函授自学丛书

方程与不等式

辽宁教育学院函授部编

说　　明

为了解决中学数学教学的急需，我们试编了一套数学函授自学丛书，它包括初等数学的主要内容及某些高等数学的初步知识。本书就是这套丛书中的一册。

这套丛书的初稿曾经有关市、地教育学院的同志审阅，并提出了宝贵的修改意见，在此表示感谢。

但由于我们的水平所限，加之时间仓促，书中难免仍有不妥之处，切望读者批评指正。

辽宁教育学院函授部数学教研室

一九七八年七月

目　　录

方 程 与 不 等 式

第一章　方程和方程组

这份材料，先讨论方程和方程组的同解变形问题以及一些代数方程和方程组的解法。重点放在同解变形问题上。

对于中学教师来说，只掌握方程和方程组的解法是不够的，还必须把方程和方程组的同解变形问题搞清楚，因为这个问题是同方程和方程组的解法密切相关的，是方程和方程组解法的理论根据。弄清方程的同解变形问题，还将会明白解方程时为什么有时出现增根或失去根的原因。

希望大家遵照毛主席关于“对任何事情都要问一个为什么”的教导进行学习，这就是说，当使方程和方程组变形求解时，要弄懂其中的道理，不要只知其当然而不知其所以然。我们之所以把方程和方程组的同解变形问题放在比较重要的地位上进行处理，用意也就在这里。

第一节　方程的同解变形

含有未知数的等式，叫做**方程**。在方程里有几个未知数，就叫做**几元方程**。

为了书写简单起见，本节只就一元方程进行讨论，并用 $f(x)$，$g(x)$等记号代表以 x 为未知数的式子。这样，含未知数 x 的方程的一般形式就是：

$$f(x)=g(x)。$$

其中某一边可能不含未知数，例如

$$\frac{x-1}{2x}=4。$$

下面的概念，有些在中学教材里没有出现，但是为了叙述简明起见，我们还是要引用的。

使方程的两边都有意义的未知数的值，叫做方程的未知数的**允许值**。方程的未知数所有允许值的全体，叫做方程的未知数**允许值集合**。例如，在实数范围内，方程

$$\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$$

的未知数 x 的允许值集合，是除去 5 和 6 的全体实数。

使方程两边的值相等的未知数的值，叫做方程的**解**。一元方程的解，也叫做它的**根**。

同一个方程，在不同的数的范围内，解的个数可能不同。例如，方程

$$(x-1)(x^2-2)(x^2+4)=0。$$

在有理数范围内，只有一个解：$x=1$；在实数范围内，有三个解：$x_1=1$，$x_2=\sqrt{2}$，$x_3=-\sqrt{2}$；在复数范围内，还要增加两个解：$x_4=2i$，$x_5=-2i$。

没有解的方程，叫做**矛盾方程**。例如，方程

$$x+1=x+2。$$

方程的所有解的全体，叫做方程的**解集合**。

显然，方程的解必定是未知数的允许值，但反过来，未知数的允许值不一定是方程的解。例如，方程

$$x^2=\frac{3}{x+2}。$$

零是未知数的一个允许值，但不是这个方程的解。

一个方程如果它的未知数所有允许值都是它的解，有的书特称之为**恒等式**，并把非恒等式的方程才叫做方程。我们不做这种区别。

求方程的一切解或者确定方程无解的过程，叫做**解方程**。

两个方程，如果第一个方程的每个解都是第二个方程的解，而第二个方程的每个解也都是第一个方程的解的话，即两个方程的解集合一致时，那么我们就说这两个方程同解。

同解的概念是相对的，因为同一个方程，在不同的数的范围内，解的个数可能不同，从而对两个方程来说，即或在某种数的范围内同解，但在扩大了的数的范围内可能不同解。例如，方程

$$(x-1)(x^2+1)=0 \text{ 和 } (x-1)(x^2+4)=0$$

虽然在实数范围内同解，都是只有一个解而且相同，是$x=1$，但当扩大到复数的范围内时，这两个方程都增加了两个解，前者增加的解是$x=i$，$x=-i$，后者增加的解是$x=2i$，$x=-2i$，因此，在复数范围内，就不同解了。

