

上海市高中教学课本

立 体 几 何

教材说明和习题解答

上海市中小学教材编写组

一九八一年十二月

前 言

为了有助于教师使用好本市三年制高中数学教材，我们编写了这本《立体几何》的教材说明和习题解答。

本资料的教材说明部分，主要是根据“教学大纲”的精神，对各章教材的教学要求，内容安排，重点、难点、关键以及教学上的注意点提出一些参考性意见，习题解答部分限于篇幅，对练习题和大部分简单的习题，一般只写出习题的答案，对部分有一定难度的习题，提出主要解题思路或提示，所有这些，仅供教师在备课和教学时参考。

由于我们编写时间仓促，限于水平，资料中肯定有不少问题，欢迎广大教师批评指正。

上海市中小学教材编写组

一九八二年一月

第一章 直线和平面

工教材说明

本章是在学生已学习平面图形的知识的基础上,学习空间直线、平面间的一些关系。它们是后续知识—多面体、旋转体的基础,是今后进一步学习空间解析几何、微积分及画法几何等科目不可缺少的前期准备,也是学生将来参加生产、生活实践所必须的基础知识。

本章教材分五个单元:平面,空间两直线,空间线面平行关系,空间线面垂直关系,三面角和多面角,主要研究平面的基本性质,直线与直线,直线与平面、平面与平面着重研究平行和垂直两种位置关系。

关于本章教材,有如下几点说明。

1、按位置关系分类。本章教材内容的编排,没有按线、面元素进行分类,而是按位置关系进行分类,即按直线与平面平行,平面与平面平行,直线与平面垂直,平面与平面垂直的编排。这样做,主要考虑到研究同一类型的位置关系,在证明的思想方法上比较接近,可以起到相互启发、沟通的作用,有利于初学。同时,可使前者和后者互为基础和提高,有利于步步深入。而最后小结时,却按线线、线面、面面位置关系的顺序加以归纳,这样有利于学生对知识间纵横关系的理解。

2、从画图着手,逐步培养学生的空间想象力。本章教材精简了一些传统的空间作图题,增加了画直观图,这样有助于学生掌握空间的线线、线面之间位置关系,逐步培养学生的空间想象能力。

教材一开始就先画平面,再要求用斜二轴测投影方法,画水平面内的平面图形,以及一些简单几何体的直观图,并要求学生会用不同的线型表示轮廓线及被遮住的轮廓线。

随着空间线面关系的研究，在画法上进而采用利用视觉形象直观的方法表示空间关系，如异面直线的三种画法主要突出异面，线面平行关系主要要求所画直线与平面图形的某一条边平行，平面与平面平行关系主要要求所画的两个平面的两条横边平行，直线与平面垂直，主要要求所画直线与平面的一条水平位置的直线垂直，平面与平面垂直，主要要求所画水平平面的横边与垂直平面中的竖边垂直，使水平平面中的纵边与垂直平面中的竖边成 45° 角等等，这些都只要求所画图形能在视觉上符合所表示的位置关系的直观形象，不需要严格的尺度概念。

当学生掌握了空间图形的一些性质后，就可以进而根据图形性质，表示空间关系，如根据三垂线定理确定空间线线、线面的垂直关系中的垂线的位置；根据直线与平面所成的角的概念确定长方体的一条对角线与其它交于一个顶点的三个面所成的各个角及在各面上的射影的位置；根据三面角的一条棱如果与其余两条棱成等角时，这条棱在其余两条棱所确定的面上的射影就是这两条棱所成角的不分线的性质来画出它在这个面上的射影位置等等，这种画法要求较高，它要求在理解图形性质的基础上画图。

另外画长方体（正方体）的直观图，以及作符合某些条件的截面图，对表达空间线线、线面、面面关系，培养空间想象能力有一定帮助。

三、关于推理的依据

在本章中对于公理、定义、定理都作了明确的阐述，对于定理基本上都进行了严格的验证，正、逆定理都作了必要的区分，这些都可作为推理的依据，对于某些命题，在解题时经常用到，而且曾一度被公认为定理，我们均用黑体字表示之，也可作为推理依据（在应用时必须完整写出该命题的条件结论）除此外，均不作为解决其它问题的直接依据。

