

中西算學大成卷十四

嘉善陳維祺纂

幾何原本十三

界說二十九則

第一界 體者有長短厚薄廣狹。

第二界 體之界為面。

第三界 線與平面內諸線成直角。則為面之垂線。

第四界 二面相遇。此面內與遇線成直角之諸線。亦與彼面內之諸線成直角。則

此面為彼面之垂面。

第五界 凡線斜遇平面。任從斜線一點。作面之垂線。復自垂線底作平線。至斜線底。則平線與斜線相交之角度。即斜線之倚度。

第六界 二面斜相遇。二面內有二線相遇。與面之遇線俱成直角。則此二線之倚度。即二面之倚度。

第七界 有二面。俱斜遇平面。俱如上有二相遇線。其倚度同。則二面之倚度亦同。

第八界 凡平行面。引而廣之。至無盡界。永不相遇。

第九界 體之面數同。面勢亦同。謂之相似體。

第十界 體之面數同。面勢及大小俱同。謂之相等相似體。

第十一界 凡三線不在一個面內。相遇于一點。其遇角為體角。四線以上俱同。又三面以上。相遇于一點。理亦同。

第十二界 凡諸邊形為底。其上各面遇于一點。而成體角。謂之棱錐體。

第十三界 凡體有二面平行。相等相似。餘面俱為矩形。謂之平行棱體。

第十四界 以圓徑為心線。以半圓為界。旋轉成體。謂之球體。

第十五界 半圓旋轉成體。其心線不動。名球體軸線。

第十六界 半圓旋成之體。體之心點即半圓之心點。

第十七界 凡線過球心之兩界。謂之徑線。

第十八界 以直角三角形之一邊為心線。旋轉成體。謂之圓錐體。如心線與餘邊相等。則為直角錐體。如小於餘邊。則為鈍角體。大于餘邊。則為銳角體。

第十九界 凡直角三角形旋轉成體。其心線不動。謂之圓錐軸線。

第二十界 三角形之餘邊。旋成員面。即圓錐底。

第二十一界 以長方形之一邊為心線。旋轉成體。謂之圓柱體。

第二十二界 長方旋轉成體。其心線不動。謂之圓柱軸線。

第二十三界 長方形之底邊。旋成圓面。即圓柱底。

第二十四界 凡大小圓錐體。或圓柱體。其軸線與底之徑線比例同。則謂之相似。

圓錐圓柱體。

第二十五界

凡體。以六個相等之正方為界。謂之正六面體。即立方體。

第二十六界

凡體。以四個相等等邊三角形為界。謂之正四面體。

第二十七界

凡體。以八個相等等邊三角形為界。謂之正八面體。

第二十八界

