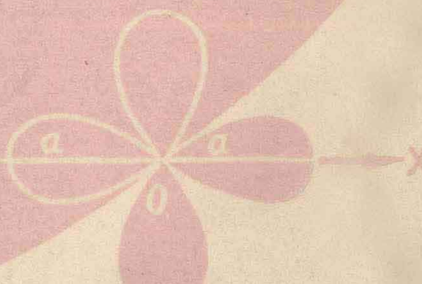
初等数学习题解答

（平面解析几何）



盐城师范专科学校数学系

目　　录

一、直线……………………………………………………（ 1 ）

二、园锥曲线………………………………………………（40）

三、极坐标和参数方程 ……………………………………（132）

四、杂题 ……………………………………………………（163）

一、直　　线

1.* 在直线$x-2y-2=0$和直线$x-2y-6=0$之间求一直线使它将这两条直线间的距离分成1：3。

解： 设所求的直线方程为：$x-2y+C=0$。

∵ 此直线在两平行线之间。

∴ $$\frac{C+2}{-6-C}=\frac{1}{3},\qquad C=-3.$$

$$\frac{C+2}{-6-C}=3,\qquad C=-5.$$

∴ 所求的方程为：$x-2y-3=0$或$x-2y-5=0$。

2. 求平行于两平行直线$2x-y=3$，$2x-y=18$，并且到这两条平行直线的距离之比为3：2的直线方程。

解(1)： 设所求直线方程为$2x-y=b$

∵ 两已知直线的距离为$\frac{15}{\sqrt{5}}$

---

*注：①两平行线$Ax+By+C_1=0$，$Ax+By+C_2=0$之间的距离为：

$$\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

若第三条平行线为$Ax+By+C_3=0$，则它到上两条平行线间的距离之比为：

$$\frac{C_3-C_1}{C_2-C_3}（中间）\quad \frac{C_3-C_1}{C_3-C_2}（同侧）.$$

②本题中第一个“间”字是很重要的一个字，它决定了本题只能有两解。本题若改为：“求一条直线使它与两已知直线$x-2y-2=0$和$x-2y-6=0$的距离之比为1：3”，则有四解（另两解为：$\frac{C+2}{C+6}=\frac{1}{3}$或3，$C=0$或$-8$）.

$\therefore \quad b_1=3+15\cdot\frac{2}{5}=9 \qquad b_2=3+15\cdot\frac{3}{5}=12$

故所求直线为$2x-y=9$或$2x-y=12$。

但上面两条是在两已知平行直线间，学者决不能忘记所直线还可以在它们之外。

$$b-3=(b-18)\cdot\frac{2}{3}, \qquad b_3=-27,$$

$$b-3=(b-18)\cdot\frac{3}{2}, \qquad b_4=48,$$

故所求的直线还有：$2x-y=-27$或$2x-y=48$。

解（2）：设所求的直线方程为$2x-y=b$

由定比分割公式可得：

$$b_1=\frac{3+18\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=9, \qquad b_2=\frac{3+18\times\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=12,$$

$$b_3=\frac{3+18\times\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{2}{3}}=-27, \quad b_4=\frac{3+18\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{3}{2}}=48.$$

