第一篇　流 体 力 学

目　　录

第 一 章　流 体 的 性 质

第 二 章　液体和气体的平衡

第 三 章　流 体 动 力 学

第四章　能量平衡在流体运动中的应用

第五章　固定散料层

第六章　边界层

第七章　因次分析与模型理论

第七章 因次分析与模型理论

在流体运动、传热和传质过程中，往往包含多个变量，减少变量数目可以显著减少实验的次数。然而变量的数目是客观规律的反映，不能任意增减，利用因次分析可以将几个变量组成一个无因次数，一组无因次数群可以准确地描述一个复杂过程。在一组无因次数群中包含的无因次数的数目要少于变量的数目，所以用无因次数组成的方程代替由变量组成的方程可以达到减少变量的目的。正因为如此，在实验科学中，因次分析是一种有用的工具。

模型理论是因次分析法在实践中的又一个应用，它确定了模型与原型在过程机理上相似的必要条件。本章讨论因次分析与模型理论及它们在物理过程中的应用。

§7-1 因次分析的基本用途

在第一章中曾经提到，一个准确的物理方程中各项的因次必须一致，这种因次和谐的方程可以用来进行数值运算。因次分析的目的则是从因次和谐出发研究所涉及的各个变数间的联系。举例来说，我们需要在不作任何实验的条件下确定单摆周期与所涉及的各个变数间的数学关系。与单摆周期可能有关的变数是单摆的质量 m、摆长 l、重力加速度 g，也可能与摆角 ϕ 有关。这样就组成函数 $t=\phi(m\cdot l\cdot g\cdot \phi)$，从方程等号两侧因次和谐出发能获得什么结论。如果采用以质量作为基本性质的单位制，那末除了三个基本性质（时间、质量、长度）以外，函数 ϕ 中只含有一个导出单位，即重力加速度，它的因次是 LT^{-2}，还有一个无因次数 ϕ。在方程

$$t=\phi(m\cdot l\cdot g\cdot \phi) \qquad (7-1)$$

的右侧，不论是采用 SI 制或工程单位制进行数值运算，结果都应该一致，但只有在改变时间的单位时，单摆摆动周期的数值才要影响，而改变长度的单位或质量的单位对周期没有影响，所以等号右侧

不受这两种性质所选单位的大小（克或千克、厘米或毫米）的影响。它们的影响只应包含在ϕ中。如果仅仅是改变所采用的质量的单位，这只能影响到m的数值，因为四个变量中只有m才含有质量这一项基本性质，l、g或φ不受影响，所以函数的解不受m的改变的影响，或者说解中不含m，于是函数ϕ必然与m无关。换句话说，如果函数ϕ中含有m，则式（7-1）不可能因次和谐。

但当改变长度的单位时情况就不同了，因为它不只影响到l的数值，而且影响g，因为重力加速度的导出单位是LT^{-2}，如果要使长度单位的改变在l和g中相互抵消，那末函数ϕ中必须含有$\frac{l}{g}$项。$\frac{l}{g}$中的因次是T^2（分子分母中的L已消去）。由于摆角φ不含时间的单位，所以函数ϕ与时间单位之间的联系就集中在$\frac{l}{g}$中。要使等号左右两侧的因次一致，函数ϕ必须与$\frac{l}{g}$的方根成比例。于是得到

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\,\phi_1(\varphi) \qquad (7-2)$$

式中ϕ_1是一个与φ角有关的函数，它是无因次的，所以用因次分析方法来确定它的函数关系，但是用单摆作一系列实验，固定l、g不变，单S变动φ就能够确定单摆的周期。用来作实验的单摆将是所有单摆的一个模型，当改变任一个参数从而使任何一个单摆的周期发生变化的情况将与供实验的那个单摆完全一样。所以因次分析的重要价值在于它可以大大减少变量的数目，至于这些变量间的内在联系应该由详尽的数学分析来确定。在上已所举的例子里，经过因次分析以后只需要确定函数$\phi_1(\varphi)$。大家知道，当$\varphi \ll 1$时它等于2π。然而因次分析虽然不需要实验就可以找出m、l、g和t间的关系。但没有伽利略的实验还是不行，因为重力加速度的因次LT^2是上述逻辑推理的关键，如果没有伽利略的实验，我们是不清楚的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

