第五章　线性系统理论引论

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第六章　最佳泸波原理

§5—3 线性系统的基本特性

5—3—1 引言

由上节讨论的分解原理可以知道，属于高斯、线性、二次型随机系统的最佳设计问题，总可分解为一个确定性控制问题和一个随机最佳估计问题，并且，目前这两个问题的求解，在理论上都解决了。但是，在具体应用理论上的成果于实际工程问题的设计时，就会进一步提出如下的问题：

(1)是不是所有的系统都能根据一些观察数据求得其全部状态的最佳估计呢？

(2)是不是所有的系统都能找到一组控制矢量，使控制后的系统性能指标达到最小呢？

(3)系统最佳控制和状态最佳估计的误差特性怎样呢？这些都是与线性系统的基本特性：可观察性、可控性和稳定性有关的问题，下面将分别叙述。

这里要说明一点的是，系统可观察性、可控性和稳定性的分析，在系统的最佳设计中是很重要的。首先，系统可观察性和可控性的分析可使我们避免许多徒劳的工作，因为实际上只有可观察的系统，才是可最佳估计的，只有可控的系统，才是可最佳控制的。其次这种分析还可帮助我们选取合理的控制作用和观察数据。例如，一个作匀速直线运动的物体，若选择其运动的距离作为观察量，则该运动是可观察的（因为运动的位置和速度可通过距离的观察数据唯一地确定），若选择速度作为观察量，则此运动是不可观察的（因为运动的位置不能单由速度确定）。而作匀速直线运动的物体，若选择速度量作为控制信号，则此运动是可

控的（因为位置和速度均能通过速度的变化来控制），但是，若选择位置作为控制信号，则此运动就是不可控的，（因为速度无法控制）。另外系统的可观察性，可控性和稳定性的分析，对系统描述方式的典型化处理和综合理论是有用的。

5—3—2 线性系统的可观察性

一、系统可观察性概念

所谓线性系统的可观察性是：

设有线性系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)u(t) \\ Y(t)=C(t)X(t) \end{cases} \tag{5—3—1}$$

或

$$\begin{cases} X(K+1)=\Phi(k+1,k)X(k)+H(k)u(k) \\ Y(k)=C(k)X(k) \end{cases} \tag{5—3—2}$$

如果在有限时间区间：$t_0 \leqq t \leqq t_N$ 或 $0 \leqq kT \leqq NT$ 内，对系统轨出量 $Y(t)$ 或 $Y(k)$（即 $Y(kT)$）的观察，能够唯一地确定系统的状态矢量 $X(t)$ 或 $X(k)$（即 $X(kT)$），那末，这一系统便称为是完全状态可观察的。

二、系统完全状态可观察性准则

因为方程（5—3—1）第一式的解是：

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{5—3—3}$$

将上式代入方程（5－3－1）的第二式得：

$$Y(t)=C(t)\Phi(t,t_0)X(t_0)+C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

（5—3—4）

上式中由于系统矩阵 $B(t)$，$C(t)$ 和转移矩阵 $\Phi(t,\tau)$ 都是已知的，并且控制函数 $u(t)$ 一般也是已知的。因此，在对系统的初始状态 $X(t_0)$ 是完全可观察的情况下，对系统的状态矢量 $X(t)$ 一定也是完全可观察的。因此，我们可用对系统初始状态的可观察性分析来代替对系统状态的可观察性分析。又因为

$$\widetilde{Y}(t)=Y(t)-C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=C(t)\Phi(t,t_0)X(t_0) \qquad (5—3—5)$$

因此，在进行系统的可观察性分析时，设 $u(t)=0$ 并不失去一般性。

下面讨论系统完全状态可观察性准则。

（A） 由方程（5－3－1）所描述的变系数、线性、连续系统是完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$M(t_0,t_N)=\int_{t_0}^{t_N}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt$$

（5—3—6）

是正定的。矩阵 $M(t_0,t_N)$ 称为可观察性矩阵。

〔证明〕 方程式（5－3－1）在 $u(t)=0$ 时的解为：

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0)$$

因此，由轨出方程得

$$Y(t)=C(t)X(t)=C(t)\Phi(t,t_0)X(t_0) \qquad (5—3—7)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

