

中国科学院工程力学研究所研究报告

# 有限单元法用于结构 抗冲击分析的若干问题

张 跃 勤

1979年8月10日

## 内 容 提 要

本文主要论述了爆炸荷载下地下结构动力反应采用有限单元法分析中如何选取模型的大小，单元尺寸和它的形状，边界条件以及时间步长等几个基本问题同时还提供了三个不同类型的计算实例和理论分析，实验研究的比较。

本文曾在1977年12月安徽黄山全国爆炸力学会议上作过介绍，~~在~~个别地方作了修改。

## 引 言

有限单元法在电子计算机迅速发展的情况下在各个领域得到了广泛的应用，尤其在结构分析中应用得更为普遍，并逐渐成为一行行之有效的独立分支。我们在爆炸荷载作用下的地下结构动力分析中应用了这个方法，对地下圆形结构、浅埋三跨闭合框架和弹性地基上厚壁箱形结构以及自由场等问题进行了研究，并取得了较好的结果。同时，在几年的计算实践中，对模型的大小、单元尺寸和它的形状、以及边界和交接面上计算应力误差的处理也做了研究。另外，为了提高计算精度，在三角形和矩形单元的基础上还应用了完全二次多项式的六节点三角形单元。

为了不使结构分析的力学工作者和设计人员把精力花在计算机程序上，我们把精度较高而又不增加准备工作量的六节点三角形单元，在静力和爆炸荷载下动力分析用 Bcy-655 机语言编制的程序作为附录列在最后。

### 一. 有限单元离散化基本方程

弹性体有限单元离散化方程许多资料都有详细的介绍，这里只作一个简单的引述

#### 1.1 动力平衡方程和对时间的积分

离散体系的动力平衡方程

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{u}_t\} + [C]\{\dot{u}_t\} + [K]\{u_t\} = \{P_t\} \\ u_0 = \dot{u}_0 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

式中  $[M]$  — 质量矩阵， $[C]$  — 阻尼矩阵， $[K]$  — 刚度矩阵。 $\{\ddot{u}_t\}$ 、 $\{\dot{u}_t\}$  和  $\{u_t\}$  分别是节点加速度、速度和位移在“ $t$ ”时刻的向量列阵。 $\{P_t\}$  是“ $t$ ”时刻节点荷载列阵。

对方程 (1.1) 的积分采用 Wilson 法。该法当  $\theta > 1.37$  时是无条件稳定的。我们采用  $\theta = 2$ 。即在  $x - \Delta x$  至  $x + \Delta x$  时间内加速度是线性变化的，速度是二次曲线，位移是三次曲线 (9)

### 1.2. 刚度矩阵

对平面应力或平面应变的问题，刚度矩阵为

$$\{K\}_e = \iint (B)^T (D) (B) dx dy, eS, \quad (1.2)$$

式中  $(D)$  是联系应力和应变的弹性矩阵； $(B)$  是用节点位移确定应变的矩阵； $t_3$  是单元的厚度，通常可取  $t_3 = 1$ 。三角形单元是  $3 \times 6$  的矩阵，矩形单元是  $3 \times 3$  的矩阵 (5)。

整体刚度矩阵的装配：

$$K_{IR} = \sum_e K_{IR}^e \quad (1.3)$$

当  $I = R$  时是对共同点单元求和，当  $I \neq R$  时是对共同边单元求和。

### 1.3 阻尼矩阵

平面问题中的阻尼矩阵的一般表达式为

$$\{C\} = \iint (N)^T A (N) dx dy \quad (1.4)$$

式中  $(N)$  为形状函数， $A$  为阻尼系数，即单位速度下单位体积内的阻尼力，在实际应用中通常采用。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.5)$$

$$\alpha = \lambda \omega_1, \quad \beta = \lambda / \omega_1$$

其中  $\lambda$  是阻尼比， $\omega_1$  是计算模型的基频。

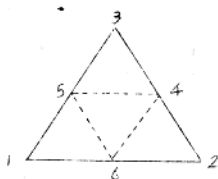
### 1.4 质量矩阵

在平面问题中的质量矩阵的一般表达式为

$$\{M\}_e = \iint (N)^T \rho (N) dx dy \quad (1.6)$$

式中  $\rho$  为材料密度

按 (1.6) 式计算的质量矩阵是一个分布质量矩阵，一般为节省存储量采用集中质量法的对角矩阵。三角形单元是把单元质量的  $1/3$  分别分配在节点上，矩形单元是把单元质量的  $1/4$  分别分配在节点上，六节点三角形单元是把它分成几个简单三角形单元处理的，从而得质量的对角矩阵