可以将上述方法拟定为一种固定程序，首先我们假设欲求的函数是带有幂次的有关项的乘积，事实上这是非常可能的，式（7-1）以下式表示．

$$t=Al^{\alpha}m^{\beta}g^{\gamma}\varphi^{\delta} \tag{7-3}$$

式中A为无因次比例常数．

如果以相应的因次乘积来取代l、m、g、φ．则得

$$[T]=[L]^{\alpha}[M]^{\beta}[LT^{-2}]^{\gamma} \tag{7-4}$$

上式中的方括号表示等号两侧仅仅是因次相等而非数值相等，无因次常数由于不带因次，已在式（7－4）中略去。

等号两侧，每一个基本性质的幂次必须相等，在比较了等号左右侧的幂次后得到

$$\left.\begin{array}{ll}\text{关于}L & 0=\alpha+\gamma\\ \text{关于}M & 0=\beta\\ \text{关于}T & 1=-2\gamma\end{array}\right\} \tag{7-5}$$

解式（7-5）得$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=0$，$\gamma=-\frac{1}{2}$，而δ则不表示什么，求解式（7－5）所得结果与式（7－2）相同。

可能会怀疑，以带有幂次的有关变数的乘积来代表所求函数的方法是否可以普遍适用。就在上述所举例子中，在摆长和重力加速度间的关系符合要求，而在摆角的问题上存在另一种关系，将单摆的微分式积分后可得

$$\phi_1(\varphi)=2\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\cdots\cdots\right] \tag{7-6}$$

式（7－6）中的函数并不是φ^{δ}，而是$\Sigma A_n\varphi^n$，事实上我们经常遇到类似的例子。例如在气压方程（§2．3）中、

$$p=p_0\exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$$

在理想气体等温膨胀的作功中（§1－6.）

$$W = RT\log\left(\frac{P_W}{P_\alpha}\right)$$

但是这些函数一般可以用幂级数来表达，而在式（7-6）的每一项中都包含一个$\sqrt{\frac{l}{g}}$的因次，把这个因子拿到括号外面就得

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \Sigma A_n \varphi^n = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \phi_1(\varphi)$$

所以用带有幂次的变数的乘积来代表所求函数是适用的。

§7-2 无因次数

对一个因次和谐的方程，只要用等号右侧的数群除左侧的数群，于是在左侧得到无因次数群，而在右侧得1，以管流时的压力降为例可得

$$\frac{2\Delta P D}{\rho V^2 L 4f(Re)} = 1$$

上面例所大数群显然是由几个较简单的数群组成，即由无因次数E_l，$\frac{D}{L}$和函数$f(Re)$组成。$\frac{D}{L}$可以写成$\left(\frac{D}{L}\right)^n$，其中$n$不论是有理数或无理数，左侧的无因次性质不变。然而虽然无因数可以多以幂次，但是如果要保留无因次性质，那末无因数群中的任一组成的幂次不能任意变动，譬如$F_r = \frac{V^2}{Lcg}$，它是无因次数，但$\frac{V^n}{Lcg}$，如果$n \neq 2$，它就不是无因次的了。

为了使用因次分析法，需要了解无因次数群在所研究的过程中的作用。在§3-5中所述的方法并不总具有实用意义，因为不是所有的过程都可归因于力。例如扩散系数就不能满意地用力来表示。一般说来，可以用列表的方法寻找它们的性质。譬如在管流过程中包含的变数有压差ΔP、速度V，管径D、粘度μ、密度ρ和重力加速度g。我们将这些变数排列成表，并以因次L、M、和T来表达，如下表所示。

	Δp	v	D	μ	ρ	g
L	-1	1	1	-1	-3	1
M	1	0	0	1	1	0
T	-2	-1	0	-1	0	-2

在乘积 $$\pi = \Delta p^{\alpha} v^{\beta} D^{\gamma} \mu^{\delta} \rho^{\varepsilon} g^{\xi} \qquad (7-7)$$