一、平面

（一）教学要求

(1) 使学生理解平面的无限伸展性, 掌握平面及平面的表示方法, 并会用集合符号表示点与线、点与面、线与面、面与面之间的关系。

(2) 会用斜二轴测投影画法画平面图形(如梯形、三角形、平行四边形等)的直观图。

(3) 牢固掌握平面的基本性质及其推论, 并会应用这些性质进行推理、论证某些命题的正确性。

(二) 内容安排

本节教材的教学是在学生学习过平面几何, 全面掌握有关平面几何图形性质的基础上开始的。关于点线面体的概念在初中平面几何里是作为基本概念来处理的, 仅通过具体实例和它们的性质描述, 才得到明确的概念, 并未给出定义。在此也参照平面几何系统将平面看成一个基本概念, 并未用更一般的概念来定义。

在平面及平面的表示法以后, 集中介绍了点、线、面之间关系用集合符号表示。这样, 几何元素间的位置关系从用语言表达 $\Rightarrow$ 符号表示, 也可进一步绘成草图。既熟悉了符号的运用, 又增加了绘图能力的培养。

关于直观图的画法, 本节教材仅介绍了斜二轴测投影画直线形和圆, 在此基础上绘制长方体的直观图, 因为长方体的角顶棱面对表达空间点、线面之间的关系提供了具体的模型, 为初学者弄清元素之间位置关系有所帮助。

接着教材介绍了平面的三条基本性质, 及其三条推论, 它们是在空间确定平面位置的主要依据, 也是本节教材的中心内容, 应当要求学生能够彻底理解和牢固掌握。

本单元的教学时间估计为5教时, 各小节时间大致分配如下。

- § 1.1 平面和它的表示法 1教时; § 1.2 在平面内表示空间形体 2教时;
§ 1.3 平面的基本性质 2教时。

(三) 重点难点关键

平面的三条公理(即基本性质)是本节的重点,也是难点之一,它是立体几何中逻辑论证的主要依据,另一难点是空间图形的画法,在本节则表现为点线面关系的直观图,对于初学立几的学生来说,是较难于入门及掌握其中精神实质的,因此必须循序讨进,由浅入深、由易到难,扎扎实实地加以培养,使学生对所学内容透彻理解,熟练掌握。

(四) 教学上的注意点

(1) 把平面画成平行四边形,锐角画成 45° 的平面,仅是指画其不位置,对其他位置的平面并不要求照此方法画。

(2) 平面可用符号“ $\square$ ”表示,如平面 AC , 记为 $\square_{AC}$, 平面 α , 记为 $\square_{\alpha}$, AC 、 α 都记在平面符号 $\square$ 的右下角,这样可与平行四边形符号使用有所区别,如平面 $ABCD$ 记为 $\square_{ABCD}$, 而平行四边形 $ABCD$ 记为 $\square ABCD$ 。

(3) 公理和推论中的“有且只有一个”,学生比较生疏,对这些词作一些简单的解释,能够使学生对所讲的公理、推论的内容理解得更透彻。“有”说明图形是存在的,“只有一个”说明图形是唯一的,符合某一条件的图形即然存在,而且只有一个,这说明这个图形完全确定的,因此“有且只有一个”和“确定”是同义词,本册教材的习题上就有说“确定”的。

(4) 关于平面公理的推论的证明,书上分两个部分,即存在性与唯一性,关于唯一性的证明,除了按教材证明的方法外,还可以用反证法证,如果过直线 l 及 l 外一点 A 还有另一个平面 N , 那末 A 、 B 、 C 三点也一定都在平面 N 内,这样,过不在一条直线上的三点 A 、 B 、 C 就有两个平面 M 、 N 了,这和公理了矛盾,所以过直线 l 和 l 外一点 A 的平面只有一个。