凡體。以十二個相等等邊等角五邊形為界。謂之正十二面體。

第二十九界

凡體。以二十個相等等邊三角形為界。謂之正二十面體。

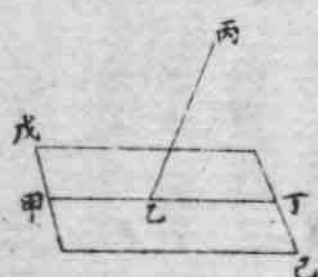
論體一凡四十題

第一題

凡直線。不能一分在面內。一分在面外。

解曰。戊己為面。甲乙為面內之線。丙為面外之點。題言甲乙丙不能

為直線。



論曰。若云甲乙丙為直線。其下甲乙一分在面內。其上乙丙一分在

面外。試引長甲乙。得面內之線乙丁。是甲乙丙。甲乙丁。二直線俱有

甲乙之一分。于理不合。蓋彼此二直線相遇。止有一點。否則二直線

合為一。是以凡直線。不能一分在面內。一分在面外。

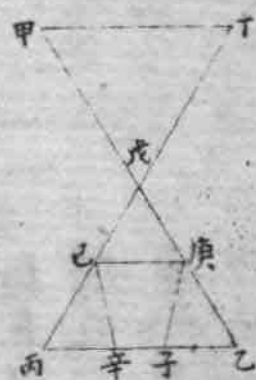
第二題

凡二直線相交。則二線必在一面內。又凡三角形。亦必在一面內。

解曰。甲乙丙丁二線。交于戊點。題言甲乙丙丁二線。必在一個面內。又凡三角形。

亦必在一個面內。

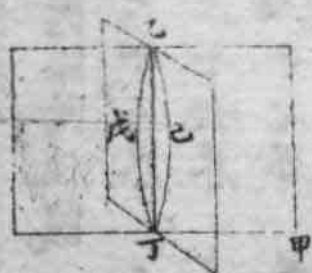
論曰。戊乙戊丙二線內。取己庚二點。作乙丙己庚二線。又作己辛庚子二線。則知



戊乙丙三角形。在一面內。蓋戊乙丙三角形之一分己辛丙。或庚乙子。在一面內。若其餘分在他面內。則戊丙或戊乙二直線。俱一分在一面內。一分在面外。又戊丙乙三角形之一分己丙乙庚。在一面內。若其餘分戊己庚。在他面內。則戊丙戊乙二直線。俱一分在一面內。一分在面外。于理不合。本篇

故戊乙丙三角形。在一面內。惟戊乙丙三角形所在之面。即戊丙戊乙二直線所在之面。又戊丙戊乙二直線所在之面。亦即甲乙丙丁二直線所在之面。本篇是以相交之甲乙丙丁二直線。必在一面內。而凡三角形。亦必在一面內。

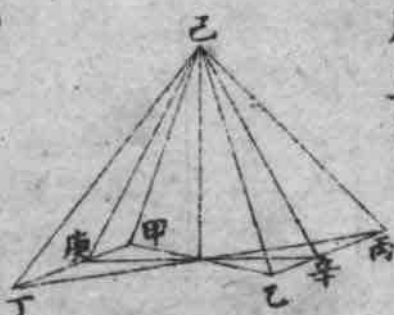
第三題 凡二平面相交。其交線必為直線。



解曰。甲乙丙丁二平面。相交于丁乙線。題言丁乙必為直線。論曰。若謂丁乙非直線。而于甲乙面內。從丁至乙作丁戊乙直線。丙丁面內。作丁己乙直線。則丁戊乙。丁己乙。二直線。同以丁乙二點為界。而函乙戊丁己面。于理不合。公論所以丁戊乙。丁己乙皆非直線。丁乙二點界內。甲乙丙丁二面之交線。丁乙之外。更無直