中，最终因次要消失，这表示在幂次α、β、γ、δ、ε、ξ 中必然存在某种联系，这可以用以基本性质表达的方法来找出这种联系，亦即可以写出下列关系

$$\pi = [L^{-1}M^{-1}T^{-2}]^{\alpha}[LT^{-1}]^{\beta}L^{\gamma}[L^{-1}M^{1}T^{-1}]^{\delta}[L^{-3}M^{1}T^{0}]^{\varepsilon}[LT^{-2}]^{\xi}$$

因为π是无因次的，显然在幂次α、β、γ、δ、ε、ξ间存在下述三个线性方程。

$$\left.\begin{aligned} &L\text{的幂次方程：} -\alpha+\beta+\gamma-\delta-3\varepsilon+\xi=0 \\ &M\text{的幂次方程：} \alpha+\delta+\varepsilon=0 \\ &T\text{的幂次方程：} -2\alpha-\beta-\delta-2\xi=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7-8)$$

未知数有六个，方程只有三个，于是有多种方式来构成无因次数π。譬如我们取α、δ和ξ为已知，再用式(7-8)来计算三个未知数β、γ和ε。

$$\left.\begin{aligned} &\beta=-2\alpha-\delta-2\xi \\ &\gamma=\xi-\delta \\ &\varepsilon=-\alpha-\delta \end{aligned}\right\} \qquad (7-9)$$

代入式(7-7)得

$$\begin{aligned} \pi &= \Delta p^{\alpha} v^{-2\alpha-\delta-2\xi} D^{-\delta}\mu^{\delta}\rho^{-\alpha-\delta} g^{\xi} \\ &= \left(\frac{\Delta p}{v^2\rho}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mu}{vD\rho}\right)^{\delta}\left(\frac{Dg}{v^2}\right)^{\xi} \end{aligned} \qquad (7-10)$$

式(7-10)中的三个幂次α、δ和ξ可以取任何值，只要β、γ和ε满足式(7-9)，式(7-8)也就满足了，从而π的无因次性

项就能得到保证。于是我们取 $\delta=0$，和 $h=0$，这得到第一个无因次数，

$$\pi_1 \equiv \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

π_1 亦称为 E_u 数。如果取 $\alpha=0$ 和 $h=0$，得到

$$\pi_2 \equiv \frac{\mu}{VD\rho} \equiv \frac{1}{Re}\,.$$

最后

$$\pi_3 \equiv \frac{Dg}{V^2} \equiv \frac{1}{Fr}$$

这三个无因次数群 E_u、Re 和 Fr 是许多可能构成的无因次数群中的三个。从数学的眼光来看，其他无因次数群与它们完全等价。以 α、β 和 γ 代替 α、δ 和 h，得到，

$$\pi=\left(\frac{\Delta P}{\mu^{2/3}\rho^{1/3}g^{2/3}}\right)^{\alpha}\left(\frac{V\rho^{1/3}}{\mu^{1/3}g^{1/3}}\right)^{\beta}\left(\frac{D\rho^{2/3}g^{1/3}}{\mu^{2/3}}\right)^{\nu}\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(7-11)$$

括号左右两侧立方以消去 $\frac{1}{3}$ 次方，无因次性质不变，得

$$\pi_1' \equiv \frac{\Delta P^3}{\mu^2\rho g^2} \qquad \pi_2' \equiv \frac{V^3\rho}{\mu g} \qquad \pi_3' \equiv \frac{D^3\rho^2 g}{\mu^2} \qquad (7-12)$$

这三个无因次数可用已知的无因次数表示，例如

$$\pi_1' \equiv E_u^3 Re^2 Fr^2$$

除了上述取 α、δ 和 h、α、β 和 ν 这两种方式以外，还有18种可能的方式。所以由每三个无因次数群构成的无因次数组有20个之多，再加上它们的乘积又得出新的无因次数，这样就有许多个无因次数组。由于可能性太多，显然不便在实际中应用。但是从实用出发可以得到一个有意义的表示方法。从实用出发，首先我们要求所求解的变数的幂次应该是1，于是 $\alpha=1$，如果再要求 ΔP，μ 和 g 分别只出现在一个无因次数群中，那末必须使 $\delta=0$ 和 $h=0$，于是 ΔP 只出现在 E_u 数中，而 μ 和 g 则分别只出现在 Re 和 Fr 数中。所以要求某几个参数只出现在一个无因次数群中是因为这样