在解方程时，往往要把方程变形，以使解容易求出。但是，变形后的方程可能与原方程同解，也可能不同解。

把方程变成和它同解的另一个方程，这叫做方程的**同解变形**。

关于方程的同解变形，有以下几个定理：

定理 1 如果$g(x)$对方程

$$f(x)=f_1(x) \qquad (A)$$

的未知数所有允许值都有意义，或者对方程(A)的未知数某些允许值无意义但这些数值不是方程(A)的解；那么方程(A)和方程

$$f(x)+g(x)=f_1(x)+g(x) \qquad (B)$$

同解。

这个定理可简述为下面的法则：

方程的两边可以加上（或减去）相同的式子。

证明 设α是方程(A)的任意一个解，即$f(\alpha)=f_1(\alpha)$。根据定理的假设，$g(\alpha)$有意义，所以可得：$f(\alpha)+g(\alpha)=f_1(\alpha)+g(\alpha)$ 即α也是方程(B)的解。

反过来，设β是方程(B)的任意一个解，即$f(\beta)+g(\beta)=f_1(\beta)+g(\beta)$，从这个等式两边同减去一个确定的数$g(\beta)$得$f(\beta)=f_1(\beta)$，即$\beta$也是方程(A)的解。

所以，方程(A)和方程(B)同解。

下面的移项法则，就是以这个定理为根据的。

移项法则：加式可由方程一边变号后移到另一边。

实际上，在方程

$$f(x)+g(x)=\varphi(x)$$

的两边加上相同的式子$-g(x)$后，所得的方程

$$f(x)=\varphi(x)-g(x)$$

与原方程同解。在这个方程中，加式$g(x)$改变符号后被移到另一边。

推论　每个方程$f_1(x)=f_2(x)$，可用形如$f(x)=0$的同解方程替换，其中$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$。

注意　如果$g(x)$对方程(A)的某个解无意义，那么方程(A)和方程(B)显然不同解。因此，在实际考察方程(A)和(B)是否同解时，只看使$g(x)$无意义的x值是否是方程(A)的解即可。

例如，$\frac{1}{x-1}$对$x=1$无意义、而且$x=1$是方程$2x+3=x+4$的解，所以方程$2x+3=x+4$与$2x+3+\frac{1}{x-1}=x+4+\frac{1}{x-1}$不同解。

再如，$\frac{1}{x-2}$对$x=2$虽无意义，但$x=2$不是方程$2x+3=x+4$的解，所以方程$2x+3=x+4$与$2x+3+\frac{1}{x-2}=x+4+\frac{1}{x-2}$同解。

定理2　如果$g(x)$对于方程

$$f(x)=f_1(x) \qquad (A)$$

的未知数所有允许值都有意义且不为零，那么方程(A)和方程

$$f(x)g(x)=f_1(x)g(x) \qquad (B)$$

同解。

这个定理可简述为如下的法则：

方程的两边可以用一个不等于零的式子乘。

证明　设α是方程(A)的任意一个解，即$f(\alpha)=f_1(\alpha)$。

这时，$g(\alpha)$有意义，用$g(\alpha)$去乘$f(\alpha)=f_1(\alpha)$两边，得$f(\alpha)g(\alpha)=f_1(\alpha)g(\alpha)$，即$\alpha$也是方程(B)的解。

反过来，设β是方程(B)的任意一个解，即$f(\beta)g(\beta)=f_1(\beta)g(\beta)$。$g(\beta)$有意义且不等于零。因此，用$\frac{1}{g(\beta)}$乘等式$f(\beta)g(\beta)=f_1(\beta)g(\beta)$两边，得$f(\beta)=f_1(\beta)$，即$\beta$也是方程(A)的解。