線。是以二平面相交其交線必為直線。

第四題 凡直線遇他二線于交點。各與成直角。則此直線與他二線所在之面。亦成直角。



解曰。戊己直線。遇甲乙丙丁二線于交點戊。各與成直角。題言戊己與甲乙丙丁所在之面。亦成直角。

論曰。設甲戊戊乙丙戊戊丁四直線。兩兩相等。過戊點任作庚戊辛線。又作甲丁丙乙二線。任取戊己線一點己。作己甲己庚己丁己丙己辛。己乙諸線。甲戊戊丁二線既與丙戊戊乙二線

等。而其角亦等。

一篇十五

則甲丁底線與乙丙底線亦必等。

一篇四

而甲戊丁三角形與

丙戊乙三角形等。

十五

丁甲戊角與戊乙丙角等。甲戊庚角與乙戊辛角亦等。

一篇十五

故甲庚戊乙辛戊兩三角形彼此有二角相等。甲戊乙戊各為二角所夾之邊。亦

相等。故彼此餘二邊亦相等。

一篇十三

所以庚戊與戊辛等。甲庚與乙辛等。又甲戊

與戊乙既相等。而己戊為二直角之公邊。則己甲與己乙二底邊等。

一篇四

己丙與

己丁相等。理同。又甲丁既等于乙丙。而己甲等于己乙。則己甲甲丁二邊與己乙

乙丙二邊各相等。己丁與己丙二底邊等。

本論

故己甲丁角與己乙丙角等。

一篇八

又甲庚與乙辛等。

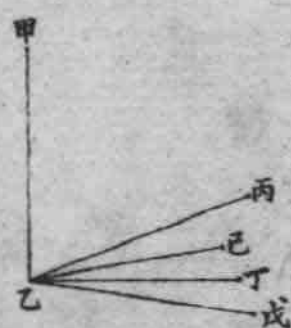
本論

而己甲與己乙等。故己甲甲庚二邊與己乙乙辛二邊各相等。

又己甲庚角與己乙辛角等。論本故己庚與己辛二底邊等。一篇又庚戊與戊辛等。而戊己為公邊。論本則庚戊戊己二邊與辛戊戊己二邊各相等。而己辛與己庚二底邊等。故庚戊己角與辛戊己角等。一篇所以庚戊己辛戊己俱為直角。故己戊任于何處遇戊點必與庚辛成直角。而凡同面之線與戊己線相遇俱成直角。理同。凡線與面內之諸線成直角則為面之垂線。本篇界說三故戊己與甲乙丙丁二線所在之面成直角。是以凡直線與他二線交于一點各與成直角則與二線所在面亦成直角。

第五題 凡直線與他三線遇于一點且俱與成直角則三線必在一個面內。

解曰。甲乙直線與乙丙乙丁乙戊三線遇于乙點各成直角。題言乙丙乙丁乙戊必在一個面內。



論曰。若云乙丁乙戊同在面內而乙丙在面外。試以此面為平面而以甲乙乙丙所在之面為垂面。引而廣之則二面相遇之線為平面內之直線。設為乙己。本篇是甲乙乙丙乙己三線皆在垂面內。又甲乙既與乙丁乙戊二線俱成直角則必與乙丁乙戊二線所在之面亦成直角。本篇惟乙丁乙戊所在之面為平面而甲乙為平面之垂線。所以亦為平面內所遇諸線之垂線。本篇界說三惟乙己在平面內而遇甲

乙。故甲乙乙為直角。而甲乙丙角。題亦設為直角。是甲乙乙甲乙丙二角等。而乙丙不在平面內。于理不合。公論九。故乙丙非在平面之外。而乙丙乙丁乙戊皆在一面內。是以凡直線與三線遇于一點。且俱與成直角。則三線必在一個面內。