六节点单元

$$[M]e = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & & & & & \\ & \frac{1}{12} & & & & \\ & & \frac{1}{12} & & & \\ & & & \frac{1}{4} & & \\ & & & & \frac{1}{4} & \\ & & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

六节点单元质量矩阵

### 1.5 应力矩阵

$$(\varepsilon) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = (B) \{f\} \quad (1.7)$$

$$(\sigma) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = (D) \{ \varepsilon \} = (D) (B) \{ f \} \quad (1.8)$$

$$(P) = (B_1, B_2, \dots)$$

$$\{B_i\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

式中  $\{f\}$  是位移向量列阵，其他同前。

## 二. 计算中的几个技术问题

众所周知，对于弹性平面动力问题有限单元法，即解方程(1)只要  $\{M\}$ 、 $\{c\}$  和  $\{K\}$  一旦确定，采用 Wilson  $\theta$  法就可以得到较为满意的结果。但除了上述问题之外，对动力有限单元计算中的模型大小的选取，单元尺寸及其形状，以及模型的边界条件和积分时间步长的取法等几个问题，仍然是在动力计算中所必须解决的。这些问题如处理不当，有时将会使整个计算不能取得较好的结果。下面就采用三角形单元及矩形单元时上述几个问题作一论述，所得结果对其他单元也可参考使用。

### 2.1 模型大小的选取

多数抗冲击结构是设置在地下或半地下的，因此在计算中结构周围介质取多大才能保证结构的计算结果有足够的可靠性。取得过大增加不必要的计算量，取得过小，由此带来边界效应，将给计算造成误差。在弹性力学静力问题中，边界效应的考虑通常以圣维南原理为基础。但在弹性动力学问题中，边界效应就比较复杂，它与边界尺寸、介质情况和荷载特性都密切相关，目前尚没有普遍的结论，通常只能根据经验和试算来确定。我们以等速传播的平面脉冲波对带有衬砌的圆形孔洞的绕射问题作为例子，

来说明如何选取模型的大小。如图 2.1 所示，取一个直径为 2 米，壁厚 0.2 米的筒型结构，模型尺寸为筒孔直径的五倍和十倍两种。

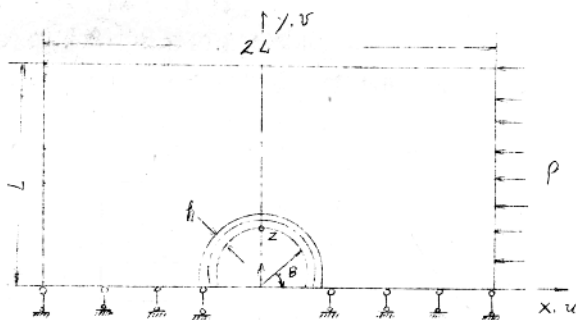


图 2.1 模型

介质和结构的材料特性如表 2.1

材 料 特 性			表 2.1
	$E$ (公斤/米 <sup>2</sup> )	$\rho$ (公斤-秒 <sup>2</sup> /米 <sup>4</sup> )	$\mu$
介 质	$7.03 \times 10^8$	272	0.25
结 构	$17.6 \times 10^8$	256	0.20

荷载强度  $P_0 = 0.4787 \times 10^4$  公斤/米<sup>2</sup>，波速  $v_p = 1750$  米/秒，矩形脉冲的延续时间  $T_0 = 0.00625$  秒。

单元的划分是在结构上分为三层，由内向外由小到大逐渐扩展。

边界条件如图 2.1 所示取为外边界左右为力边界，右边界脉冲波作用时为  $P_0$ ，脉冲波通过后为零；左边界在脉冲波未到达和通过后为零，作用时为  $P_0$ 。上边界法向位移为  $V = 0$ ，水平的随时间变化的力边界；下边界利用模型的对球性，法向位移  $V = 0$ 。

水平向自由。半圆内边界为自由边界。

考察点1和点2的位移和应力(点1 ( $\theta = 0$ ) 取径向位移  $u_r$ , 点2 ( $\theta = 90^\circ$ ) 取切向应力  $\sigma_\theta$ , 并把该点的值与HYMAN GARNT的理论解(1)作比较, 其结果如表2.2。从表2.2看出, 应力的误差比位移的误差要小。对于强度设计而言主要是对应力感兴趣, 同时又考虑到节省计算时间, 因此取模型的大小是结构特征尺寸的五倍通常是可以满足要求了。