所以，方程(A)和(B)同解。

注：如果$g(x)$虽然对方程(A)的未知数某些允许无意义，但这些数值不是方程(A)的解，并且$g(x)$对方程(A)未知数的其它允许值都有意义且不为零的话，则本定理显然也是成立的。

推论 方程的两边可以同乘上一个任何不是零的数。

注意1 因为使$g(x)=0$的数值都是方程(B)的解，所以，如果某个数值使$g(x)=0$，并且不是方程(A)的解的话，那么方程(A)和(B)一定不同解，这个数值是原方程(A)的**增根**。

注意2 因为使$g(x)$无意义的数值都不是方程(B)的解，所以，如果某数值使$g(x)$无意义，并且是方程(A)的解的话，那么方程(A)和(B)也一定不同解，这个数值是原方程**失去的根**。

例1，方程

$$2x+1=x+2 \qquad (1)$$

的两边乘以$x-2$时，由于2使$x-2$等于零，并且$x=2$不是方程(1)的解，所以方程(1)和下面的方程

$$(2x+1)(x-2)=(x+2)(x-2) \qquad (2)$$

不同解。实际上，方程（1）只有一个解：$x=1$，而方程（2）有两个解：$x=1$ 和 $x=2$。$x=2$ 是方程（1）的增根。

例 2．方程

$$x^2=3x-2 \qquad (1)$$

的两边乘以 $\frac{1}{x-1}$ 时，由于 1 使 $\frac{1}{x-1}$ 无意义，并且 $x=1$ 是方程（1）的解，所以方程（1）和下面的方程

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{3x-2}{x-1} \qquad (2)$$

不同解。实际上，原方程（1）有两个解：$x=1$，$x=2$．而方程（2）只剩下一个解：$x=2$。$x=1$ 是原方程（1）失去的根。

例 3．如果用 $\frac{x-2}{x-1}$ 去乘方程 $2x+1=x+2$ 的两边，那么既会出现增根也会失掉根。为什么？请读者自己解答。

解方程，有时要对方程的两边分别施行恒等变形，这时能否保持同解？对这一问题有下面的定理：

定理 3　假定对方程

$$f(x)=f_1(x) \qquad (A)$$

的两边分别施行恒等变形后得到方程

$$g(x)=g_1(x)\text{，} \qquad (B)$$

并且至少有下列情形之一，那么方程（A）和（B）同解。

（1）未知数的允许值集合不变；

（2）未知数的允许值集合虽然扩大了，但增加的允许值不是所得方程（B）的解；

（3）未知数的允许值集合虽然缩小了，但减少的允许值不是原方程(A)的解。

证明： 如果α是方程(A)的任意一个解，即$f(\alpha)=f_1(\alpha)$，则不论那种情形，$g(\alpha)$和$g_1(\alpha)$都必定有意义。由于两边施行恒等变形，所以$f(\alpha)=g(\alpha)$，$f_1(\alpha)=g_1(\alpha)$，因而$g(\alpha)=g_1(\alpha)$，即α也方程(B)的解。

反过来，如果β是方程(B)的任意一个解，即$g(\beta)=g_1(\beta)$，则不论那种情形，$f(\beta)$和$f_1(\beta)$也都必定有意义。由于两边施行恒等变形，所以$g(\beta)=f(\beta)$，$g_1(\beta)=f_1(\beta)$，因而$f(\beta)=f_1(\beta)$，即β也是方程(A)的解。

所以，方程(A)和方程(B)同解。

注意1 方程不论施行什么变形，如果未知数的允许值集合扩大而且增加的允许值是变形后所得方程的解，那么这个值当然不满足原方程，而是原方程的增根。因此，这时的变形不是同解的。

注意2 方程不论施行什么变形，如果未知数的允许值集合缩小而且减少的允许值是原方程的解，那么这个值当然不满足变形后所得的方程，而是原方程失去的根。因此，这时的变形也不是同解的。

