新數學

中學適用

半羣學社編著

第四册

上卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社 編著

第四册

上 卷

聯合書院出版社

總編輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何兆倫 理學士（數學），英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學） 教育文憑

經理編輯

彭錫恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

序　言

本套教科書共有五册，第N册適合中學N年級之用，其中N = 1, 2, 3, 4, 5.本書計劃供給中學生全部數學內容以應考香港中學教育文憑試之新數學課程。

此等課程內容，一般稱爲新數學，這是不大正確的•最新發明的數學理論是用論文形式登載於數學雜誌上，這些資料當然不能列於教科書內•本書內容雖不包括最新的理論，但仍與傳統的教材有別，故傳用新數之名，實際上這些理論最新的也有數十年歷史。

新數學課程是中學數學教學現代化的成果，近年來世界很多地區都各自實施"數學改進方案"，並分別依照此等方案以印行新教科書•這些教科書主要是適應參加某一個改進方案的學校的學生們，對本港學生不大合適；他們的教科書主要祇適用於說他們語言的學生，本港中學生絕大多數來自中文小學，由經驗知他們學習數學時所遭遇的困難，不是數學上的而是語文（英文）上的•本書特點是用盡量淺易的英語，同時有中文本對照；且例題之取材多就本港常見之事物，以學生觀點來說，是比較容易明白和比較實用的。

本書的主要目的在激發學生們思考，顯示近代數學結構的特徵，鼓勵學習數學的興趣，發展清楚思考和澈底明瞭的習慣，這也是學習數學的目的。

本書自1965年出版以來曾加修改，其原因一方面是接納教師們的寶貴建議，另一方面是隨着教育文憑試之課程而更改，以求合用，實非得已，伏祈諒察。

周紹棠

一九七六年於香港

朱利士昂利潘加里
(1854–1912)

朱利士昂利潘加里
(1854–1912)

曾有人問英國著名哲學家及數學家羅素，誰是當代最傑出的人物•羅素答："是潘加里 —— 我指的是昂里，不是雷蒙。" 雷蒙潘加里是當時法國的政治家，1913年任法國總統。

少年時代，潘加里並無特出的數學天才，他廿一歲那年入鑛冶學校專門研究工程學科•其後他致力於數學，並作出鉅大貢獻•他最偉大的工作是在高等代數學及函數理論的範圍以及將此等學科應用於天文學及物理學。

潘加里視力不佳，故學習幾何與繪圖都感困難，或許為此原因，致使他在巴黎的工業專門學校肄業時，幾何一科未列前茅•潘加里有超常的記憶力，他能把他所致力的各門學科的重要結果牢記心中。

第四册
上卷目錄

1

第一章

陣式及行列式

1.1 陣式的構成

下表列出了約翰，大衞和瑪麗在十五歲生辰時的體重（公斤計）及高度（公分計）：

	體　重	高　度
約翰	40	145
大衞	38	132
瑪麗	39	127

在他們接連着的兩個生辰所量得的體重和高度依照上表次序可以列成兩個表如下：

16歲生辰的紀錄

45	150
42	138
40	130

17歲生辰的紀錄

49	152
45	150
42	130

由此試答下列問題：

1) 約翰在16歲生辰時的體重是多少公斤？
2) 瑪麗在17歲生辰時的高度是幾公分？
3) 大衞在16歲生辰時的體重是幾公斤？
4) 在這兩年內約翰的體重增加了幾公斤？
5) 瑪麗在17歲生辰時比較15歲生辰時高了幾公分？

在數學上及日常生活裏我們有時會遇到或考慮整堆列成長方形的數字，這樣排列而成的一堆數字就稱爲**陣式**（或矩陣）。陣式裏的每一數字稱爲這陣式的**元**。陣式裏的元多是取自同一集的元。例如下列各陣式的元是取自整數集：

$$A = \begin{pmatrix} -5 & +12 & -3 \\ 0 & +2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & +6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ +3 \\ +4 \end{pmatrix}$$

我們常用英文大楷字母以表示一陣式，如上例所示。

在一陣式內，同一橫線上的元組成一列，同一縱線上的元組成一行。例如在陣式A內，第一列是 $(-5\ \ +12\ \ -3)$，第二列是 $(0\ \ +2\ \ -4)$，第一行是 $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$， 第二行是 $\begin{pmatrix} +12 \\ +2 \end{pmatrix}$，第三行是 $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$。這陣式稱為 2×3 陣式（讀作2乘3陣式），第一數字"2"是指列數，第二數字"3"是指行數。B是 2×2 陣式，C是 3×1 陣式。一個列數和行數相等的陣式稱為**方陣**，例如B是一方陣。一個 $m \times n$ 陣式又稱為 $m \times n$ 級陣式。這裏m和n必然是正整數。