表 2.2

$\rho/R$	单 值 误 差 %	
	位 移	应 力
5	-6.76	-1.123
10	-4.17	+1.123

## 2.2 单元尺寸和形状

在通常情况下单元尺寸取得小些, 又取成等边三角形或正方形, 就能得到较高的精度, 但对于不同的问题, 对单元尺寸的大小和形状的要求也有所不同。在静力问题中, 只要对关心的部位单元取得小些, 其他的部位单元就可适当的大些, 也不会对计算结果带来太大的影响。但在动力问题中, 就得从两个方面来考虑。如果只对动应力的的大小感兴趣而对加速度的计算精度要求不高时, 那可同静力问题一样, 在局部范围内, 单元取得小些, 而在其他部位适当取得大些即可。如果相反, 那就取均匀大小单元为好。如果两者都要考虑到, 则需在波传来方向的单元不能太大, 要有一个限制。类似于(4)所指出的那样, 使波阵面通过单元的时间  $T_z$  小于荷载波形的特征时间  $T_0$ , 对于有一定上升时间  $t_r$  的波形, 根据一维平面波中传播的计算  $T_z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} t_r$  (12) 其中  $T_z$  计算可按下式



$$T_2 = \frac{H_e}{V_p} \quad (21)$$

式中  $H_e$  是一个单元沿波传播方向的距离,  $V_p$  是波的传播速度。

下面列举二个实例来说明单元的划分中应注意到单元尺寸不能随意放大, 并且单元的形状也不要太扁长, 否则将大大降低计算的精度。

(1) 单元尺寸不能随意放大

有时为了减少边界所带来的影响而把模型放大, 但又要减少单元的数目, 往往离结构较远处单元取得较大, 实际上这样做往往并不能提高计算的精度。我们以图 2.1  $l/R = 5$  的模型为基础, 把模型扩大为  $l/R = 10$  和  $l/R = 20$ 。  $l/R$  放大的模型是从  $l/R = 5$  的模型之外增加单元数, 并逐渐的放大单元尺寸。这时可计算出在波传来方向上最大单元的距离  $H_e$  和通过该单元的时间  $T_2$ 。我们在同一时间步长下计算出这三种不同大小模型的加速度和应力, 画出它们的时程曲线图, 表 2.3 就是在时间步长  $dt = 0.00005$  秒下计算出加速度和应力的峰值和误差。

表 2.3

模 型 编 号	$H_e$ (米)	$T_2$ (秒)	加速度 $\theta = 0^\circ$		应力 $\theta = 90^\circ$	
			计算值 (米/秒 <sup>2</sup> )	误差 %	计算值 (公斤/厘米 <sup>2</sup> )	误差 %
1	0.9	0.002	18.76	5.06	2.410	1.123
2	1.7	0.0039	9.497	54.5	2.470	1.123
3	3.3	0.0076	3.831	80.8	2.547	4.39

(注): 计算误差时, 加速度取  $dt = 0.00001$  秒时模型 No. 1 的结果  $\ddot{x} = 19.76$  米/秒<sup>2</sup> 作为标准值, 应力取理论解 (1) 的结果  $\sigma_x = 2.44$  公斤/厘米<sup>2</sup> 作为标准值。

从表2-3可以看出,随着波传来方向单元尺寸的增大,加速度很快的减小,而应力的变化则是比较小的。因此对于加速度来说,单元是不能随意放大的,尤其是几个大单元将影响全部的计算结果。在图2-2中可以看出,单元尺寸的增大意味着高频分量被削弱。图2-2a是模型No1的加速度波形,它具有丰富的高频分量;图2-2b是模型No2的加速度波形,由于单元尺寸的增大,高频分量就减少了;图2-2c是模型No3的加速度波形,已是一条光滑的曲线。从图2-3的三条应力波形中也能看出,随着单元尺寸的增大波形也趋向光滑,棱角趋向消失。由此可以看出,对于动力问题在波传来方向上的单元尺寸是不能随意放大的,尤其是对运动量的计算结果是敏感的。

## (2) 单元形状不能太扁长

在有有限单元静力计算中,对于单元形状的影响,已有不少人作过研究(5)(8),但对于动力问题却很少资料可以借鉴。我们对两端固定的砼梁,在上表面均布动荷载作用下,对具有不同单元的形状的几种模型计算其动力反应。梁的长高比为6.2:1,荷载形状如图2-6b。