第六題

凡二線俱與一面成直角。則二線必為平行線。

解曰。甲乙丙丁二線俱與一面成直角。題言甲乙丙丁必為平行線。

論曰。于所遇面之乙丁二點。作乙丁直線。又于面內作丁戊。與乙丁成直角。令丁

戊等于甲乙。又作乙戊甲戊甲丁三線。甲乙既為面之垂線。則亦為面內所遇諸

線之垂線。本篇界說三。

惟乙丁乙戊皆在面內。而遇甲乙。故甲乙丁甲乙戊皆為直角。

丙丁乙丙丁戊皆為直角。理同。又甲乙既等于丁戊。而乙丁為

公邊。則甲乙乙丁二邊與戊丁丁乙二邊相等。而各成直角。故

甲丁與乙戊二底邊等。一篇。又甲乙既等於丁戊。而甲丁等于

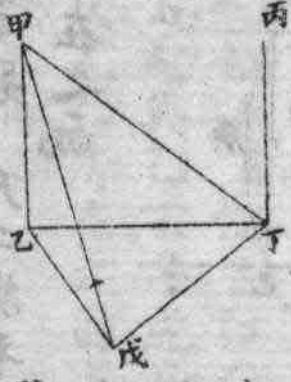
乙戊。則甲乙乙戊二邊與戊丁丁甲二邊相等。二底邊同為甲

戊。故甲乙戊角與戊丁甲角等。一篇。惟甲乙戊為直角。故戊丁

甲亦為直角。所以戊丁為丁甲之垂線。惟亦為乙丁丁丙二線

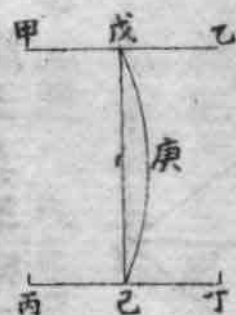
之垂線。故戊丁與乙丁丁甲三線俱成直角于丁點。則乙丁丁甲丁丙必在

一面內。本篇五。惟甲乙亦在乙丁丁甲所在之面內。凡三角形必在一面內。故也。本篇



所以甲乙乙丁丁丙三線皆在一面內。而甲乙丁及丙丁乙俱為直角。故甲乙與丙丁平行。十一篇二是以凡二線俱與一面成直角。則二線必為平行線。

第七題 凡二線平行。任于二線內各取一點。作線聯之。此聯線必在二平行線所在之面。



解曰。于甲乙丙丁二平行線內。取戊己二點。作線聯之。題言戊己聯線。必在二平行線所在之面。

論曰。若云戊己聯線在面之外。如戊庚己。依戊庚己作一平面。與二平行線所在之面相交。其交線為直線戊己。本篇則戊庚

己戊己二直線。中函一面。于理不合。公論故聯戊己二點之線。不能出甲乙丙丁二平行線所在之面外。是以于二平行線內。各取一點。作聯線。此聯線必在二平行線所在之面。

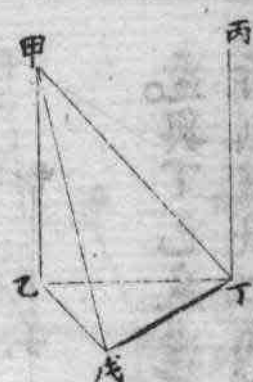
第八題 凡二平行線。此線與面成直角。則彼線與面亦成直角。

解曰。甲乙丙丁二平行線。甲乙與面成直角。題言丙丁與面亦成直角。

論曰。設甲乙丙丁。與面遇于乙丁二點。作乙丁線。則甲乙丁丙丁乙三線。必在一

個面內。本篇于本面內作丁戊線。與乙丁成直角。令丁戊與甲乙等。又作乙戊。甲

戊甲丁三線。甲乙既為本面之垂線。則亦為本面內所遇諸線之垂線。本篇故

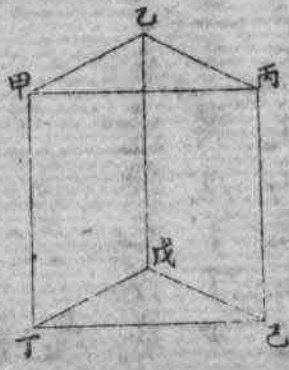


甲乙丁。甲乙戊。皆為直角。乙丁線既遇甲乙丙丁二平行線。則
 甲乙丁。丙丁乙。二角必與二直角和等。一篇二惟甲乙丁為直
 角。故丙丁乙亦為直角。所以丙丁為乙丁之垂線。又甲乙丁與
 戊丁乙。同為直角。甲乙既等于丁戊。而乙丁為二角之公邊。則
 甲丁底邊與乙戊底邊亦等。一篇四甲乙既等于丁戊。而乙戊等于甲丁。則甲乙乙
 戊二邊。與戊丁丁甲二邊。各相等。而甲戊為公邊。所以甲乙戊角。等于戊丁甲角。
 惟甲乙戊為直角。故戊丁甲亦為直角。而戊丁為丁甲之垂線。惟戊丁亦為丁乙
 之垂線。故戊丁為乙丁丁甲所在面之垂線。本篇四則必為面內所遇諸線之垂線。
 惟丁丙在乙丁丁甲二線所在之面。因甲乙乙丁二線。皆在乙丁丁甲所在之面
 故也。本篇二惟甲乙乙丁二線。皆在丁丙所在之面。本篇七故戊丁與丁丙成直角。惟
 丁丙與乙丁亦成直角。是丙丁與丁戊丁乙相交之二線成直角于丁點。即與丁
 戊丁乙所在之面成直角。本篇四惟丁戊丁乙所在之面即本面。是以丙丁與本面
 成直角。

第九題 凡二直線。與他線非同面。而皆與平行。則此二線亦必平行。
 解曰。甲乙丙丁二線。與戊己線非同面。而皆與平行。題言甲乙與丙丁亦必平行。
 論曰。戊己線內任取庚點。作庚辛線。在戊己甲乙二線所在面內。而與戊己成直角。