1.2 轉置陣式

我們又將約翰，大衛，瑪麗在十五歲生辰量得的體重和高度列成另一表如下：

	約翰	大衛	瑪麗
體重	40	38	39
高度	145	132	127

這個表和第1頁的第一個表提供相同的資料，所不同的地方，這表內三個體重數字在同一橫列而在另一表則在同一直行。

有時為方便起見我們會用另一法來列表。在第1頁的第二和第三表也可以列成：

在16歲生辰	在17歲生辰
45, 42, 40	49, 45, 42
150, 138, 130	152, 150, 130

一般情形下，任與一陣式，可將它的行和列互調而成另一陣式；已與陣式的第一列作為新陣式的第一行，以下依此，如是所得的新陣式，稱為原陣式的**轉置陣式**。若以A表原陣式則轉置陣式通常以A′表示。

例

$$若\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ 則\ \ A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

試寫出A′的轉置陣式。

A的轉置陣式的轉置陣式是否和A相同呢？

習題1A

1) 以口答下列陣式所提供的資料：

a) 幾個家庭內的孩子數目

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{男孩} & \text{女孩} \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) 四班內學生的人數

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{男生} & \text{女生} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 27 & 13 \\ 30 & 10 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) 一星期內交通失事次數

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} \text{星期日} & \text{星期一} & \text{星期二} & \text{星期三} & \text{星期四} & \text{星期五} & \text{星期六} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{香港} \\ \text{九龍} \\ \text{新界} \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 34 & 30 & 28 & 37 & 29 & 20 \\ 15 & 29 & 40 & 58 & 43 & 37 & 50 \\ 23 & 7 & 5 & 4 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) 一次某校運動會中，各社所得分數

$$\begin{array}{c c c} & \begin{array}{cccc} \text{東} & \text{南} & \text{西} & \text{北} \end{array} & (\text{社名}) \\ \begin{array}{c} \text{男子} \\ \text{女子} \end{array} & \begin{pmatrix} 72 & 48 & 32 & 27 \\ 0 & 18 & 33 & 5 \end{pmatrix} & \end{array}$$

e) 每日三餐的消費（港元為單位）

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{早餐} & \text{午餐} & \text{晚餐} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.2 & 2.3 & 4.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

f) 三種不同蛋糕的成份（除蛋以個計之外，其他的單位是安士）

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \text{脂肪} & \text{糖} & \text{麵粉} & \text{蛋} & \text{其他} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1.3 & 42 & 125 & 4 & 12 \\ 2.2 & 53 & 125 & 3 & 31 \\ 0 & 21 & 160 & 8 & 29 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) 以陣式表示下列各資料

a) 在A班內有學生25人喜愛古典音樂，8人喜愛流行音樂；
在B班內有學生18人喜愛古典音樂，23人喜愛流行音樂。

b) 建築一座七層樓宇，承造商人需僱用3個繪圖員，25個技術員，172個熟練工人，300個非熟練工人；
建築一座14層的樓宇，需僱用6個繪圖員，25個技術員180個熟練工人，400個非熟練工人；

建築一座21層樓的房子需僱用6個繪圖員，27個技術員，200個熟練工人，450個非熟練工人。

c) 在一種食物X內含有120單位維他命A，240單位維他命B，零單位維他命C；在食物Y內含有125單位維他命A，230單位維他命B，150單位維他命C；在食物Z內含有80單位維他命A，零單位維他命B，零單位維他命C。

d) 在一個月內，甲家庭支付租金\$50，食用\$70，其他消費\$25；乙家庭支付租金\$120，食用\$120，其他消費\$75；丙家庭支付租金\$0，食用\$180，其他消費\$100。

e) 瑪麗的購物單內列有：鷄蛋20枚，肉5磅，蔬菜8磅，魚2磅；惠珍的購物單列有：鷄蛋8枚，肉2磅，蔬菜10磅，魚0磅。

f) 在第一個方程內x的係數是8，y的係數是 −4，z的係數是5; 在第二方程內 x的係數是 −2，y的係數是0，z的係數是7。

3) 下列那一個括弧內的數字排列成陣式？

a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$　b) (3)　c) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & \end{pmatrix}$

d) $(3 \quad 9 \quad 7)$　e) $(0 \quad 0 \quad 0)$　f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $(7 \quad 3 \quad 1)$　h) $(-3 \quad -2)$　i) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

j) $(5 \quad 4)$　k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　l) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) 下列各陣式的級數是什麼？試指出那個是方陣。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　$C = (2 \quad 4 \quad 7 \quad 8)$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　$E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$　$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$G = (5)$　$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$　$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) 寫出題4內各陣式的轉置陣式。這些轉置陣式的級數是什麼？