例4. 方程

$$\frac{x^2-1}{x-1}=0 \qquad (1)$$

经恒等变形后，得方程

$$x+1=0。 \qquad (2)$$

这个方程未知数允许值虽然比方程（1）增加一个数1，但1不是这个方程的解，因此这个方程与原方程同解。

实际上，这两个方程都是只有一个解： $x=-1$。

但是，如果用 $x-1$ 乘方程（1）的两边去掉分母，得方程

$$x^2-1=0 \tag{3}$$

这个方程的未知数允许值比方程（1）虽然也是增加一个数 1，可是这个 1 是方程（3）的解，那么 $x=1$ 必定是原方程（1）的增根，因而方程（3）与原方程（1）不同解。实际上，原方程（1）只有一个解： $x=-1$，而方程（3）有两个解： $x=-1$ 和 $x=1$。

例 5　方程

$$\frac{x^2-4}{(x+2)^2}=0, \tag{1}$$

经恒等变形后，得方程

$$\frac{x-2}{x+2}=0。 \tag{2}$$

因为未知数的允许值集合没变，所以方程（1）和（2）同解。实际上，这两个方程都是只有一个解： $x=2$。

例 6　方程

$$(x-1)(x-2)=0, \tag{1}$$

经恒等变形后，得方程

$$\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}=0。 \tag{2}$$

方程（2）的未知数允许值比方程（1）少了一个数 1，而且这个 1 是方程（1）的解，是原方程的失掉的根，因而方程（1）和（2）不同解。实际上，方程（1）有两个解：

$x=1$，$x=2$，而方程（2）只有一个解：$x=2$。

下面的定理4，是用因式分解法解方程的理论根据。

定理4 方程

$$f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x)=0 \qquad (A)$$

的解集合，使下列方程

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0\cdots\cdots,\ f_n(x)=0 \qquad (B)$$

的左边 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……，$f_n(x)$都有意义；反之，(B)中每个方程的所有解都使方程（A）的左边有意义，则方程（A）的解集合与（B）的解集合一致。即方程（A）与（B）中诸方程同解。

证明： 如果α是方程（A）的任意一个解，即

$$f_1(\alpha)f_2(\alpha)\cdots\cdots f_n(\alpha)=0$$

那么，$f_1(\alpha)$，……，$f_n(\alpha)$至少要有一个等于零。因此，α至少是（B）中一个方程的解。至于$f_1(\alpha)$，$f_2(\alpha)$，……$f_n(\alpha)$，当然都有意义。

反过来，如果β至少是（B）中一个方程的解，并且$f_1(\beta)$，$f_2(\beta)$，……，$f_n(\beta)$都有意义，那么

$$f_1(\beta)f_2(\beta)\cdots\cdots f_n(\beta)=0$$

即β也是方程（A）的解。

所以，定理所说的两个解集合一致。

注意：（B）中方程的解，凡是不能使$f_1(x)$，$f_2(x)$……，$f_n(x)$都有意义的，当然不能是原方程的解，而是它的增根，应舍去。有了这个定理，就可以把解$f(x)=0$，变为将左边因式分解再求解，这样就使解$f(x)=0$简单多了。

例 7　解方程　$(x-1)(x^2+1)\frac{1}{(x-1)^2}=0$。

解　依次令方程左边的每个因式等于零，得三个方程：

$$x-1=0,\quad 由此得\ x=1;$$

$$x^2+1=0,\quad 由此得\ x_1=i,\ x_2=-i;$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}=0，无解。$$

因为 $x=1$ 使 $\frac{1}{(x-1)^2}$ 无意义，所以 $x=1$ 是原方程的增根，舍去。于是，原方程的解是 $x_1=i$，$x_2=-i$。

解方程，有时（例如解无理方程时），采取把方程两边同时乘方的办法。这时，乘方后得到的方程和原方程一般是不同解的。究竟何时同解何时不同解，只就平方的情形加以说明。

定理 5　方程 $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ 的一切解就是方程 $f(x)=g(x)$ 和 $f(x)=-g(x)$ 合起来的所有解。也就说，方程 $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ 同方程 $f(x)=g(x)$ 和 $f(x)=-g(x)$ 同解。