(5) 在集合符号教学后,对于集合符号的使用,不作硬性规定,可以按传统的语言叙述,也可用集合符号表述,也可混合使用,本册教材是混合使

用，即用什么表示方便就怎么表示，不作统一规定，但必须以简明了为原则。

(6) 为了让学生熟悉公理、定理条件结论，本书在例题叙述时，把新学的定理、公理填写在推理所得结论后面的括号里，在教学中，老师也应同样要求学生按此格式解题。

(7) 关于平面的三条公理和三条推论后，没有进行小结，教学中为使学生对平面性质有个全面认识，可作如下归纳

名 称	作 用
公理 1	判定直线在平面内的依据
公理 2	两个平面相交的依据
公理 3 及三个推论	确定一个平面的依据

二、空间两条直线

(一) 教学要求

(1) 掌握空间两条直线的位置关系，熟悉三个平面两两相交，交线的各种位置的情况，牢固掌握空间平行直线的传递性，并会运用上述性质解决具体问题。

(2) 理解异面直线，两条异面直线所成的角、距离等概念，会求两条异面直线所成的角，了解两条异面直线距离的求法。

(二) 内容安排

教材从分析空间两条直线（除重合）的三种位置关系——相交、平行、异面着手，指出前两种位置关系是在同一平面内，已经作过研究，主要研究第三种位置关系，为此提出异面直线的概念，两条异面直线在空间的位置关系

的确定，取决于它们的所成角和距离，教材对异面直线所成角和它们的距离先后作了研究。由于异面直线所成的角的研究需要有一系列的准备定理，教材按它们之间的逻辑顺序作了如下安排。

三个平面两两相交，交线定理 $\begin{cases} (1) \text{ 三条交线过同一点} \\ (2) \text{ 三条交线平行} \end{cases}$

平行线的传递性 $\rightarrow$ 等角定理 $\rightarrow$ 异面直线所成的角，特别说明如果所成角为直角，则两条直线互相垂直，最后教材安排了两条异面直线的公垂线，异面直线距离的概念，并且列举了求异面直线距离的例子。

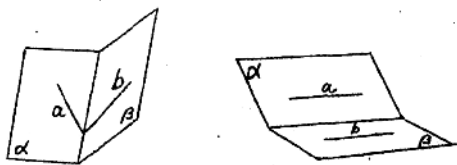
本单元的数学时间估计为4教时，每小节 时间大致分配如下。 $\S 1.4$ 空间两条直线的位置关系1教时， $\S 1.5$ 三个平面的三条交线1教时， $\S 1.6$ 平行于同一条直线的两条直线1教时， $\S 1.7$ 两条异面直线所成的角1教时，

(三) 重点、难点、关键。

异面直线的概念以及两条异面直线所成的角是本节的重点，也是难点。要讲清这些概念，需充分使用直观教具，让学生直接观察，然后在感性认识的基础上，进行分析、比较，逐渐上升为一般理论，这样能减少学生在理解上的困难。

(四) 教学上的注意点。

(1) 异面直线的定义——不在同一平面内的两条直线，是说这两条直线不能在同一平面的直线，如图 Q、b 是分别在两个平面内的两条直线，但都不是异面直线。



(2) 三个平面两两相交，交线可分三种情况即(1)交于一直线；(2)三条直线交于一点；(3)三条直线平行。(1)本书没有专门讨论，(2)是作长方体(正方体)截面的理论依据之一；(3)是平行线传递性定理证明的基础，因此必须让学生掌握。

(3) 两条异面直线既不相交，但又有所成的角，这对于初学立体几何的学生来说，是难以理解的，应使学生明了学习异面直线所成角的概念的必要性。

必须指出，教材中叫“两条异面直线所成的角”，而不叫“交角”的原因，就是为了防止学生误认为两条异面直线相交。

(4) 习题二第10题，是为在长方体里，过某个面上的一已知点，作对面的一条已知直线的平行线作铺垫，它们在求长方体截面时要用到，故请不要轻易删去本题。

(5) 关于求异面直线的距离，往往要涉及线面平行、距离等概念，它们是将要学习的内容，故在这儿只要求学生理解异面直线距离概念，以及会求两条特殊位置的异面直线——类似长方体某两条棱的距离，不要再引伸其它内容。

(6) 讲两条异面直线的公垂线时，应强调“和两条异面直线都垂直相交……”中的“相交”两字，因为在讲两条直线垂直时，交待过它们不一定相交，所以这里的相交两字容易被忽略掉。