个特定条件下，某一个变数不影响过程的进行。譬如在我们所选择的例子中，在有些情况下可以把流体作为无粘性流体处理，于是粘性μ没有意义，所以Re也没有意义，可不考虑。同理，在有些过程中，重力加速度的作用可以不计，于是Fr数可以不考虑。在管流中，虽然由每三个无因次数群构成的无因次数组有20个之多，但符合上述两项实用要求的只有一组，即E_u、Re和Fr数。上述考虑显然不是出于数学上的要求，而是从实用出发。在一个特定条件下，这一组无因次数比较合用，在另一个特定条件下，可能另一组无因次数较合用。

在本例中还可以看到，无因次数群的数目等于可以任选幂次的数目，亦即是问题中出现的因子数目n减去互相独立的方程的数目，利用这几个方程〔类似方程（7-8）〕可用其他幂次来表示另一些幂次。而对任一类方程来说，总可以写出类似方程（7-8）那样的关系式，由于方程（7-8）的数目和基本性质的数目相同，于是可以这样说，无因次数群的数目等于问题中出现的变数减去基本性质的数目。

设有一组无因次数，具备以下两个性质：

（1）不包括在这组无因次数群中的，由相同的基本性质构成的其他无因次数可以用这些数群的乘积来表示。

（2）这组无因次数群中的任一个都不能用同组中的其他无因次数群来表示。

凡具备上述两项性质的无因次数组称为完整组合（Complete set）。

如果π是由问题中出现的变数所构成，但不包括在Re、E_u和Fr数组中的一个无因次数，那末按照性质（1），下式

$$\pi = E_u^{\alpha} Re^{\beta} Fr^{\nu} \tag{7-13}$$

经常是有可能的，式（7-12）就是一个例子。一般说来，如果无因次数群π_1、π_2……π_i构成完整组合，按照性质（1），任何其他无因次数群总可以这样表示

$$\pi_n = \pi_1^{\alpha} \pi_2^{\beta} \cdots\cdots \pi_i^{\varepsilon} \qquad (7-14)$$

另一方面，如果问题中出现的变数中的一个只包括在无因次数组中的一个无因次数中，那末该无因次数组中的i个无因次数群中的任一个都不能用该组中的其他$i-1$个无因次数来表示。譬如μ只包含在Re中，这意味Re数不能用Eu和Fr来表示。又ΔP只包含在Eu中，所以Eu数不能用Re和Fr来表示。上述就是完备组合所需具备的第二个性质。反过来说，完备组合中的无因次数应该具备这项性质。

关于确定构成完备组合的无因次数的数目，不作数学证明，但综合以上所说的步骤加以归纳。

设问题中涉及的变数是x_1、x_2、x_3、……x_n，其中大部分是有因次的，作为式（7-7）的一般化，可以得到任一个无因次数群乘积π_1、π_2、π_3……π_i。

$$\pi = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (7-15)$$

这样的乘积有i个。在无因次数群中的变数x_1、x_2、x_3……x_n可用基本性质来表示，即用L、M、T来表示。在力学问题中，长度、质量和时间三个性质已能满足使用要求。但这三个基本性质不是唯一的，亦可以使用长度、力和时间，或长度、能和时间。不管采用哪一个基本性质，计算步骤不变。在涉及热学的问题中应该再增加一个基本性质——温度，以Ⓗ表示，在电学中，通常采用电流为基本属性，于是式（7-15）的右侧不过是基本性质的乘积。因为对每一种性质来说，必须满足式（7-15），于是在每个性质的幂次间可得到与基本性质数目相同的线性方程。

如果m是基本性质的数目，我们就有m个线性方程以推算n个未知数α_1……α_n。如果这些线性方程相互独立，那末$n-m$个未知数可以任意决定。其他$n-(n-m)$个未知数则可以利用m个方程来计算。不管这些方程是否相互独立，采用这个方法计算总是适当的。如果这些方程相互独立，那就可以取得正确的结果。如果它们

