所得泛函的极大值的近似值是偏小的。

一般说来，求方程组 $\dfrac{\partial J(a_1,\cdots,a_n)}{\partial a_i}=0\quad(i=1,\cdots,n)$ 的解是一个很复杂的问题。如果泛函关于未知函数及其导函数是二次的，则这个问题将大为简化，因为在这种情况下，方程 $\dfrac{\partial J(a_1,\cdots,a_n)}{\partial a_i}=0\quad(i=1,\cdots,n)$ 对于 a_i 来说是线性的即归结为线性代数方程组求解。数学物理问题大多如此，即相

应的微分方程问题被化成关于未知函数及其导数是二次的泛函的极值的探讨，因此，Ritz 法在使用上可以大为简化。

基函数系 $\{\varphi_n\}$（今后我们称之为“坐标函数序列”，其元素就称为“坐标函数”，这样似乎更通俗些）的选取对于下一步计算的复杂程度有很大的影响，因此，使用 Ritz 法能否获得成效在颇大程度内是跟坐标函数的选取得当与否有着密切的关系。

Ritz 方法的具体步骤可以归结如下：

(1) 将原微分方程问题按变分原理变为相应的变分问题，即求出微分方程问题的支配泛函 $J[u]$；

(2) 选取坐标函数系 $\{\varphi_n(x,y)\}$，要求它们满足下列条件：

a) 满足边界条件，

b) 任何 n 个坐标函数线性无关，

c) 它们是完备的（即在这坐标函数系外再也找不到非零函数与它们线性无关）；

(3) 构造“极小化序列”，命

$$u_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x,y),$$

其中 a_i $(i=1,\cdots,n)$ 为待定系数，谓之 Ritz 系数，为了确定 a_i $(i=1,\cdots,n)$，把 u_n 代入泛函中，使泛函化为有限多个变数 a_i $(i=1,\cdots,n)$ 的函数

$$J[u_n]=J(a_1,\cdots,a_n).$$

按照函数极值理论推得确定 a_i $(i=1,\cdots,n)$ 的方程组

$$\frac{\partial J(a_1,\cdots,a_n)}{\partial a_i}=0,\quad i=1,\cdots,n$$

谓之 Ritz 方程组，由此解出 a_i $(i=1,\cdots,n)$，这样就求得

第n次近似解$u_n(x,y)$；一般，把如此求得的函数序列$\{u_n(x,y)\}$就叫做"Ritz极小化序列"，虽然还没有证明

$$J[u_n]\longrightarrow \min \quad (n\to\infty)$$

严格地说，作为泛函的极小化序列应该满足这一要求。

我们下面举几个例子。

例1．St.Venant扭转问题为结为下列Laplace方程Neumann问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & (x,y)\in\Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=y\cos(n,x)-x\cos(n,y) \end{cases}$$

其中n为$\partial\Omega$的外法线方向。

根据变分原理，它等价于变分问题：

$$J[u]=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+x\right)^2\right]dx\,dy$$

对于横截面为椭圆的直柱体来说，积分区域Ω被限于椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

之内。

在这种情况下，我们只取一个坐标函数xy就得

$$u_1(x,y)=a_1xy$$

$$J[u_1]=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left[(a_1-1)^2y^2+(a_1+1)^2x^2\right]dx\,dy \text{[注]}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[(a_1-1)^2b^2\rho^2\sin^2\theta+(a_1+1)^2a^2\rho^2\cos^2\theta\right]\cdot ab\rho\,d\rho\,d\theta$$

[注] 在这里，自然采取椭圆坐标

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$=\int_0^1 ab\rho^3 d\rho\int_0^{2\pi}\left[(a_1-1)^2 b^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+(a_1+1)^2a^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$=\frac{\pi ab}{4}\left[(a_1-1)^2b^2+(a_1+1)^2a^2\right]\equiv J(a_1)$$

根据函数极值的必要条件

$$\frac{dJ(a_1)}{da_1}=0,$$

即

$$(a_1-1)b^2+(a_1+1)a^2=0.$$

由此解得

$$a_1=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

从而获得一次Ritz近似解

$$u_1(x,y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}xy$$

例2. 如果上例中区域Ω是以$2a$和$2b$为边长的矩形：

$$-a\leq x\leq a,\quad -b\leq y\leq b$$

取三个坐标函数xy，xy^3，x^3y，令

$$u_3(x,y)=a_1xy+a_2xy^3+a_3x^3y.$$

则

$$J[u_3]=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}+x\right)^2\right]dx\,dy$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[(a_1y+a_2y^3+3a_3x^2y-y)^2+(a_1x+3a_2xy^2+a_3x^3+x^2\right]dx\,dy$$

$$=4\int_0^a\int_0^b\left[(a_1+a_2y^2+3a_3x^2-1)^2y^2+(a_1+3a_2y^2+a_3x^2+1)^2x^2\right]dx\,dy$$

$$=4\left\{\frac{1}{3}y^3\int_0^a(a_1+a_2y^2+3a_3x^2-1)^2dx\Big|_{y=0}^{b}\right.$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^b dy\int_0^a y^3(a_1+a_2y^2+3a_3x^2-1)\cdot 2a_2y\,dx$$

$$+\frac{1}{3}x^3\int_0^b(a_1+3a_2y^2+a_3x^2+1)^2dy\Big|_{x=0}^{a}$$