1.3 相等陣式

兩個陣式相等，當且僅當它們的級數相同，且各對應元相等。例如$\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1+2 & 0+4\\2+3 & 3+3\end{pmatrix}$相等，這個可以寫爲$\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 0+4\\2+3 & 3+3\end{pmatrix}$。

兩陣式$(1 \quad 2 \quad 3)$和$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$是不相等的，雖然它們的元相同但它們的級數是不等的；因第一陣式的級數是1×3而第二陣式是3×1。

例：

若 $\begin{pmatrix}x+1\\y-8\\z+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$, 試求x, y和z。

兩陣式既相等，它們的對應元也相等，故有

$$\begin{aligned} x+1 &= 5 &\iff& & x &= 4\\ y-8 &= 3 &\iff& & y &= 11\\ z+6 &= 7 &\iff& & z &= 1\end{aligned}$$

習題1B

求下列各方程內的x, y, z值：—

1) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}x+2\\y+4\\z-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}2x+7\\3y-4\\5z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\9\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}5-x\\8-y\\10-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\3y\\4z\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}x+4\\2y+7\\4z-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-5\\y\\-6\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}3 & -2x\\0 & y\\8 & -z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & x-6\\0 & 6-y\\8 & 7\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\0 & -y & 0\\0 & 0 & 4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -8\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}4-x & -6y & 2\\x & 0 & y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7+z\\x & 0 & y+z\end{pmatrix}$

1.4 陣式加法

兩間學校男女生的人數如下列兩陣式所示：

$$\begin{array}{c} \\ 中一 \\ 中二 \\ 中三 \\ 中四 \\ 中五 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 男生 & 女生 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 203 & 147 \\ 123 & 62 \\ 145 & 37 \\ 78 & 25 \\ 88 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 中一 \\ 中二 \\ 中三 \\ 中四 \\ 中五 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 男生 & 女生 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 160 & 40 \\ 38 & 24 \\ 43 & 40 \\ 128 & 37 \\ 103 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

若將兩校合計，試求每級男女生的總數。

要解答這問題，須做幾次加法，即將上列兩陣式的對應元相加，而作爲另一個同級的陣式的對應元，那麼這個新的陣式便可作爲上述問題的答案。這樣構成的新陣式稱爲原有兩陣式的**和**。但顯而易見，我們不能將任何兩陣式相加；祇有同級的陣式才能相加，加法的結果是另一同級陣式，它的元是原來兩陣式的對應元的和。

例1

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

則
$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+0 & 2+3 \\ 4+5 & 7+1 \\ 3+2 & 5+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 2

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

試計算

a) $A + B$; b) $B + A$; c) $C + D$; d) $D + C$.

由這些結果我們知道陣式加法可以適合什麼定律呢？

例 3

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

試計算

a) $A + B$, b) $(A + B) + C$,

c) $B + C$,　　　　d) $A + (B + C)$.

比較b)和d)的結果我們知道陣式加法可以適合什麼定律呢？

例4

計算下列各加法：—

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $(8 \quad -6) + (0 \quad 0)$　　d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

由例4可知有些陣式加於別個陣式中仍不改變別個陣式的，這些陣式，因爲它們每個元都是零，故稱爲**零陣式**，例如$(0 \quad 0 \quad 0)$是一個1×3級的零陣式；而$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是一個$2 \times 2$級的零陣式·其實一個零陣式是一集陣式中加法的中性元·一般零陣式可用**0**來表示(若要表現該式的級數則可以用 $\mathbf{0}_{m \times n}$ 來表示)·

已與一陣式**A**，可有另一同級陣式**B**存在而使**A** + **B** = **0**，此時**B**稱爲**A**的**加法逆元**或**負A**·**B**的元是**A**內對應元的加法逆元，負**A**可用$-\mathbf{A}$表示·

例如，若　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$　則　$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

又我們亦將 $A - B$ 定義爲 $A + (-B)$.