故所求直线方程为：

$2x-y=9$，$2x-y=12$，

$2x-y=-27$，$2x-y=48$。

3. 已知点$A(-3,8)$和$B(2,2)$，分别在x轴与y轴上各求一点，使$|AM|+|BM|$为最短。

解：如图，作B点关于x轴的对称点B'，则$B'(2,-2)$。

直线AB'的方程为

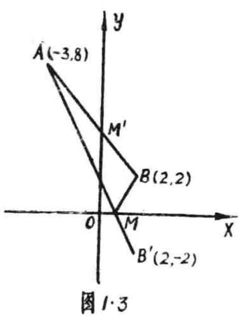


图1·3

$$y+2=\frac{10}{-5}(x-2)$$

即 $2x+y-2=0$

令 $y=0$ 得 $x=1$

$\therefore$ M(1，0)即为所求的x轴上的点。

直线AB的方程为$y-2=\frac{6}{-5}(x-2)$，

即 $6x+5y-22=0$，

令 $x=0$ 得 $y=\frac{22}{5}=4\frac{2}{5}$。

$\therefore$ $M'(0, 4\frac{2}{5})$即为所求的y轴上的点。

4. 过点M(6,8)引直线，使它们在两坐标轴上的截距都为正，且截距之和为最小，求该直线方程。

解：设所求直线方程为$y-8=K(x-6)$

则截距分别为：$\frac{6K-8}{K}$，$8-6K$。

截距之和为：$S=\frac{6K-8}{K}+8-6K=14-\frac{8}{K}-6K$

$$=14-\left(\frac{8}{K}+6K\right).$$

若S为最小 则$\frac{8}{K}+6K$为最大

$\because$ $\frac{8}{K}\cdot 6K=48=$定值

$\therefore$ 当$\frac{8}{K}=6K$ 即 $K=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$时

$\frac{8}{K}+6K$最大，

∵ 截距都为正，　　∴ $K=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故直线方程为$y-8=-\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-6)$。

5. 在第一象限内有一定点P(a, b)，过P作线段MN交x，y轴正方向于M,N两点，问OM，ON为何值时，△OMN面积最小，最小值是多少？此时直线MN的方程如何？

解(1)：设直线MN的方程为：　$y-b=K(x-a)$

令　$x=0$　　　得　$y=ON=b-aK$

令　$y=0$　　　得　$x=OM=a-\frac{b}{K}$

$$\triangle OMN\text{的面积}=\frac{1}{2}OM\cdot ON=\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{K}\right)(b-aK)$$

$$=\frac{1}{2}ab-\frac{b^2}{2K}-\frac{a^2K}{2}+\frac{1}{2}ab$$

$$=\frac{1}{2}\left[2ab-\left(\frac{b^2}{K}+a^2K\right)\right]$$

∵ $\frac{b^2}{K}\cdot a^2K=a^2b^2=$定值

∵ $\frac{b^2}{K}=a^2K$　　即　$K=-\frac{b}{a}$时　$\frac{b^2}{K}+a^2K$ 最大。

这时△OMN面积最小　　最小值$=2ab$

此时$OM=a-\frac{b}{-\frac{b}{a}}=2a$

$$ON=b-a\left(-\frac{b}{a}\right)=2b$$

直线MN的方程为：$y-b=-\frac{b}{a}(x-a)$

即　$bx+ay-2ab=0$

解(2)：设直线MN的方程为：$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$

其中$OM=m$，$ON=n$　分别为直线MN在x轴、y轴上的截距。

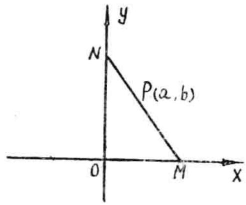


图 1·5

∵　P(a,b)在直线MN上

∴　$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=1$

即　$m=\frac{an}{n-b}$　　(1)

设△OMN的面积为S　则

$$S=\frac{1}{2}mn=\frac{an^2}{2(n-b)}$$　即

$$an^2-2Sn+2Sb=0 \qquad (2)$$

由$\Delta=4S^2-4Sab\geqslant 0$　　得　$S\geqslant 2ab$

∴　S的最小值为2ab　　把$S=2ab$代入(2)得：

$an^2-4abn+4ab^2=0$　　$n^2-4bn+4b^2=0$

$(n-2b)^2=0$　　$n=2b$　　代入(1)得

$$m=\frac{2ab}{2b-b}=2a$$

∴　直线MN的方程为：$\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$.

即　$bx+ay-2ab=0$.

6. 已知直线L：$y=4x$和点P(6, 4)，在L上求一点Q，使PQ、OQ与OX轴所成的三角形面积最小。

解：　设Q点的坐标为

$(x_1, 4x_1)$

则直线PQ的方程为：

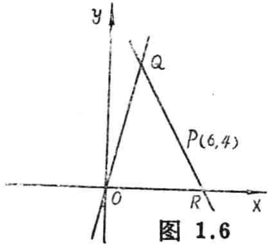


图 1.6

$$\frac{y-4}{4x_1-4}=\frac{x-6}{x_1-6}$$

令 $y=0$ 则得直线PQ与ox轴的交点的坐标为

$R\left(\frac{5x_1}{x_1-1},\ 0\right)$ △OQR的面积

$$=\frac{1}{2}\cdot 4x_1\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}=\frac{10x_1^2}{x_1-1}=S$$