三、空间线面平行关系

(一) 教学要求

(1) 在学生已经掌握的平面性质的基础上，进一步使他们获得直线和平面平行，以及平面和平面平行的明确概念。

(2) 使学生牢固掌握判定直线和平面，平面和平面平行的方法和有关它

们平行的性质，并且使他们能够利用这些平行性质来解题。

(二) 内容安排

教材首先分析了直线和平面的三种位置关系，即直线与平面平行、直线与平面相交、直线在平面内。除直线在平面内已作了研究外，本节仅研究直线和平面平行位置关系。

关于直线与平面平行，教材安排了它们的判定和性质定理，并列举了定理的应用。在此第一次安排了空间作图题。过两条异面直线中一直线作一平面与另一直线平行，除为进一步学习异面直线距离作准备外，对空间作图题在步骤、格式方面作了示范。接着、分析了平面与平面除重合平行、相交两种位置关系，教材在续面平行研究的基础上给出了面面平行的判定和性质定理。

最后用例题方式，介绍截面的概念，以及画截面图的方法。对于复习续面、面面平行的有关定理有所帮助。

本单元的的教学时间估计为7教时，各小节时间大致分配如下，§1.8 直线和平面平行3教时；§1.9 平面和平面平行4教时。

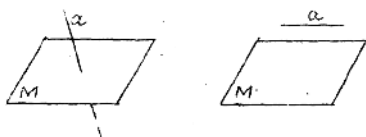
(三) 重点难点关键。

直线与平面平行，平面与平面平行关系是续面、面面关系中应用较多的一种位置关系，续面平行又是面面平行的基础，因此续面、面面平行的判定和性质都是本节的重点，用反证法证明续线、面面平行的判定定理是本节的难点之一，反证法是常用的一种论证方法，虽然学生在和中学过，但还差初步的解决这个难点，应让学生进一步了解反证法的实质及运用反证法证明命题的一般步骤。

(四) 教学上的注意点

(1) 通过学生熟悉的例子如屋里的日光灯管与地板，天花板与地板等位置关系，逐渐形成关于直线、平面的正确概念以及关于它们的位置关系的正

画形象，把面画成与平面相交，平行时立面成



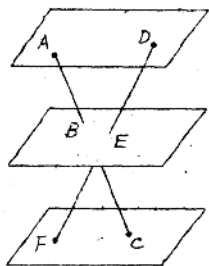
不要画成



(2) 讲直线和平面平行时，应注意引导学生把直线和平面关系转化为直线与直线的关系。直线和平面平行，只和这条直线和这个平面内的一条直线平行，即线线平行，则线面平行。讲面和面平行时，应注意引导学生把面和面关系转化为直线与平面关系。面面平行的判定定理，就是根据一个平面里的两条相交直线分别平行另一个平面而得到这两个平面平行。

(3) 在讲直线与平面平行的性质时，要防止学生误认为“一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线”。在教学时可采用教具演示给学生看，在平面内除与平面外某条直线平行的那些直线外，其它的每一条直线与某直线都是异面直线。

(4) 习题三中12题，练习后教师可指出，“三个平行平面截两条直线，截得的对应线段成比例”，这里两条直线不一定是共面的，故一般应作异面直线来考虑，因此13题不能直接连结 AD 、 BE 、 CF ，应过 D （或 A ）作 AC （或 DF ）的平行线使之转化为共面的，结合该题的练习，也可让学生考虑如图 AC 、 DF 的位置。



(5) 关于已知三点作正方体(或长方体)的截面图,为了区分这些点所在位置,我们约定为,若在表面上看得见的点用小黑点表示,而被表面遮住的点用小空心圆表示。

四、空间线面垂直关系

(一) 教学要求

(1) 使学生理解并掌握直线和平面垂直、平行于平面的公垂线、平行于平面的直线和该平面的距离、斜线和斜线长、直线和平面的交角、二面角中有关的元素,两平面互相垂直等概念的含义。