从模型I、IV的结果可以看出,它们虽具有相同数目的单元和节点数,但由于单元形状之不同,计算结果有较大的差异。模型I虽只分为三层,但单元形状为正方形或接近正方形;而模型IV虽然分为五层,但单元形状为扁长,高宽比为1:2.5,所以其计算结果无论是位移、加速度和应力均比模型I要差。因为波通过一个单元的时间 $T_z$ 是足够小的,所以不存在 $T_z$ 太大的影响,而单元形状的不同对计算结果的影响成为突出的因素。现取五个模型如图2-4所示,用同一荷载和相同的时间步长算出它们的结果,比较深的中间截面的上表面点的位移 $V$ 、加速度 $\dot{V}$ 和应力 $\sigma_x$ 的峰值与较精确结果的误差列在表2-4,分析它们对单元形状变化的敏感度。

表 2.4

模型	位 移 $v$		加 速 度 $\dot{v}$		应 力 $\sigma_x$	
	计算值(米)	误差 %	计算值(米/秒 <sup>2</sup> )	误差 %	计算值(公斤/厘米 <sup>2</sup> )	误差 %
I	$-0.9326 \times 10^{-3}$	+1.54	-22.55	+0.31	-44.27	-5.01
II	$-0.7466 \times 10^{-3}$	+3.15	-22.61	+0.58	-44.97	-3.52
III	$-0.7327 \times 10^{-3}$	-20.15	-16.62	-26.1	-35.93	-22.9
IV	$-0.8670 \times 10^{-3}$	-5.53	-22.22	-1.15	-43.63	-6.4
V	$-0.9177 \times 10^{-3}$		-22.48		-46.61	

注：表 2.4 中误差是以模型 V 的结果为标准计算的。

表 2.4 中的数据是在时间步长  $\Delta t = 0.0005$  秒下得到的，唯模型 II 例外， $\Delta t = 0.00005$  秒。在位移、加速度、应力三个项目中，位移和加速度对单元高宽比的反应是灵敏的，模型 III 是单元最扁长节点又少的一种模型，其结果最差，模型 I 和 IV 是节点数相同分层不同和单元形状不同。模型 I 虽分为三层，但单元是正方形和接近正方形的，而模型 IV 是分五层，但单元是 1:2.5 的扁长形的，其结果模型 I 比 IV 要好。模型 V 和 II 相比，V 在梁的上下表面多了二层高宽比 1:2 的单元，位移和加速度都下降了，其值还比不上模型 I。对于应力则不完全是这样。由于模型 V 的单元小而把应力提高了，由此可以认为：位移和加速度的精度主要依赖于单元的等边长；应力的精度主要依赖于局部单元的缩小。

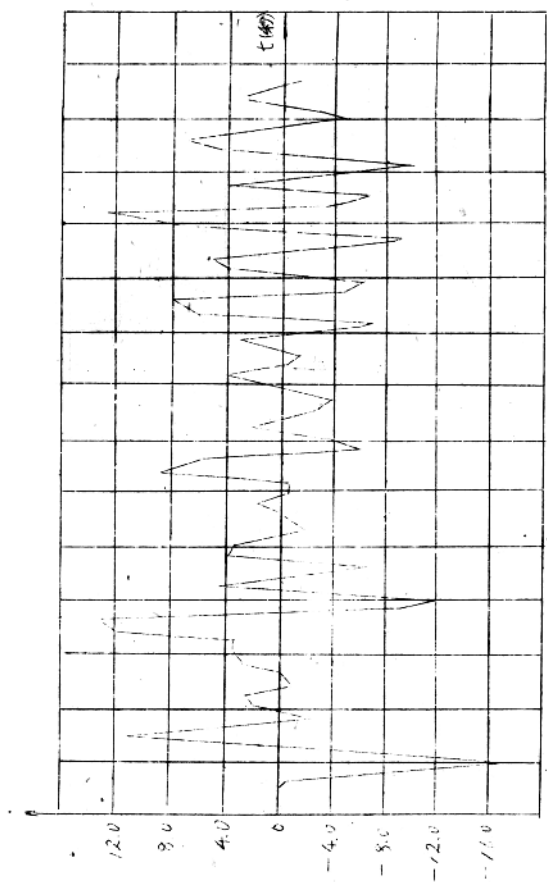
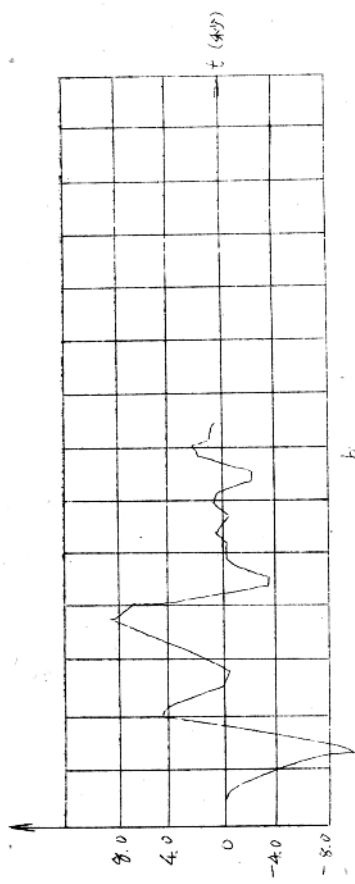
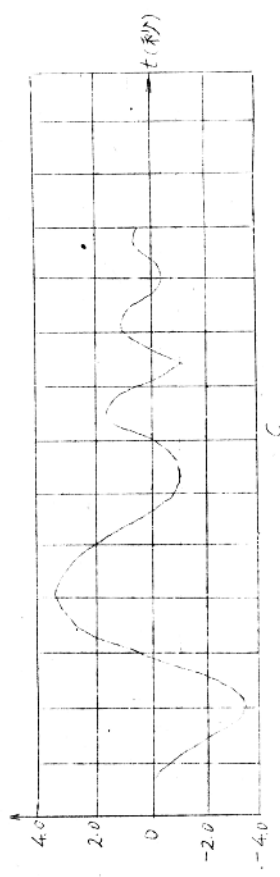