又作庚子線。在戊己丙丁二線所在面內。亦與戊己成直角。戊己既為庚辛庚子二線之垂線。則戊己與庚辛庚子二線所在之面成直角。本篇而戊己與甲乙平行。故甲乙與庚辛庚子三點所在之面。亦成直角。本篇丙丁與庚辛庚子三點所在之面成直角。理同。是甲乙丙丁。各與庚辛庚子三點所在之面成直角。凡二線與一面成直角。則此二線必平行。本篇是以甲乙與丙丁平行。

第十題 凡二相遇線與他面二相遇線俱平行。則彼此二角等。
解曰。甲乙乙丙二相遇線與他面丁戊戊己二相遇線平行。題言甲乙丙角與丁戊己角等。

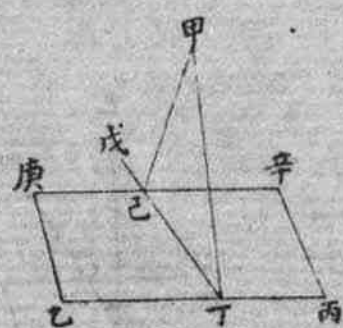


論曰。取乙甲。乙丙戊丁。戊己。四線俱等。而作甲丁。丙己。乙戊。甲丙丁己。五聯線。乙甲既與戊丁平行。則甲丁與乙戊相等。亦平行。一篇丙己與乙戊亦相等而平行。理同。凡二直線。皆與他面直線平行。則二線亦必平行。本篇故甲丁與丙己相等而平行。甲丙丁己為二聯線。亦相等而平行。又甲乙乙丙二邊。既與丁戊戊己二邊相等。而甲丙底