(2) 使学生牢固掌握直线和平面垂直的判定、性质定理、三垂线定理和它的逆定理、平面和平面垂直的判定、性质定理,并能掌握它的应用。

(3) 使学生理解垂线、斜线、射影的含义,掌握射影长定理和斜线长定理,熟悉斜线段、交角、射影三者的依赖关系,并能已知其中二个量,求第三个量。

(4) 能根据题意 正确、独立画出本节习题的直观示意图

(二) 内容安排

本单元教材直线和平面垂直,平面和平面垂直两部分,集中研究了空间

线面这种特定的位置关系。首先介绍直线和平面垂直。关于直线和平面垂直的定义，对判定一条直线与平面垂直非常不便，故教材常用线面垂直的判定定理来判定线面垂直。

在直线和平面垂直的性质定理后介绍了射影长定理和斜线长定理，阐明了斜线和它的射影间的相互关系。对于斜线和它在平面内的射影，依赖于斜线与平面的夹角，它们之间关系可由 $AB' = AB \cos \alpha$ 确定（其中 AB' 为 AB 在平面的射影， α 为 AB 与平面的夹角）。

教材进一步揭示了空间直线垂直关系，介绍了三垂线定理和它的逆定理。这个定理应用十分广泛，把不少空间图形的计算问题，转化为平面图形的计算问题，以反证明题中，也常常用到它们，因此学习时要十分重视。

关于平面与平面垂直关系的研究，教材一开始引入二面角，并把两面角的平面角为直角定义为平面与平面垂直。接着教材给出平面与平面垂直的判定和性质定理。

最后是给出有关点、线、面、体的正投影，它属重要基础知识，也为后章学习物体视图作必要准备。

本单元的教学时间约为12教时，每课时时间大致分配如下：§1.10 直线和平面垂直了教时；§1.11 垂线、斜线和射影1教时；§1.12 线段的射影的关系1教时；§1.13 三垂线定理和它的逆定理2教时；§1.14 二面角、平面和平面垂直4教时；§1.15 点线面体的正投影1教时。

（三）重点、难点关键

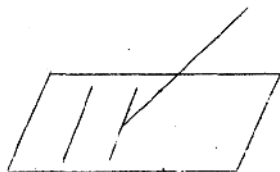
本节教材的重点是线面垂直的判定和性质，面面垂直的判定和性质以及三垂线定理。

三垂线定理和它的逆定理的条件结论常易混淆，因此它是本章的难点之

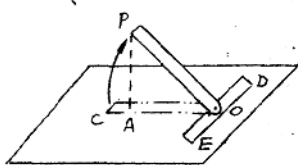
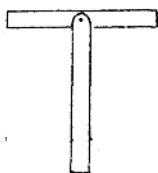
(四) 教学上的注意点：

(1) 直线和平面垂直的定义是说如果一条直线和这个平面内两条相交直线都垂直这个条件。如图，一直线和平面内两直线都垂直，而直线并不和平面垂直。

(2) 由于过一点向一个平面引的垂线有且只有一条，所以可把这点与垂足间的距离定义为这个点到平面的距离。由于平行于平面的直线上任一点到平面的距离是个定值，所以可把这个定值定义为直线和平面的距离。在定义这个距离时，我们应注意这样的唯一性问题。



(3) 学生对三垂线定理感到困难的是一时弄不清各条直线之间的关系。讲解时应抓住斜线和它在平面内的射影必定同时垂直于平面内的某条直线这个实质。为了加深学生的印象，可结合用一些简单的教具，例如用是互相垂直的纸板条（或木条）做成的，首先把它放在如图的CDE位置，然后以DE



为轴，把 CO 旋转到 PO 位置；这时 AO 就成为 PO 的射影，这样变动之后，两根本条的垂直关系没有变化，它说明 DE 和 PO 、 DE 和 PO 的射影 AO 都垂直，使学生有了这样的感性认识之后，再从理论上去证明它。

在三垂线定理教学中，应先把课本上图1.53左图第一图搞清楚，然后再指出 DE 不一定过斜线足 B ，也有同样结论。

(4) 直线和平面所成的角，教材是分三种情况加以说明。

(a) 直线和平面斜交时，直线和平面所成的角是指直线和它在平面内的射影所成的锐角。

(b) 直线和平面垂直时，直线和平面所成的角就是直角。

(c) 直线和平面平行（或直线在平面内）时，直线和平面所成的角是零度角。

(5) 关于线段 AB 在平面 M 内的射影，如图1.50右面，端点 A 、 B 在平面 M 的两侧，可以证明 A 、 A' 、 B 、 B' 共面的。由于证明比较繁，这个结论我们承认是正确的，可作为以后解题根据。