图 2.2 加速度波形 0) 模型 No.1



b



c

图 2.2 加速度波形 b 模型 1/2 c) 模型 1/3

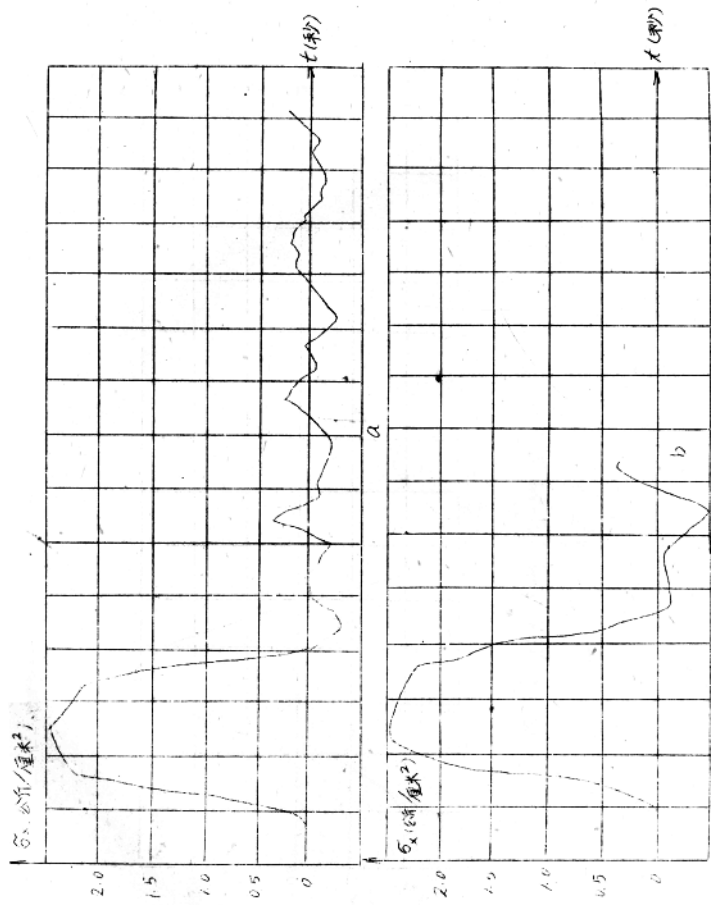


图 2-3 应力波形 a. 模型 A1 / b. 模型 A2

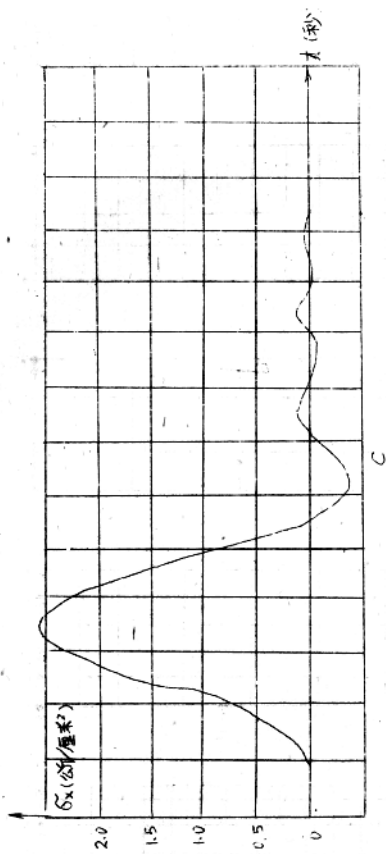


图 2.3 应力波形 (模型 No. 3)

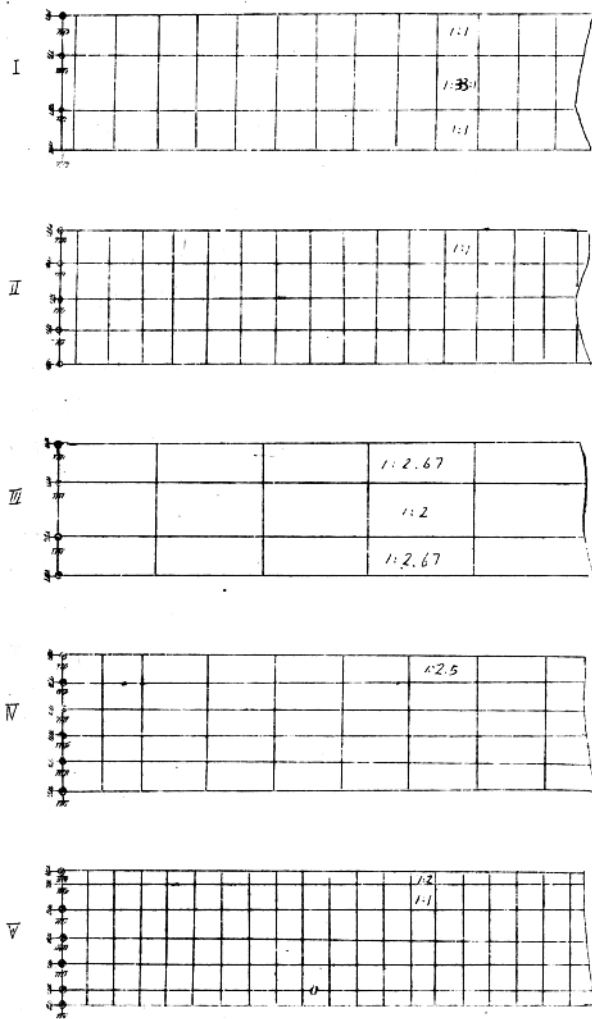


图 2.4 固支梁各种高宽比单元



### 2.3. 时间积分步长的选取

我们的问题是求解  $N$  个自由度结构体系的动力反应，即方程 (1.1) 的积分。我们采用无条件稳定的  $\theta = 2$  的 Wilson $\theta$  法。

数值积分的精度一般地说取决于荷载、体系的物理参数和时间步长的大小。根据文献 (2) 和 (4)，时间步长  $\Delta t$  的选取与体系的基本周期和荷载的特征时间  $T$  有关。文献 (2) 把数值积分的误差用反应的幅值减小和反应的特征时间的延长来度量，而反应幅值减小和反应的特征时间延长是  $\Delta t/T$  的函数。並指出，当  $\Delta t/T$  小于约 0.01 时积分是精确的，当  $\Delta t/T$  增加时数值积分引起大的反应幅值减小和特征时间延长。对于一个具体问题，为了节省计算时间和满足工程要求，存在一个满足一定误差的合适时间步长。下面举二个例子来说明  $\Delta t$  的取法和对结果带来的误差。

(1) 仍取图 2.1 的模型，材料特性和荷载条件都同前，模型大小为  $l/k = 5$ ，並算得模型的基本周期  $T_1 = 0.02$  秒，矩形脉冲波的延续时间为  $T_0 = 0.00625$  秒。由图 2.5 可看出，对于不同物理量积分时间步长的影响程度不同，应力和加速度对积分时间步长的改变反应特别敏感。而位移的反应特别迟钝，积分步长减小 50 倍峰值误差变化不到 1%。对于加速度和应力分别取时间  $\omega_1$