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

不是相互独立，经过代换也可以得到同样结果。一般来说，相互独立的方程的数目 r 要小于或等于基本性质的数目。综合所述可得

(1) 完全组合中的无因次数群的数目 i 等于变数的数目 n 减去相互独立的方程的数目 r，或者用数学语言来说，

$$i=n-r$$

(2) 以这样的方法所获得的 i 个无因次数群 π_1、π_2、…π_i 组成一个完全组合。

§7-3 白金汉(Buckingham)定理——π定理

由上节所述可知，对因次和诸方程的因次进行研究可以得出一些结论，但在仔细研究这些重要的实际可能性前，将讨论此法的原则，我们将以π定理作为讨论的出发点。

π定理：

一个因次准确的方程可以用一个完全组合的无因次数间的关系式来表示。

设有因次正确的方程为

$$F(x_1、x_2、x_3\cdots\cdots)=0 \qquad (7-16)$$

这里的 x_1、x_2……是有因次量。上式经常可以写成下列形式：

$$\phi(\pi_1、\pi_2、\pi_3\cdots\cdots)=0 \qquad (7-17)$$

这里的 π_i 係指由 x_1、x_2、…… x_i 构成的无因次数群。π定理的证明从略。由上节的无因次数群的推导，已经知道π定理是确凿的，但还要再加以说明。凡是真实反映自然规律的物理方程必然与所用的单位制无关，式(7-17)满足这点要求，因为式(7-17)中的每一个数都是无因次数，因而与所用单位制无关。从另一方面说，每一项自然规律可以以式(7-17)的形式表达。所以式(7-17)

的形式不仅是适当的，而且也是与所用单位无关的一个必要条件。

所以在大量的数学方程中，π定理仅仅适用于那些只用来描述物理过程的函数。譬如，自数学角度看，两个正确的方程之和仍是一个正确的方程。下述两个方程 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 和 $E=\frac{1}{2}mV^2$（S—距离、t—时间、E—能量，m—质量，V—速度）的和，即 $S+E=\frac{1}{2}(gt^2+mV^2)$ 在数学上仍是正确的，但在物理上不再有什么涵义了，此时π定理不再适用。

再例如，在地球表面，对单摆摆长和周期来说，下式近似准确。

$$t=2\sqrt{l}$$

式中 t — 时间，其单位必须是秒，l — 长度，其单位必须是米。此式在因次上是不和谐的，所以不是反映自然规律的数学方程，只不过是一个经验关系式。它之所以准确，只不过是在地球表面上，$\sqrt{g}$ 恰好接近于π。对于类似 $t=2\sqrt{l}$ 一类的关系式来说，π定理也不再适用。单摆摆长与周期的正确的因次和谐方程是 $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$。对此式来说，π定理适用，可得 $\pi=\frac{t^2g}{l}=4\pi^2$。

实践中证明π定理具有这样的用处：

一个用处是在采用π定理后可使无因次数的数目少于变数的数目，这对进行试验和评价试验结果来说，有很大好处。

一个变数和另一个变数间的关系可用曲线来表示。为了阐明变数 x_1 和另二个变数 x_2 和 x_3 间的关系，如果以 x_1 为横坐标，x_2 为纵坐标，可得到一簇在不同 x_3 值时的曲线。如果再引入一个变数，即总共四个变数，那么要用几簇曲线来表述，每簇曲线相当一个给定的 x_4。如果再引入一个变数，即总共有五个变数，那么要几群这样的曲线，更为复杂。

也可以这样说，函数 $x_1=f(x_2)$ 可用平面中的一根线表示，函数 $x_1=f(x_2\ x_3)$ 可用空间中的面来表示，而函数 $x_1=f(x_2、x_3、x_4)$ 就要以四维空间来表示。如果一个变数与另一个变数间的

关系通过五次测定来决定，亦即是每条曲线由五个点绘成，那末我们需要

在 $x_1=f(x_2)$ 时　　$1\times5=5$ 次测定；

在 $x_1=f(x_2\ x_3)$ 时，　　$5\times5=25$ 次测定；

在 $x_1=f(x_2\ x_3\ x_4)$ 时　　$5\times5\times5=125$ 次测定；

在 $x_1=f(x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ 时　　$5\times5\times5\times5=625$ 次测定；