即 $10x_1^2-Sx_1+S=0$

$S^2-40S\geqslant 0 \qquad S\geqslant 40$

$10x_1^2-40x_1+40=0 \qquad x_1^2-4x_1+4=0$

$x_1=2 \qquad 4x_1=8$

∴ Q点的坐标为(2，8)。

7. 设正方形的中心为（-1，0），一边的斜率为3，且面积为14.4平方单位，求这个正方形四边所在的直线方程。

解：∵ 面积为14.4，边心距为$\frac{6}{\sqrt{10}}$

设一对对边的方程为 $3x-y+b=0$

$$d=\frac{|-3+b|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$ 即 $b_1=9$，$b_2=-3$

这一对对边方程为 $3x-y+9=0$，$3x-y-3=0$

设另一对对边方程为 $x+3y+b=0$

$$d=\frac{|-1+b|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$ 即 $|-1+b|=6$

∴ $b_1=7$，$b_2=-5$

另一对对边方程为 $x+3y+7=0$，$x+3y-5=0$。

8. 正方形ABCD之中心在(1，-1)，且AB的长为4，斜率为$\sqrt{3}$，求四边的方程。

解：因为正方形的边长为4，可知正方形的中心到各边的距离为2。

设正方形一组对边为：$y=\sqrt{3}x+b$

即 $\sqrt{3}x-y+b=0$ 另一组对边为：

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+b' \quad 即 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}x+y-b'=0$$

$$\because \frac{|\sqrt{3}+1+b|}{2}=2 \therefore b=3-\sqrt{3} 与 -5-\sqrt{3}$$

$$\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}-1-b'\right|}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=2 \quad \therefore b'=-1-\sqrt{3} 与 -1+\frac{5}{\sqrt{3}}$$

故所求四边的方程分别为：

$\sqrt{3}x-y+3-\sqrt{3}=0$，$\sqrt{3}x-y-5-\sqrt{3}=0$。

$x+\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=0$，$x+\sqrt{3}y-5+\sqrt{3}=0$。

9.* 设正方形的中心为点M$(-1, 0)$，且其一边方程为：$x+3y-5=0$，　求其它三边的方程。

解：由M$(-1, 0)$到$x+3y-5=0$的距离$d=\frac{|-6|}{\sqrt{10}}$，

设其它三边为　L_1：$x+3y+b_1=0$，

$\therefore -1+b_1=6$，$b_1=7$。

L_2：$3x-y+b_2=0$，　$\therefore -3+b_2=6$，$b_2=9$。

L_3：$3x-y+b_3=0$，　$\therefore -3+b_3=-6$，$b_3=-3$。

即得所求三边的方程为：$x+3y+7=0$，

$3x-y+9=0$，$3x-y-3=0$。

---

*注：凡斜率已知，可设直线方程为$y=kx+b$，随b的值变化而变化，但所有这些直线都平行，故可称为平行线束，平行线束的应用是极其广泛的。

10. 已知平行四边形两边的方程是$x+y-1=0$和$3x-y+9=0$对角线交点的坐标是(3，3)，求其它两边的方程.

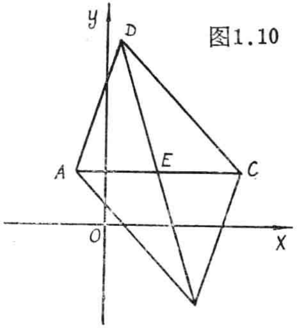


图1.10

解：如图，设AB边的方程为：

$$x+y-1=0,$$

AD边的方程为：

$$3x-y+9=0,$$

解方程组$\begin{cases} x+y-1=0, \\ 3x-y+9=0, \end{cases}$

得A点坐标为$(-2,3)$.

设C点坐标为(x, y).

由AC中点E(3，3)得$\begin{cases} 3=\dfrac{x-2}{2} \\ 3=\dfrac{y+3}{2} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}$

故BC的方程为 $y-3=3(x-8)$， 即$3x-y-21=0$.