上式被$\Phi^T(t,t_0)C^T(t)$前乘，并从t_0到t_N求积分得：

$$\int_{t_0}^{t_N}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)Y(t)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(T)\Phi(t,t_0)dt\,X(t_0)$$

假定矩阵$M(t_0,t_N)$是正定的，则$M^{-1}(t_0,t_N)$存在，因此由上式得：

$$X(t_0)=M^{-1}(t_0,t_N)\cdot\int_{t_0}^{t_N}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)Y(t)dt$$

$$(5-3-8)$$

因此，任意初始状态$X(t_0)$都能按（5－3－8）式由$Y(t)$唯一地确定。

相反，假定系统是完全状态可观察的，但是矩阵$M(t_0,t_V)$是非正定的，那末，因为由矩阵$M(t_0,t_N)$的表示式（5－3－6）和（5－3－7）得：

$$\int_{t_0}^{t_N}Y^T(t)Y(t)dt=X^T(t_0)M(t_0,t_N)X(t_0)$$

所以存在不是零的初始状态矢量$X(t_0)$，使得：

$$\int_{t_0}^{t_N}Y^T(t)Y(t)dt=X^T(t_0)M(t_0,t_N)X(t_0)=0$$

$$(5-3-9)$$

这就是说，不等于零的初始状态矢量$X(t_0)$不能在有限时间区间$t_0\leq t\leq t_N$内，由$Y(t)$唯一确定，这是与系统是完全状态可观察的假定相矛盾的。因此，若系统是完全状态可观察的，则矩阵$M(t_0,t_N)$必需是正定的。

这样就证明了上述准则（A）

对常系数系统，因为$\Phi(\tau)=e^{A\tau}$，所以在外作用等于零时有

$$x(t)=e^{At}x(0) \tag{5-3-10}$$

式中$x(0)=x(t_0)$。这时有

$$Y(t)=CX(t)=Ce^{At}X(0)$$

又因为可由矩阵的余数定理得到

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)A^i$$

因此有

$$Y(t)=C\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)A^i\right)X(0)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)CA^i\right)X(0)$$

上式分别乘以$\alpha_j(t)$，($j=0,1,\cdots,n-1$)并从0到t积分得：

$$\int_0^t\alpha_j(t)Y(t)$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_j(t),\alpha_j(t))CA^i\right)X(0)$$

将上式写成分块阵形式

$$
\begin{bmatrix} \int_0^t \alpha_0(t)y(t)dt \\ \int_0^t \alpha_1(t)y(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^t \alpha_{n-1}(t)y(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_0(t),\alpha_0(t)) & (\alpha_0(t),\alpha_1(t)) & \cdots & (\alpha_0(t),\alpha_{n-1}(t)) \\ (\alpha_1(t),\alpha_0(t)) & (\alpha_1(t),\alpha_1(t)) & \cdots & (\alpha_1(t),\alpha_{n-1}(t)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{n-1}(t),\alpha_0(t)) & (\alpha_{n-1}(t),\alpha_1(t)) & \cdots & (\alpha_{n-1}(t),\alpha_{n-1}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} X(0)
$$

(5-3—11)

式中（·）是内积的符号，例如，对于标量实函数有（$\alpha_1(t)$，$\alpha_2(t)$）$=\int_0^t \alpha_1(t)\alpha_2(t)dt$．由于$\alpha_0(t)$，$\alpha_1(t)$，…$\alpha_{n-1}(t)$是线性独立的，因此式（5－3－11）中的矩阵$[(\alpha_j(t),\alpha_i(t))]$是非奇异的，因此，要根据（5－3－11）式由Y（t）唯一确定X（0），其充要条件是$n\times(m\times n)$矩阵

$$P=[C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]$$

的秩为n．（n是X（0）的维数）．因此得下述准则：

（B） 由方程（5－3－1）所描述的线性、连续系统，在常系数情况下是完全状态可观察的充分必要条件是$n\times(m\times n)$矩阵

$$P=[C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]$$

（5—3—12）

的秩为n．（n是X（0）的维数）．

（C） 由方程（5－3－2）所描述的变系数，线性、离散系统是完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$M(0,N)=\sum_{i=1}^{N}\Phi^T(i,0)C^T(i)C(i)\Phi(i,0)$$

(5—3—13)

