

## 第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言 .....	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述 .....	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法 .....	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述 .....	5-1-1
2. 用传递函数来描述 .....	5-1-2
3. 用频率特性来描述 .....	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述 .....	5-1-4
5. 借助图形来描述( 符号流程图 ) .....	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述 .....	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述 .....	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法 .....	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述 .....	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述 .....	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述 .....	5-1-25
二、线性系统的结构图表示 .....	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵 .....	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵 .....	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述 .....	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计 .....	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出 .....	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标 .....	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理 .....	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理 .....	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理 .....	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理 .....	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理 .....	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理 .....	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理 .....	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性 .....	5-3-1
5-3-1 引言 .....	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性 .....	5-3-2
一、系统可观性概念 .....	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则 .....	5-3-2
三、系统一致可观性概念 .....	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性 .....	5-3-29
一、系统可控性概念 .....	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则 .....	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则 .....	5-3-39
四、系统一致可控性概念 .....	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性 .....	5-3-57
一、	系统稳定性概念 .....	5-3-57
1.	系统的描述 .....	5-3-57
2.	平衡状态 .....	5-3-58
3.	稳定性概念 .....	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法 .....	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则 .....	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式 .....	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界 .....	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式 .....	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量 .....	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式 .....	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式 .....	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式 .....	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题 .....	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现 .....	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现 .....	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现 .....	5-5-9
一、	并联可控实现 .....	5-5-9
二、	并联可观文实现 .....	5-5-13

5-5-4	常系数、线性系统的串联形实现 .....	5-5-15
5-5-5	常系数、线性系统的最小实现 .....	5-5-21
§ 5-6	状态反馈问题 .....	5-6-1
5-6-1	反馈问题 .....	5-6-1
5-6-2	极点配置问题 .....	5-6-8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题 .....	5-6-9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题 .....	5-6-18
5-6-3	稳定性问题 .....	5-6-26
一、	能稳定性 .....	5-6-26
二、	衰减速度 .....	5-6-28
三、	减少反馈量 .....	5-6-29
四、	轨出反馈的稳定性 .....	5-6-33
5-6-4	分离性控制问题 .....	5-6-35
§ 5-7	观文口原理 .....	5-7-1
5-7-1	引言 .....	5-7-1
5-7-2	观文口和“可检测系统” .....	5-7-1
一、	观文口构成的基本思想 .....	5-7-1
二、	观文口和“可检测系统” .....	5-7-5
5-7-3	观文口的基本关系 .....	5-7-13
5-7-4	基本观文口 .....	5-7-26
5-7-5	降维观文口 .....	5-7-29

一、单轨入单轨出系统的降维观文口 .....	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口 .....	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈 .....	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析 .....	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系 .....	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度 .....	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数 .....	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理 .....	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性 .....	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性 .....	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理 .....	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式 .....	5-9-7

## 第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言 .....	6-0-1
§ 6-1 估计问题 .....	6-1-1
6-1-1 统计估计问题 .....	6-1-1
一、最小方差估计 .....	6-1-1
二、极大验后估计 .....	6-1-5
三、极大似然估计 .....	6-1-6
四、举例 .....	6-1-7
6-1-2 线性估计 .....	6-1-18
一、线性最小方差估计 .....	6-1-18
二、最小二乘估计 .....	6-1-24
6-1-3 估计问题小结 .....	6-1-28
一、几种估计方法的比较 .....	6-1-28
二、几种估计方法间的关系 .....	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理 .....	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理 .....	6-2-1
一、概述 .....	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式 .....	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质 .....	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式 .....	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波 .....	6-2-28

六、举例 .....	6-2-44
6-2-2 连续、线性系统的最佳滤波原理 .....	6-2-67
一、连续、线性系统的最佳滤波问题 .....	6-2-67
二、等效的离散、线性系统 .....	6-2-68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的 极限情况 .....	6-2-68
2 等效的离散、线性系统 .....	6-2-72
三、连续、线性系统滤波的基本公式 .....	6-2-74
四、举例 .....	6-2-81
§ 6-3 最佳滤波的稳定性和误差分析 .....	6-3-1
6-3-1 最佳滤波的稳定性 .....	6-3-1
一、最佳滤波的稳定性概念 .....	6-3-1
二、稳定性准则 .....	6-3-2
6-3-2 最佳滤波的误差分析 .....	6-2-8
一、误差协方差矩阵微分方程和 差分方程的解析解 .....	6-3-8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解 .....	6-3-8
2. 误差协方差矩阵差分方程的解析解 .....	6-3-18
二、误差协方差矩阵的上、下界 .....	6-3-22
三、误差协方差矩阵的渐近特性 .....	6-3-33
§ 6-4 模型误差分析，最佳滤波的 发散现象和克服发散的方法 .....	6-4-1