对一个复杂构想来说，进行625次测定将需要多年的研究。很易看出，变数的数目自几减少到 $i=n-r$，将大大节约时间和费用。所以为了节约人力和资金，需要利用因次分析法。

此外，如果能将变数 $x_1\ x_2\cdots\cdots x_n$ 分开，可大大简化试验方案。譬如用 $x_1=f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)f_5(x_5)$ 来代替 $x_1=f(x_2、x_3、x_4、x_5)$。设每项函数仍然通过五次测定来决定，那末对 $x_1=f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)f_5(x_5)$ 来说，只要测定 $4\times4+1=17$ 次就够了，比625次测定减少了608次，这是很大的节约。对 n 个变数来说，写成一般形式是 $(5-1)(n-1)+1$ 次测定，其中的一次对 n 个变数来说是通用的。因次分析和 π 定理就有可能改变变数间的关系，大大减少试验次数。

其次，将 n 个有因次变数 $x_1、x_2\cdots\cdots x_n$ 转换为 i 个无因次数群 $\pi_1\ \pi_2\cdots\cdots\pi_i$ 的又一个好处是用无因次数表达的方程或曲线与所用单位无关，不论是采用英制或公制，可以直接利用这些方程和图表，而不需要换算。

当然在计算无因次数时所用单位必须一致。在计算 Re 数时，如果粘度采用 $Kg\,m^{-1}S^{-1}$，那末速度必须以 mS^{-1} 表示，管径以 m 表示，密度以 $Kg\,m^{-3}$ 表示。在一致的条件下，采用其他单位也可以，譬如计算 Re 数，如果粘度采用 CGS 制中的泊，即 $cm^{-1}gs^{-1}$，那末速度管径和密度也必须采用 CGS 制。通常以无因次数表达的方程比以有因次数构成的方程要简单清楚得多。

§7-4 不可压缩、重、惰、粘性液体的无因次方程

本节中研究不可压缩的重、惰、粘性液体的运动的无因次方程作为π定理的应用的一个例子。为了简化起见，我们仅限于研究稳定态过程，这样我们又回到了第三章中所讨论过的一些问题。

液体的运动受特征长度L_c的影响，譬如在管流中受管道直径的影响，在圆球绕流中受圆球直径的影响。此外还受流程中的另一个因次L_1、L_2、L_3……L_n的影响。譬如在管流中还受管道长度和管壁粗糙度的影响。按照前述，将所有具有长度性质的变数与特征长度相除，可以得到n个无因次分数，如$\frac{L_1}{L_c}$、$\frac{L_2}{L_c}$、$\frac{L_3}{L_c}$……$\frac{L_n}{L_c}$.

除了长度比值$\frac{L_1}{L_c}$、$\frac{L_2}{L_c}$……以外，液体运动方程中还包括下列一些有因次的变数：压差Δp，密度ρ、速度v，特征长度L_c，粘度μ和重力加速度g。

我们已经知道，含有上述有因次变数并构成完全组合的无因次数群有三个，即Re、Fr和Eu。这三个无因次数的特点是其中任何一个都不能用另二个来表示，因为μ仅仅在Re中出现，g仅仅在Fr中出现，而Δp只在Eu中出现。

于是，按照π定理，任何一个受Δp、v、ρ、L_c、μ和g影响的过程可以以下式表示：

$$F'\left(Re, Fr, Eu, \frac{L_1}{L_c}, \frac{L_2}{L_c} \cdots\cdots \frac{L_n}{L_c}\right)=0.$$

将上述函数分解为两个函数，于是

$$F(Re, Fr, Eu)=\phi\left(\frac{L_1}{L_c}, \frac{L_2}{L_c}, \cdots\cdots \frac{L_n}{L_c}\right).$$