是正定的·矩阵M(0,N)称为可观察性矩阵·

〔证明〕 设

$$Y^N=\begin{bmatrix}Y(1)\\Y(2)\\\vdots\\Y(N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C(1)X(1)\\C(2)X(2)\\\vdots\\C(N)X(N)\end{bmatrix}\qquad(5-3-14)$$

则当$u(k)=0$ $(k=0,1,2,\dots,N,)$时，由方程(5－3－2)得

$$X(k)=\Phi(k,0)X(0)\qquad(k=1,2,\dots,N)$$

(5—3—15)

将(5－3－15)式代入(5－3－14)式得

$$Y^N=\begin{bmatrix}Y(1)\\Y(2)\\\vdots\\Y(N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C(1)\Phi(1,0)\\C(2)\Phi(2,0)\\\vdots\\C(N)\Phi(N,0)\end{bmatrix}X(0)=Z(N)X(0)$$

(5—3—16)

式中 $X(0)=X(t_0)$

$$Z(N)=\begin{bmatrix}C(1)\Phi(1,0)\\C(2)\Phi(2,0)\\\vdots\\C(N)\Phi(N,0)\end{bmatrix}$$

因为矩阵Z（N）是$mN\times n$阶矩阵，因此由（5－3－16）式得：

$$Z^T(N)Y^N = Z^T(N)Z(N)X(0) \qquad (5\text{—}3\text{—}17)$$

因此，要在有限时间区间$0\leq k\,T\leq N\,T$内按（5－3－17）式，由Y^N唯一地确定X（0）的充分必要条件是矩阵

$$M(0, N) = Z^T(N)\cdot Z(N)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \Phi^T(i, 0)C^T(i)C(i)\Phi(i, 0)$$

是非奇异的，又因为$Z^T(N)Z(N)$是非负定的，因此，它是正定的。此时有：

$$X(0) = [Z^T(N)Z(N)]^{-1}Z^T(N)Y^N$$

这就证明了上述准则（C）。

上述准则（C）的另一叙述形式是：

（C′）　由方程（5－3－2）所描述的变系数、线性、离散系统是完全状态可观察的充分必要条件是矩阵

$$Z(N) = \begin{bmatrix} C(1)\Phi(1, 0) \\ C(2)\Phi(2, 0) \\ \vdots \\ C(N)\Phi(N, 0) \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}3\text{—}18)$$

的秩是n（n是系统状态矢量的维数）。

准则（C′）是准则（C）证明过程的直接结果。因为准则（C）中可观察性矩阵M（0，N）（格兰姆矩阵）是正定的这个条件，等价于矩阵Z（N）的秩为n。

由上述可观察性矩阵的表示式（5－3－13）可知，它的正定性与时间 t_N（也就是 N）有关．并且因为：

$$M(0,N+1)=\sum_{i=1}^{N+1}\Phi^T(i,0)C^T(i)C(i)\Phi(i,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Phi^T(i,0)C^T(i)C(i)\Phi(i,0)$$

$$+\Phi^T(N+1,0)C^T(N+1)C(N+1)$$

$$\cdot\Phi(N+1,0) \qquad (5-3-19)$$

因此，当 $M(0,N)$ 正定时，由于 $\Phi^T(N+1)C^T(N+1)C(N+1)\Phi(N+1,0)$ 是非负定的，所以 $M(0,N+1)$ 也是正定的．这就是说，若系统在时间区间 $0\leq kT\leq NT$ 内是可观察的，则在当 $jT\geq NT$ 时，即在时间区间 $0\leq kT\leq jT$（$j\geq N$）内也是完全状态可观察的．显然，对于连续系统，这个结论也是正确的．

由于在常系数、线性、离散系统情况下有

$$\begin{cases} C(1)=C(2)=\cdots=C(N)=C \\ \Phi(1,0)=\Phi(2,1)=\Phi(3,2)=\cdots=\Phi(N,N-1)=\Phi(T) \\ \Phi(N,0)=\Phi^N(T) \end{cases}$$

$$(5-3-20)$$

因此，将（5－3－20）式代入（5－3－18）式可得准则（D）

（D） 由方程（5－3－2）所描述的线性、离散系统，在常系数情况下是完全状态可观察的充分必要条件是 $mN\times n$ 阶矩阵

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com