6-4-1	模型误差分析 .....	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法 .....	6-4-1
	二、特殊情况的讨论 .....	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象 .....	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法 .....	6-4-16
	一、限定下界法 .....	6-4-16
	二、状态扩充法 .....	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波) .....	6-4-22
	四、限定记忆泸波 .....	6-4-31
	五、自适应泸波 .....	6-4-35



## § 5-3 线性系统的基本特性

### 5-3-1 引言

由上节讨论的分解原理可以知道，属于高斯、线性、二次型随机系统的最佳设计问题，总可分解为一个确定性控制问题和一个随机最佳估计问题，并且，目前这两个问题的求解，在理论上都解决了。但是，在具体应用理论上的成果于实际工程问题的设计时，就会进一步提出如下问题：

(1)是不是所有的系统都能根据一些观察数据求得其全部状态的最佳估计呢？

(2)是不是所有的系统都能找到一组控制矢量，使控制后的系统性能指标达到最小呢？

(3)系统最佳控制和状态最佳估计的误差特性怎样呢？这些都是与线性系统的基本特性：可观察性、可控性和稳定性有关的问题，下面将分别叙述。

这里要说明一点的是，系统可观察性、可控性和稳定性的分析，在系统的最佳设计中是很重要的。首先，系统可观察性和可控性的分析可使我们避免许多徒劳的工作，因为实际上只有可观察的系统，才是可最佳估计的，只有可控的系统，才是可最佳控制的。其次这种分析还可帮助我们选取合理的控制作用和观察数据。例如，一个作匀速直线运动的物体，若选择其运动的距离作为观察量，则该运动是可观察的（因为运动的位置和速度可通过距离的观察数据唯一地确定），若选择速度作为观察量，则此运动是不可观察的（因为运动的位置不能单由速度确定）。而作匀速直线运动的物体，若选择速度量作为控制信号，则此运动是可

控的（因为位置和速度均能通过速度的变化来控制），但是，若选择位置作为控制信号，则此运动就是不可控的，（因为速度无法控制）。另外系统的可观察性，可控性和稳定性的分析，对系统描述方式的典型化处理 and 综合理论是有用的。

### 5-3-2 线性系统的可观察性

#### 一、系统可观察性概念

所谓线性系统的可观察性是：

设有线性系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \\ Y(t) = C(t)X(t) \end{cases} \quad (5-3-1)$$

或

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + H(k)u(k) \\ Y(k) = L(k)X(k) \end{cases} \quad (5-3-2)$$

如果在有限时间区间： $t_0 \leq t \leq t_N$  或  $0 \leq kT \leq NT$  内，对系统输出量  $Y(t)$  或  $Y(k)$ （即  $Y(kT)$ ）的观察，能够唯一地确定系统的状态矢量  $X(t)$  或  $X(k)$ （即  $X(kT)$ ），那末，这一系统便称为是完全状态可观察的。

#### 二、系统完全状态可观察性准则

因为方程（5-3-1）第一式的解是：

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (5-3-3)$$

将上式代入方程 (5-3-1) 的第二式得:

$$Y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)X(t_0) + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (5-3-4)$$

上式中由于系统矩阵  $B(t)$ 、 $C(t)$  和转移矩阵  $\Phi(t, \tau)$  都是已知的, 并且控制函数  $u(t)$  一般也是已知的。因此, 在对系统的初始状态  $X(t_0)$  是完全可观察的情况下, 对系统的状态矢量  $X(t)$  一定也是完全可观察的。因此, 我们可用对系统初始状态的可观察性分析来代替对系统状态的可观察性分析。又因为

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= Y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= C(t)\Phi(t, t_0)X(t_0) \end{aligned} \quad (5-3-5)$$

因此, 在进行系统的可观察性分析时, 设  $u(t) = 0$  并不失去一般性。

下面讨论系统完全状态可观察性准则。

(A) 由方程 (5-3-1) 所描述的变系数、线性、连续系统是 完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$M(t_0, t_N) = \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt \quad (5-3-6)$$

是正定的。矩阵  $M(t_0, t_N)$  称为可观察性矩阵。

(证明) 方程式 (5-3-1) 在  $u(t) = 0$  时的解为:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0)$$