证明： 方程 $[f(x)]^2=[g(x)]^2$，$f(x)=g(x)$，$f(x)=-g(x)$ 分别和方程 $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$ ｛即 $[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]=0$ ｝，$f(x)-g(x)=0$，$f(x)+g(x)=0$ 同解。由于方程 $f(x)-g(x)=0$ 和 $f(x)+g(x)=0$ 的所有解使 $f(x)-g(x)$，$f(x)+g(x)$ 当然都有意义，所以根据定理 4 知，这些解就是 $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$ 的一切解。因此，定理成立。

这个定理说明，方程两边平方后所得方程的解，不但包括了原方程的解，也增加了原方程一边变号后所得的另一方程的解。原方程的增根，就是这另一方程的解。因此，只有当这另一方程无解时，（或除使两边同时为零的解外无其它解时，）平方后所得的方程才和原方程同解。那么，什么时候这另一方程无解呢？显然，必须限制在实数范围内，并且当原方程两边对未知数所有允许值都是非负的，或都是非正的，且两边不同时为零的时候，另一方程才无解。

例 8　方程 $(x-1)^2=1$ 和 $(x-1)^4=1$，在实数范围内，由于 $(x-1)^2\geqslant 0$，因而方程 $(x-1)^2=-1$ 无解，所以这时所给的两个方程同解；但是，在复数范围内，$(x-1)^2=-1$ 有解，所以这时所给的两个方程不同解。

本节讨论的内容对多元方程仍然有效。

习　题　一

一、试判断下列各对方程是否同解。

1　$x^4+3x^3=4x^2$ 与 $x^4+3x^2+\dfrac{1}{x-1}=4x^2+\dfrac{1}{x-1}$；

2　$x-1+\sqrt{x}=\dfrac{x}{2}+\sqrt{x}$ 与 $x-1=\dfrac{x}{2}$；

3　$2x+1=3x+2$ 与
$(2x+1)(x^2+1)=(3x+2)(x^2+1)$；

4　$\dfrac{x^2+3x}{x-3}=\dfrac{10}{x-3}$ 与 $x^2+3x=10$；

5　$\dfrac{2x^2}{x^2+4}(x^2+6)=\dfrac{10x^3}{x^2+4}$ 与 $x^2+6=5x$；

6 $\frac{(x^2+1)x^2}{2-x}=\frac{4(x^2+1)}{2-x}$ 与 $x^2=4$；

7 $\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{x+2}{x^2+1}$ 与 $2x-1=x+2$；

8 $\frac{x^4-64}{x^2-8}=1$ 与 $x^2+8=1$；

9 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}$ 与 $\frac{x+3}{x-3}=\frac{1}{x-2}$；

10 $2x-4=\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$ 与 $2x-4=x-1$；

11 $\frac{x^2}{x}=x$ 与 $x=x$；

12 $\frac{(4x-5)^2(4-x)}{4x-5}=0$ 与 $\frac{(4x-5)(4-x)^2}{x-4}=0$；

13 $(x-1)\frac{x-2}{x-3}=0$ 与 $x-1=0$，$\frac{x-2}{x-3}=0$；

14 $2x^2+4=x^2+5$ 与 $(2x^2+4)^2=(x^2+5)^2$；

15 $\sqrt{3x-5}=4$ 与 $3x-5=16$；

16 $\sqrt{4x^2+5}=x^2$ 与 $4x^2+5=x^4$。

二、试分别就下列情况，将方程变形的同解和不同解问题总结一下：

1 方程的两边加上相同的式子（包括数）；

2 方程的两边乘以相同的式子（包括数）；

3 方程的两边分别施行恒等变形；

4 对形如$f(x)=0$的方程，令其左边$f(x)$的每个因子