習題1C

1) 計算：—

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　　b) $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$　　e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{4} & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$　　g) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

試求：

a) $(A + B) + C$ b) $(A + C) + B$
c) $A + A + A$ d) $A + B - C$
e) $A - B - C$ f) $B + B + B + B$

3) 下列那一雙陣式可以相加（即級數相同）？並求它們的和的負值。

$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

$D = (0 \quad 3 \quad 5)$ $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $F = (0)$

$G = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $H = (0 \quad -1 \quad -2)$ $K = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $M = (5)$ $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) 設 $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -5 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

試寫出下列各陣式：—

i) $A + B$ ii) $-A$ iii) $-B$
iv) $(-A) + (-B)$ v) $-(A + B)$

$(-A) + (-B) = -(A + B)$對嗎？

1.5 數量乘法

設$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，試考慮$A + A + A$的結果。這等於陣式$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 3 & 15 \end{pmatrix}$。照一般代數的加法，$A + A + A$可以簡寫爲$3A$，現在我們是用一個數量來乘陣式，這與普通乘法中兩個相類似的數量（即同爲實數）相乘不同。當我們將一集陣式和一集實數相提並論時，這些實數就稱爲**數量**，而將一數量乘一陣式則稱爲數量乘法。

由相同陣式重複相加的結果，使我們想起，以一數量乘一陣式，結果是另一個同級陣式，其中每元等於原陣式的對應元乘以該數量。一般情形下，

$$a\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq \\ ar & as \end{pmatrix}$$

其中各字母表實數。

例 1

$$4\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 1\\4\times 4\\4\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\16\\28\end{pmatrix}$$

例 2

設 $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-6\\-3&7\end{pmatrix}$

則

$$\begin{aligned}3A+5B&=3\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}2&-6\\-3&7\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}15&9\\6&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&-30\\-15&35\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}25&-21\\-9&47\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 3

設 $A=\begin{pmatrix}1&7\\3&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\4&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}$

I) 試計算

a) $4A$　　b) $6A$　　c) $10A$

d) $4B$　　e) $(-1)B$　　f) $3B$

g) $(-5)C$　　h) $(-2)C$　　i) $(-7)C$

由此可以得些什麼結論？

II) 試計算

a) $4A+4B$　　b) $4(A+B)$

c) $8B+8C$　　d) $8(B+C)$

e) $(-5)A+(-5)C$　　f) $(-5)(A+C)$

由此可以得些什麼結論？

III) 試計算

a) $4(5A)$　　b) $20A$

c) $2[(-3)B]$　　d) $(-6)B$

e) $(-2)[(-4)C]$　　f) $8C$

由此可以得些什麼結論？

例4

試計算 $(-1)\begin{pmatrix}1&3\\7&5\end{pmatrix}$ 並將結果與 $\begin{pmatrix}1&3\\7&5\end{pmatrix}$ 的負值比較。

例5

設 $A=\begin{pmatrix}1&3\\7&5\end{pmatrix}$，試計算 $(-3)A$ 並將結果和$3A$的負數比較。

由上面各例，我們可以預料下列結果，其中A, B表陣式而 p, q 表數量。

1) $(p+q)A = pA + qA$
2) $p(A+B) = pA + pB$
3) $p(qA) = (pq)A$
4) $(-1)A = -A$
5) $(-p)A = -(pA)$

Ap亦可寫成 pA.

上列各種性質是不難証明的•我們將應用兩個2 X 2級的陣式來証明性質2)

設 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} t & u \\ x & y \end{pmatrix}$,

則

$$\begin{aligned} p(A+B) &= p\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & u \\ x & y \end{pmatrix}\right] \\ &= p\begin{pmatrix} a+t & b+u \\ c+x & d+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa+pt & pb+pu \\ pc+px & pd+py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa & pb \\ pc & pd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} pt & pu \\ px & py \end{pmatrix} \\ &= p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} t & u \\ x & y \end{pmatrix} \\ &= pA + pB \end{aligned}$$

例

試應用2 X 2級陣式來証明其他性質•

習題1D

1) 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

試計算：—

a) $3A + 4B$
b) $5C - 6B$
c) $3B + 2A - 5C$
d) $4A + 2C - 7B$

2) 計算：

a) $5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $4\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

c) $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $5(-3 \quad -2) - 4(-3 \quad 0)$

e) $-5\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$