因此, 由轨出方程得

$$Y(t) = C(t)X(t) = C(t)\Phi(t, t_0)X(t_0) \quad (5-3-7)$$

上式被  $\Phi^T(t, t_0) C^T(t)$  前乘，并从  $t_0$  到  $t_N$  求积分得：

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) Y(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt X(t_0) \end{aligned}$$

假定矩阵  $M(t_0, t_N)$  是正定的，则  $M^{-1}(t_0, t_N)$  存在，因此由上式得：

$$X(t_0) = M^{-1}(t_0, t_N) \cdot \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) Y(t) dt \quad (5-3-8)$$

因此，任意初始状态  $X(t_0)$  都能按 (5-3-8) 式由  $Y(t)$  唯一地确定。

相反，假定系统是完全状态可观察的，但是矩阵  $M(t_0, t_N)$  是非正定的，那末，因为由矩阵  $M(t_0, t_N)$  的表示式 (5-3-6) 和 (5-3-7) 得：

$$\int_{t_0}^{t_N} Y^T(t) Y(t) dt = X^T(t_0) M(t_0, t_N) X(t_0)$$

所以存在不是零的初始状态矢量  $X(t_0)$ ，使得：

$$\int_{t_0}^{t_N} Y^T(t) Y(t) dt = X^T(t_0) M(t_0, t_N) X(t_0) = 0 \quad (5-3-9)$$

这就是说，不等于零的初始状态矢量  $X(t_0)$  不能在有限时间区间  $t_0 \leq t \leq t_N$  内，由  $Y(t)$  唯一确定，这是与系统是完全状态可观察的假定相矛盾的。因此，若系统是完全状态可观察的，则矩阵  $M(t_0, t_N)$  必需是正定的。

这样就证明了上述准则 (A)

对常系数系统, 因为  $\Phi(\tau) = e^{A\tau}$ , 所以在外作用等于零时有

$$w(t) = e^{At} x(0) \quad (5-3-10)$$

式中  $w(0) = x(t_0)$ 。这时有

$$Y(t) = CX(t) = C e^{At} X(0)$$

又因为可由矩阵的余数定理得到

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

因此有

$$\begin{aligned} Y(t) &= C \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i \right) X(0) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) CA^i \right) X(0) \end{aligned}$$

上式分别乘以  $\alpha_j(t)$ , ( $j=0, 1, \dots, n-1$ ) 并从 0 到  $t$  积分得:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \alpha_j(t) Y(t) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_j(t), \alpha_j(t)) CA^i \right) X(0) \end{aligned}$$

将上式写成分块阵形式

$$\begin{bmatrix} \int_0^t \alpha_0(\tau) y(\tau) d\tau \\ \int_0^t \alpha_1(\tau) y(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \alpha_{n-1}(\tau) y(\tau) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_0(t), \alpha_0(t)) & (\alpha_0(t), \alpha_1(t)) & \dots & (\alpha_0(t), \alpha_{n-1}(t)) \\ (\alpha_1(t), \alpha_0(t)) & (\alpha_1(t), \alpha_1(t)) & \dots & (\alpha_1(t), \alpha_{n-1}(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_{n-1}(t), \alpha_0(t)) & (\alpha_{n-1}(t), \alpha_1(t)) & \dots & (\alpha_{n-1}(t), \alpha_{n-1}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{C} \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} X(0)$$

(5-3-11)

式中  $(\cdot)$  是内积的符号，例如，对于标量实函数有  $(a_1(t), a_2(t)) = \int_0^t a_1(\tau) a_2(\tau) d\tau$ 。由于  $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  是线性独立的，因此式 (5-3-11) 中的矩阵  $\{(\alpha_j(t), \alpha_i(t))\}$  是非奇异的，因此，要根据 (5-3-11) 式由  $Y(t)$  唯一确定  $X(0)$ ，其充要条件是  $n \times (m \times n)$  矩阵

$$P = \{ C^T; A^T C^T; (A^T)^2 C^T; \dots; (A^T)^{n-1} C^T \}$$

的秩为  $n$ 。（ $n$  是  $X(0)$  的维数）。因此得下述准则：

(B) 由方程 (5-3-1) 所描述的线性、连续系统，在常系数情况下是完全状态可观察的充分必要条件是  $n \times (m \times n)$  矩阵

$$P = \{ C^T; A^T C^T; (A^T)^2 C^T; \dots; (A^T)^{n-1} C^T \}$$

(5-3-12)

的秩为  $n$ 。（ $n$  是  $X(0)$  的维数）。

(C) 由方程 (5-3-2) 所描述的变系数，线性、离散系统是完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$M(0, N) = \sum_{i=1}^N \Phi^T(i, 0) C^T(i) C(i) \Phi(i, 0) \quad (5-3-13)$$