邊與丁己底邊等。則甲乙丙角與丁戊己角等。一篇是以相遇線與他相遇線平行。則彼此二角等。

第十一題

面外有點。從點求作本面之垂線。



法曰。甲為面外之點。從甲點求作面之垂線。法于面內任作乙

丙線。從甲點作乙丙之垂線甲丁。本篇若甲丁即本面之垂線。

則所求已得。若非。則于本面內從丁點作乙丙之垂線。本篇戊。

次從甲點作丁戊之垂線甲己。本篇過己點作庚辛線。與乙

丙平行。乙丙既與甲丁丁戊俱成直角。即與甲丁丁戊二線所

在之面成直角。而與庚辛平行。凡二平行線。此線與面成直角。

則彼線與面亦必成直角。本篇所以庚辛與甲丁丁戊所在之面成直角。而與本

面內所遇之諸線亦成直角。本篇說三。惟甲己在戊丁丁甲所在之面。而與庚辛遇。

故庚辛為甲己之垂線。即甲己為庚辛之垂線。惟甲己亦為丁戊之垂線。是甲己

為庚辛丁戊二線之垂線。凡直線遇他二線于交點。而與二線俱成直角。則必與

二線所在之面成直角。本篇所以甲己與戊丁庚辛二線所在之面成直角。惟戊

丁庚辛所在之面即本面。故甲己為從甲點至本面之垂線。

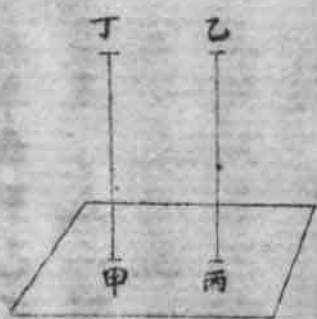
第十二題

面內有點。從點求作本面之垂線。

法曰。甲為面內之點。從甲求作直線。與面成直角。任取面外乙點。作面之垂線乙

丙。本篇從甲作甲丁線。與乙丙平行。本篇甲丁丙乙二線既平行。而乙丙與面

成直角。則甲丁亦必與面成直角。本篇故甲丁為本面甲點上之垂線。



第十三題 面內一點上不能作二垂線。

解曰。甲為面內一點。題言甲點上不能作二垂線。

論曰。若云甲點上可作甲乙甲丙二線。皆與本面成直角。

試作甲乙甲丙所在之面。此面交本面必過甲點。而與本

面成一直線。本篇設直線為丁甲戊。則甲乙甲丙丁甲戊

三線在一面內。丙甲線既與本面成直角。則凡與本面內

所遇之線。皆成直角。本篇惟丁甲戊直線在本面內。而

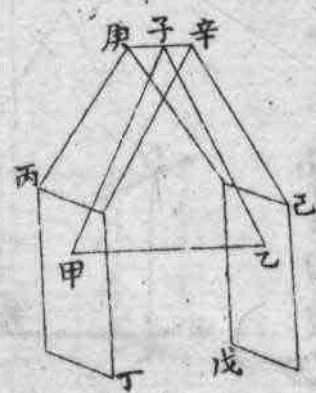
遇丙甲。則丙甲戊為直角。乙甲戊為直角。理同。是丙甲戊與乙甲戊兩角等。而在
一面內。于理不合。公論是以面內一點上不能作二垂線。

第十四題。

直線為二面之垂線。則二面必為平行面。

解曰。甲乙直線為丙丁戊己二面之垂線。題言丙丁戊己

必為平行面。



論曰。若去二面非平行。則引而廣之。必相遇。設遇線為庚辛。本篇庚辛內任取子點。作甲子乙子二線。甲乙既為戊己面之垂線。則必為戊己面內乙子線之垂線。本篇界所說三

以甲乙子為直角。乙甲子亦為直角。理同。是甲乙子三角形內之甲乙二角和。等于二直角和。于理不合。一篇故丙丁戊己二面引而廣之。必不相遇而為平行。是以直線為二面之垂線。則二面必平行。

第十五題。

此面內二相遇線。與彼面內二相遇線平行。則二面必平行。



解曰。此面內甲乙乙丙二相遇線。與彼面內丁戊戊己二相遇線平行。題言甲乙乙丙所在之面。與丁戊戊己所在之面。引而廣之。永不相遇。

論曰。從乙點作乙庚。為丁戊戊己所在面之垂線。與面遇于庚點。本篇自庚點作庚辛。與戊丁平行。作庚子。與戊己平行。一篇一乙庚既為丁戊戊己所在面之垂線。則與本面內所遇諸線