CD的方程为 $y-3=-(x-8)$， 即$x+y-11=0$.

11. 已知正方形ABCD，E，F，G，H分别是AB，BC，CD，DA的中点，

求证：由直线AF，BG，CH，DE围成的面积是原正方形面积的五分之一。

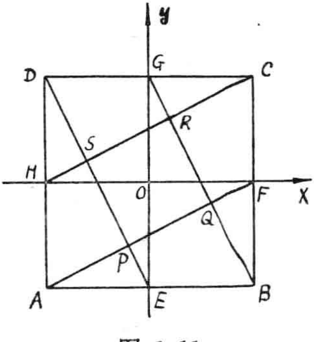


图 1.11

证明：建立如图所示的直角坐标系，

则$A(-a, -a)$，$B(a, -a)$，$C(a, a)$，$D(-a, a)$.

$E(0, -a)$，$F(a, 0)$，$G(0, a)$，$H(-a, 0)$.

从而得到直线AF，BG，CH，DE的方程分别为：

AF：$x-2y-a=0$，　　　BG：$2x+y-a=0$，

CH：$x-2y+a=0$，　　　DE：$2x+y+a=0$。

$\therefore$ AF$/\!/$CH，BG$/\!/$DE，且AF$\perp$BG，同时它们到原点的距离都等于$\dfrac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}$。

$\therefore$ 正方形PQRS的面积$=\left(2\cdot\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4a^2}{5}$，

而正方形ABCD的面积为 $(2a)^2=4a^2$，

$\therefore$ 正方形PQRS的面积为原正方形面积的$\dfrac{1}{5}$。

12．光线通过点A(2，3)，在直线$x+y+1=0$上反射，反射线通过点B(1，1)，求光线入射线和反射线的方程，并求光线从A点到达B点时所经过的路线的长度。

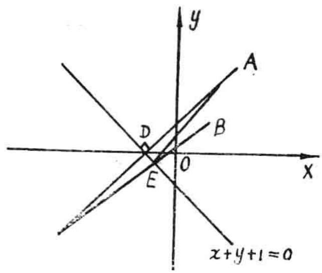


图 1.12

解：过A作已知直线的垂线，垂足为D，则直线AD的方程为：

$x-y+1=0$，

解方程组$\begin{cases}x+y+1=0\\x-y+1=0\end{cases}$　　得D点坐标为D$(-1,0)$。

设A点关于已知直线的对称点为 C$(x_1，y_1)$，

则　$-1=\dfrac{x_1+2}{2}$，　$x_1=-4$。

$0=\dfrac{y_1+3}{2}$，　$y_1=-3$。

$\therefore$ C点的坐标为$(-4, -3)$。

从而可求得直线BC的斜率 $K_{BC}=\dfrac{1+3}{1+4}=\dfrac{4}{5}$。

$\therefore$ 直线BC的方程为$y-1=\dfrac{4}{5}(x-1)$，即$4x-5y+1=0$。

解方程组 $\begin{cases}4x-5y+1=0,\\ x+y+1=0.\end{cases}$

可得E点的坐标为 $E\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$。

从而可求得直线AE的斜率 $K_{AE}=\dfrac{3+\dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{5}{4}$。

直线AE的方程为 $y-3=\dfrac{5}{4}(x-2)$，即$5x-4y+2=0$。

又：$\because |AE|+|EB|=|CE|+|EB|=|CB|$。

$\therefore |CB|=\sqrt{(1+4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{41}$。

所以入射线的方程为 $5x-4y+2=0$，

反射线的方程为 $4x-5y+1=0$。

光线从A到B经过的路线的长度为$\sqrt{41}$。

13.* 在点$A(-1, 0)$，$B(-2, 4)$，$C(4, -5)$上分别放置质量为3克，5克，7克的质点。求它们质量中心的坐标。

解：设A，B两点的质量中心为 $D(x', y')$

由 $3\cdot|AD|=5\cdot|DB|$ 得：$\lambda'=\dfrac{|AD|}{|DB|}=\dfrac{5}{3}$

$$\therefore x'=\frac{-1+\dfrac{5}{3}\cdot(-2)}{1+\dfrac{5}{3}}=-\frac{13}{8}$$

$$y'=\frac{0+\frac{5}{3}\cdot 4}{1+\frac{5}{3}}=\frac{5}{2}$$

再设D，C两点的质量中心为 G(x，y)