是正定的。矩阵  $M(0, N)$  称为可观察性矩阵。

〔证明〕 设

$$Y^N = \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1)X(1) \\ C(2)X(2) \\ \vdots \\ C(N)X(N) \end{bmatrix} \quad (5-3-14)$$

则当  $u(k) = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ) 时, 由方程 (5-3-2) 得

$$X(k) = \Phi(k, 0) X(0) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (5-3-15)$$

将 (5-3-15) 式代入 (5-3-14) 式得

$$Y^N = \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1)\Phi(1, 0) \\ C(2)\Phi(2, 0) \\ \vdots \\ C(N)\Phi(N, 0) \end{bmatrix} X(0) = Z(N)X(0) \quad (5-3-16)$$

式中  $X(0) = X(t_0)$

$$Z(N) = \begin{bmatrix} C(1)\Phi(1, 0) \\ C(2)\Phi(2, 0) \\ \vdots \\ C(N)\Phi(N, 0) \end{bmatrix}$$

因为矩阵  $Z(N)$  是  $mN \times n$  阶矩阵，因此由 (5-3-16) 式得：

$$Z^T(N)Y^N = Z^T(N)Z(N)X(0) \quad (5-3-17)$$

因此，要在有限时间区间  $0 \leq kT \leq NT$  内按 (5-3-17) 式，由  $Y^N$  唯一地确定  $X(0)$  的充分必要条件是矩阵

$$\begin{aligned} M(0, N) &= Z^T(N)Z(N) \\ &= \sum_{i=1}^N \Phi^T(i, 0)C^T(i)C(i)\Phi(i, 0) \end{aligned}$$

是非奇异的，又因为  $Z^T(N)Z(N)$  是非负定的，因此，它是正定的。此时有：

$$X(0) = [Z^T(N)Z(N)]^{-1}Z^T(N)Y^N$$

这就证明了上述准则 (C)。

上述准则 (C) 的另一叙述形式是：

(C') 由方程 (5-3-2) 所描述的变系数、线性、离散系

统是完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$Z(N) = \begin{bmatrix} C(1)\Phi(1, 0) \\ C(2)\Phi(2, 0) \\ \vdots \\ C(N)\Phi(N, 0) \end{bmatrix} \quad (5-3-18)$$

的秩是  $n$  ( $n$  是系统状态矢量的维数)。

准则 (C') 是准则 (C) 证明过程的直接结果。因为准则 (C) 中可观察性矩阵  $M(0, N)$  (格兰姆矩阵) 是正定的这个条件，等价于矩阵  $Z(N)$  的秩为  $n$ 。



由上述可观察性矩阵的表示式 (5-3-13) 可知, 它的正定性与时间  $t_N$  (也就是  $N$ ) 有关。并且因为:

$$\begin{aligned} M(0, N+1) &= \sum_{i=1}^{N+1} \Phi^T(i, 0) C^T(i) C(i) \Phi(i, 0) \\ &= \sum_{i=1}^N \Phi^T(i, 0) C^T(i) C(i) \Phi(i, 0) \\ &\quad + \Phi^T(N+1, 0) C^T(N+1) C(N+1) \\ &\quad \cdot \Phi(N+1, 0) \end{aligned} \quad (5-3-19)$$

因此, 当  $M(0, N)$  正定时, 由于  $\Phi^T(N+1) C^T(N+1) C(N+1) \Phi(N+1, 0)$  是非负定的, 所以  $M(0, N+1)$  也是正定的。这就是说, 若系统在时间区间  $0 \leq kT \leq NT$  内是可观察的, 则在当  $T \geq NT$  时, 即在时间区间  $0 \leq kT \leq jT$  ( $j \geq N$ ) 内也是完全状态可观察的。显然, 对于连续系统, 这个结论也是正确的。

由于在常系数、线性、离散系统情况下有

$$\begin{cases} C(1) = C(2) = \dots = C(N) = C \\ \Phi(1, 0) = \Phi(2, 1) = \Phi(3, 2) = \dots = \Phi(N, N-1) = \Phi(T) \\ \Phi(N, 0) = \Phi^N(T) \end{cases} \quad (5-3-20)$$

因此, 将 (5-3-20) 式代入 (5-3-18) 式可得准则 (D)

(D) 由方程 (5-3-2) 所描述的线性、离散系统, 在常系数情况下是完全状态可观察的充分必要条件是  $m \times n$  阶矩阵