成直角。

本篇界說三

而庚辛庚子皆于丁戊戊己所在面內遇乙庚。故乙庚辛。乙庚子。

皆為直角。

又乙甲既與庚辛平行。則庚乙甲。乙庚辛。二角之和與二直角之和等。

一篇二

惟乙庚辛為直角。故庚乙甲亦為直角。而乙庚為乙甲之垂線。又為乙丙

之垂線。理同。乙庚既與甲乙乙丙二線相遇于交點。俱成直角。則乙庚亦為甲乙

乙丙所在面之垂線。

本篇四

惟乙庚為甲乙乙丙及丁戊戊己所在二面之垂線。則

二面必平行。

本篇十四

是以此面內二相遇線與彼面內二相遇線平行。則二面亦必

平行。

第十六題

凡二平行面與他面相交。其二交線必平行。

解曰。如戊辛面交甲乙及丙丁二平行面。其二交線為戊己

庚辛。題言戊己庚辛必平行。

論曰。若云戊己庚辛二線非平行。則或向己辛。或向戊庚。引

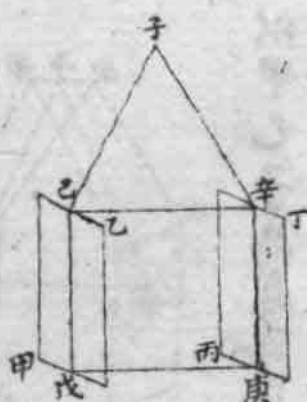
長之必相遇。設向己辛。相遇于子點。戊己子線既在甲乙面

則戊己子內無論何點。必皆在一面內。而子點為戊己子內

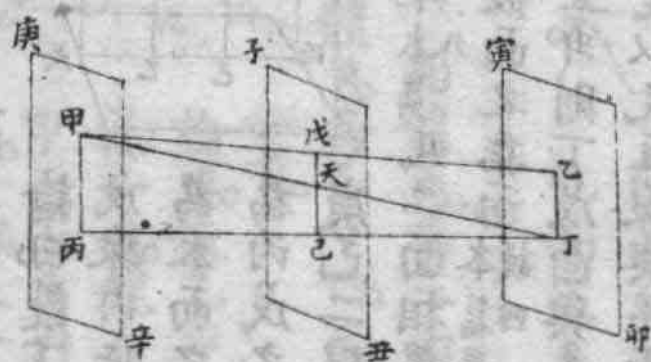
之一點。故子點在甲乙面。又子點亦在丙丁面。理同。是甲乙

丙丁二面引而廣之。當相遇矣。惟二面平行。必不能遇。故戊己庚辛二線向己辛

引長之。必無相遇之理。向戊庚引長之。亦不相遇。理同。凡二線兩端各引長之。永



不相遇為平行線。一篇界說是以二平行面與他面交其二交線必平行。
第十七題 凡二直線為諸平行面所割。各分為若干段。則二線之諸段兩兩比例同。



解曰甲乙丙丁。二直線。為庚辛。子丑。寅卯。三平行面所割。分于甲戊乙丙己丁六點。題言甲戊與戊乙二線比。若丙己與己丁二線比。

論曰作甲丙乙丁。甲丁。三線。令甲丁遇于丑面。

于天點作戊天己線。子丑寅卯二平行面。既與

戊乙丁天面相遇。則其遇線戊天乙丁為平行

線。本篇又庚辛子丑二面。既與甲天乙丙面相

遇。則其遇線甲丙天乙亦為平行線。理同。惟戊

天與甲乙丁三角形之邊乙丁平行。故甲戊與

戊乙比。若甲天與天丁比。六篇又天己與甲丁

丙三角形之邊甲丙平行。故甲天與天丁比。若

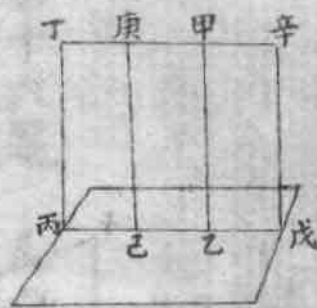
丙己與己丁比。而甲天與天丁比。若甲戊與戊

乙比。故甲戊與戊乙比。若丙己與己丁比。五篇是以二直線為諸平行面所割。

分為若干段諸段必兩兩比例同。

第十八題

凡直線與平面成直角。則直線所在之諸面與本面亦成直角。
解曰。甲乙直線與平面成直角。題言甲乙所在之諸面與本面亦成直角。



論曰。設下戊為甲乙所在之面。丙戊為丁戊與本面之遇線。于丙戊線內任取乙點。于丁戊面內作乙庚線。與丙戊成直角。甲乙既為本面之垂線。則必為本面內所遇諸線之垂線。本篇界說三。所以亦為丙戊之垂線。而甲乙乙為直角。惟庚乙乙亦為直角。故甲乙與庚乙二線平行。十一篇二惟甲乙與本面成直角。故庚乙與本面亦

成直角。

本篇八。

凡二面相遇。此面內與遇線成直角之諸線亦與彼面成直角。則此

面為彼面之垂面。

本篇界說四。

今丁戊面內直線乙庚與遇線丙戊成直角。而與本面

亦成直角。則丁戊面與本面必成直角。凡甲乙線所在之諸面皆與本面成直角。

理同。是以凡直線與平面成直角。則直線所在之諸面與本面亦成直角。

第十九題

凡相交之二面俱與他面成直角。則二面之交線亦與他面成直角。

解曰。甲乙乙丙為相交之二面。與他面俱成直角。其交線乙丁。題言乙丁與他面

亦成直角。

論曰。若云交線與他面不成直角。而于甲乙面內作丁戊線。與甲丁成直角。乙丙