式中的函数ϕ仅与流程的几何形状有关，或者说仅仅和液体在其中运动的设备有关，所以称为形状因素，在表(7-1)的第三行中简写为C。

在一定条件下可以略去变数中的一个到数个，这就减少了方程中的变数数目，但互相独立的确定幂次的方程的数目则不变，于是无因次数群的数目就减少了。当某一个变数只出现在一个无因次数群中时，问题变得特别简单，当略去该变数时包含该变数的无因次数就可以略去。

（a）如果略去粘度 μ，由于 μ 只出现在 Re 中，Re 可以略去，于是流体运动的数学表示式为

$$F(Fr, Eu) = \phi\left(\frac{L_1}{L_c}, \frac{L_2}{L_c} \cdots\cdots\right).$$

伯努利方程适用于无粘性流体，可以写成如下形式：

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + g\rho z = p_0 + g\rho z_0.$$

这里 z_0 和 p_0 相应为在 $v=0$ 处的参考高度和参考压力（即大气压力），$\Delta p = p - p_0$，以及 $H = z - z_0$。我们可得

$$\Delta p + \frac{\rho}{2} v^2 + g\rho H = 0$$

各项除以 ρv^2（$v \neq 0$），v 是指高度为 H 处的流体速度，得到

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} + \frac{1}{2} + \frac{gH}{v^2} = 0 \quad 或 \quad Eu + \frac{1}{Fr} = -\frac{1}{2}$$

上式表明，在略去粘度 μ 以后，流体运动方程可以以 Eu 和 Fr 的函数表示。

（b）如果略去重力加速度，于是有下列形式：

$$F(R_e, Eu) = \phi\left(\frac{L_1}{L_c}、\frac{L_2}{L_c} \cdots\cdots\right).$$

由式（3-117）知，流体在光滑管道中流的压力降为

$$Eu = 2f(Re)\frac{L}{D}.$$

以上两式是一致的。

（c）在 Re 和 Fr 中都包含有液体密度 ρ，但是即使在液体密度不重要的问题里，亦不能略去这两个重要的无因次数。在所有那

些液体密度不起很大作用的流体运动过程中，起作用的动力是F_g、F_μ 和 F_p。于是所有这些过程可以用这三个力的比值来表示，即$\frac{F_p}{F_g}=[Eu、Fr]$，$\frac{F_g}{F_\mu}=[\frac{Re}{Fr}]$或$\frac{F_p}{F_\mu}=[Eu\cdot Re]$，这里采用方括号是指两个无因次数的乘积是一个整体。所以$\phi([Eu\cdot Fr])$和$\phi(Eu, Fr)$是有差别的，特别是在ϕ带有幂次时。

在蠕流中，由于流速很低，质量力可以略去不计，于是可以用含有两个无因次数的方程来描述。

$$F([EuFr][Re/Fr])=\phi(\frac{L_1}{L_c}、\frac{L_2}{L_c}\cdots\cdots),$$

$$F([EuFr][ReEu])=\phi(\frac{L_1}{L_c}\frac{L_2}{L_c}\cdots\cdots),$$

$$F([Re/Fr][ReEu])=\phi(\frac{L_1}{L_c}\cdot\frac{L_2}{L_c}\cdots\cdots)。$$

上式可以用来描述冰川的活动。

从这里开始，成对地略去两个力，每略去两个力，变数的数目n降低为4，基本因次为3，于是只有一个无因次数出现。每次略去两个力，可以有六种可能性。

(d) 略去F_g 和F_μ。液体在水平上运动，于是重力可以略去。另一方面，流体的速度很高，随速度的二次方而增加的质量力增加得很快，远远高于随速度的一次方而变化的粘性力，于是粘性力可以略去，得到

$$Eu=\phi(\frac{L_1}{L_c},\frac{L_2}{L_c}\cdots\cdots)。$$

上式虽然是在Re数很高时的极限情形，此时阻力系数与Re数无关，到达一个定值，Eu数则仅仅和边界的几何形状有关。

(e) 在重力场不起作用的蠕流中，F_g 和F_p 可以略去，这可以用一个无因次数$\frac{F_p}{F_\mu}=[ReEu]$来表示，即

$$[ReEu]=\phi(\frac{L_1}{L_c}\frac{L_2}{L_c}\cdots\cdots)。$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com