由 $8\cdot|DG|=7\cdot|GC|$　得 $\lambda=\frac{|DG|}{|GC|}=\frac{7}{8}$

$$\therefore\quad x=\frac{-\frac{13}{8}+\frac{7}{8}\cdot 4}{1+\frac{7}{8}}=1,\quad y=\frac{\frac{5}{2}+\frac{7}{8}\cdot(-5)}{1+\frac{7}{8}}=-1.$$

故所求A，B，C三点的质量中心为(1，−1)

14. 从半径等于15cm的均匀薄圆板上，挖去一个半径等于5cm的小圆板，已知这个小圆板的圆心和原来圆板的圆心的距离等于8cm。求所剩薄板的重心位置。

解：以两圆的连心线M_1M_2为x轴，小圆圆心为原点，建立坐标系，则大圆圆心为M(8，0)。

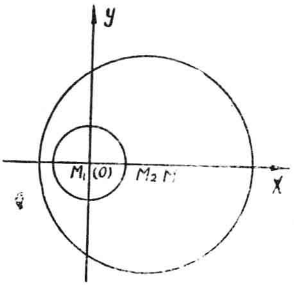


图 1.14

设所剩薄板的重心为M(x，0)，(M必在x轴上，且必在M_2右侧)。

∵　大圆板是由小圆板和所剩薄板拼成的。

∴　我们可将M_2看作M_1和M的重心，

---

*注：本题可推广为一般形式，设$p_1(x_1, y_1)$，$p_2(x_2, p_2)$，……，$p_n(x_n, y_n)$各点处分别放置n个质量是m_1m_2……，m_n的质点，则它们的质量中心的坐标为

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}$$

由 $M_1M_2 \cdot m_{小} = M_2M \cdot m_{剩}$，得 $\lambda = \frac{M_1M_2}{M_2M} = \frac{m_{剩}}{m_{小}}$

$$= \frac{\pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 5^2} = 8.$$

$\therefore\ 8 = \frac{0+8 \cdot x}{1+8}$，$8x = 8 \cdot 9$，$x = 9$。

故所剩薄板的重心在两圆连心线上，且距大圆圆心右侧1cm处

15.* 一光线，在穿过厚1cm的玻璃片（折射率为1.5）以前，它的方程是$y=x+3$，设横轴位于这玻璃片的表面上，而纵轴垂直于此片，试求在此玻璃片内和出玻璃片后的光线方程，以及光线在玻璃片内的行程。

解：如图，∵直线方程为

$$y = x + 3,$$

$\therefore\ tg\alpha = 1$，$\alpha = \frac{\pi}{4}$。

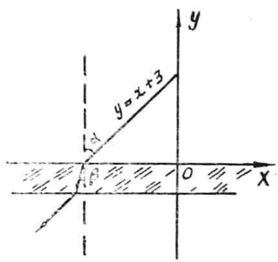


图1.15

∵ 折射率为1.5，

$$\therefore\ \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\beta} = \frac{3}{2},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{3},\quad \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

设光线在玻璃内的斜率为k，

---

*注：光从第一媒质进入第二媒质，其入射角的正弦与折射角的正弦之比$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$，叫做第二媒质对第一媒质的折射率。

则 $k=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sqrt{14}}{2}$ 又

∵ 直线$y=x+3$与x轴的交点为$(-3, 0)$。

∴ 光线在玻璃内的方程为$y=\frac{\sqrt{14}}{2}(x+3)$，

它与直线$y=-1$的交点为$\left(-3-\frac{\sqrt{14}}{7}, -1\right)$。

∴ 光线在玻璃后的方程为：$y+1=x+3+\frac{\sqrt{14}}{7}$。

即 $y=x+2+\frac{\sqrt{14}}{7}$。

光线在玻璃片内的行程为：$\frac{1}{\cos\beta}=\frac{3}{\sqrt{7}}$。

16. 求证直线 $Ax+By+C=0$分 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点连线所成的比为$-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$。