五、三面角和多面角

(一) 教学要求

(1) 理解并掌握多面角，多面角的棱、多面角的面、多面角的面角、多面角的二面角、直多面角、凸多面角等概念。

(2) 掌握三面角的任一个面角小于其他两个面角的和及凸多面角的所有面角的和小于 360° 等定理，并能应用它们解决有关问题。

(3) 了解多面角的全等与对称的含义以及对称多面角与全等多面角的相互关系。

(二) 内容安排

教材首先介绍了多面角（本章仅研究凸多面角）的一些元素——棱、面

角，二面角等，为研究多面角定理作准备。

三面角是一种最简单的多面角，本节关于三面角的性质安排了两个定理，即任一面角小于其他两面角的和，且大于其他二面角的差，它不仅可判定所给定的三面角是否存在，也为多面角性质作准备。对多面角的性质本节仅介绍了它的所有面角和小于 360° ，并且用折纸直观说明这个定理意义。

对于多面角的全等和对称，仅是让学生了解，不要求证明，为此教材只是粗略地说明一下，没有给出判定的定理。

本单元的教学时间约为了课时，每小节课时间大致分配如下：§1.16三面角和多面角定理 2 课时；§1.17多面角的全等和对称 1 课时。

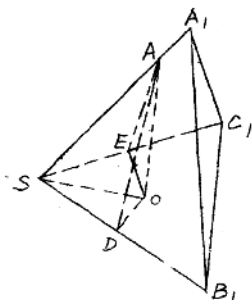
(三) 重点、难点关键

本节重点是三面角、多面角的性质，难点是这些性质的证明。要解决难点，必须掌握基本概念，并根据题意画出清晰的直观图，分清空间线面关系后进行推理论证。

(四) 教学上的注意点

(1) 关于三面角的性质定理，以前使用的理科班教材所给出的证明是比较简洁的，证明如下。

在棱 SA_1 上任取一点 A ，自 A 作 $AO \perp$ 平面 SB_1C_1 ，由 O 在平面 SB_1C_1 内作 $OD \perp SB_1$ ， $OE \perp SC_1$ ，连 AD 、 AE ，可证得 $SA > SO$ （详见理科班教材第二册 P215）， $\angle ASB_1 > \angle OSB_1$ ，同理， $\angle ASC_1 > \angle OSC_1$ 。



$$\therefore \angle ASB_1 + \angle ASC_1 > \angle B_1SC_1$$

$$\text{即, } \angle B_1SC_1 < \angle ASB_1 + \angle ASC_1.$$

这个证法的最大缺点是 $\angle O$ 为什么一定落在面角 $\angle C_1SB_1$ 内, 所以不够严密, 故这次修改时还是换了证法。

(2) 关于顶点对称的两个多面角在教课时, 可与平面几何的中心对称相比。

如果三面角 $S-ABC$ 上所有关于 S 点的对称点, 都在另一个三面角 $S-A'B'C'$ 上, 反过来, 在三面角 $S-A'B'C'$ 上所有关于 S 点的对称点都在三面角 $S-ABC$ 上, 那末我们就说这两个三面角是关于 S 点对称的。或者说它们是中心对称图形。应该说, 中心对称的定义在空间和在平面都是一样适用的。

(3) 必须注意, 在对称三面角中, 如果每个三面角里将两个面角相等或者三个面角都相等, 它们是可以重合的, 但是这时相等的只是对应元素的集合。

II 习题解答

练习 I. 1 $P \geq$

1. 略

2. (1) $A \in \square_M$, (2) $\{A\} \cap \square_N = P \Rightarrow \square_M \cap \square_N = AB$, (3) $\square_M \cap \square_N = DE$.

3. 略

练习 I. 2 $P \leq$

1. ~ 3. 略

练习 I. 3 $P \geq$

1. (1) 不对, 根据公理 I, 直线 Q 应全在平面 M 内。(2) 不对, 根据公