证明：设分点为 $P(x, y)$，则 $\begin{cases} x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$

∵ P点在直线 $Ax+By+C=0$上，

∴ $A\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0$，

$Ax_1+\lambda Ax_2+By_1+\lambda By_2+C+\lambda C=0$，

$\lambda(Ax_2+By_2+C)=-(Ax_1+By_1+C)$。

∴ $\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$。

17.* 已知三角形三边 AB：$4x+3y+1=0$，

BC：$y-9=0$， CA：$3x-4y-18=0$，

求 △ABC的三条内角平分线，并验证它们相交于一点。

解：∠A的平分线：$\frac{4x+3y+1}{5}=\pm\frac{3x-4y-18}{5}$。

∵ $K_{AD}>0$ ∴ 取负号

得 $7x-y-17=0$。

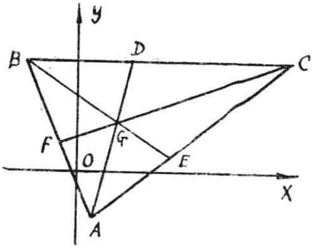


图 1.17

∠B的平分线：

$$\frac{4x+3y+1}{5}=\pm\frac{y-9}{1}.$$

∵ $K_{BE}<0$ ∴ 取负号

得 $x+2y-11=0$。

∠C的平分线：$\frac{3x-4y-18}{5}=\pm(y-9)$。

∵ $K_{CF}>0$ ∴ 取正号 得 $x-3y+9=0$。

$$\text{而}\begin{vmatrix}7 & -1 & -17\\1 & 2 & -11\\1 & -3 & 9\end{vmatrix}=0.$$

∴ 三条内角平分线交于一点。

18.* 证明：在直线同侧(异侧)的两个点$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$的坐标分别代入直线方程 $Ax+By+C=0$，左边所得到之值同号(异号)。

证(1)：设$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$在直线 L：$Ax+By+C=0$ 的同侧，连结M_1M_2并延长交直线L于M_0。

---

*注：本题是借助于几何直观确定正负号的，也可这样来确定符号，因为原点和角平分线上的点均在三条边的同侧，故由原点的坐标代入三条边的方程，左边得到的值应同号的性质，来确定正负号，结果是一样的。

设$\frac{M_1M_0}{M_0M_2}=\lambda$，$M_0(x_0，y_0)$。

∵　M_0在线段M_1M_2之延长线上，即M_0为线段M_1M_2的外分点，　　∴　$\lambda<0$。

由定比分割公式得：$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$。

∵　M_0在直线L上。

∴　$A\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+B\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+C=0$。

化简后可得：$Ax_1+By_1+C+\lambda(Ax_2+By_2+C)=0$。

$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}<0$，

∴　Ax_1+By_1+C与Ax_2+By_2+C同号。

同理可证，当$M_1(x_1，y_1)$和$M_2(x_2，y_2)$在L：$Ax+By+C=0$的异侧时，Ax_1+By_1+C与Ax_2+By_2+C异号。

证(2)：设过$M_1(x_1，y_1)$和$M_2(x_2，y_2)$平行于直线$Ax+By+C=0$的直线分别为　$Ax+By-Ax_1-By_1=0$和$Ax+By-Ax_2-By_2=0$，它们在y轴上的截距分别为：$\frac{Ax_1+By_1}{B}$和$\frac{Ax_2+By_2}{B}$，若M_1和M_2在直线L的同侧，　则　$\frac{Ax_1+By_1}{B}+\frac{C}{B}$与$\frac{Ax_2+By_2}{B}+\frac{C}{B}$同号。

---

*注：　直线$Ax+By+C=0$将平面划分为两个半平面，直线上的点的坐标满足$Ax+By+C=0$，不在直线上的点的坐标满足$Ax+By+C>0$或$Ax+By+C<0$。且当$C>0$时，原点所在的半平面有$Ax+By+C>0$.

当$C<0$时，原点所在的半平面有$Ax+By+C<0$，上述结论和本题的结论，应用于解题时，可以很方便地确定问题的解，防止不必要的错误产生。