内部发行

数学系讲义

（平面解析几何部分）

乙

北京电视大学

1960年9月

緒 論

我们現在要講的課程内容是所謂高等数学，它与初等数学即常量的数学是不同的，初等数学时期人們对于周围世界的认識还是不夠深刻，还不善于从現实世界的变化和发展中去考察事物，因此当时人们主要地只研究固定的量与固定的图形及它们之間的最簡单最基本的关係。

十七世紀以来，社会生产力大大發展，要求人们研究运动各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关係，（例如物体在液体中运动的規律、船只的穩定性，天体运行規律，拋射体的軌道等），而这些又要求运用全新的数学工具，数学对象的这种根本扩展，就飛跃到了变量的数学时期——高等数学。

这是了重大的轉折，恩格思說"……因此运动和辯証法便进入了数学"、世界本来是在永恒的变化中的，我们只有从运动，变化中才能对它获得更深刻的了解，和掌握它的規律。从而进一步认識客观世界。

从上述中我们看到高等数学的形成是由于生产实践的需要，而正是生产力飛跃發展的时代也就是数学兴旺及革命性的时代。因此在今天我国社会主义革命进入偉大的技术革命及技术革新的时代，必然会而且已经总結出和創造出具有中国特点的共产主义的新的数学面貌。这也就要求我们积极地投入这一偉大的群众运动，而且有目的地去总結劳动人民的丰富智慧和新的数学思想創立更新的为社会主义服务的理論。从而更好地指导社会主义建設，在这方面，1958年以来各高等学校及科研机关在大搞科研群众运动中間已取得很大成績，例如对长江三峡问題，水霸问題、落虎问题、产品檢查产品质量控制等问题的解决过程都碰到新的前所未有的数学问題，因此学习高等数学的方法必須是理論联系实际的，目前来說特别是社会主义生产实际，这是必須坚持的方向。

最后必须徹底破除"高等数学深玄莫测、难学"等迷信。这是资产階級的学术思想强加于我们头上的，我们知道数学作为科学是劳动人民創造的，是在生产实践斗争中总结出来的智慧结晶，是有规律的，只要高举毛澤東思想紅旗，理論联系实际地，在战略上藐視战術上重視它就一定能在較短的时间内多快好省地掌握它。

目 录

第一章 若干预备知识

§1、数学归纳法

在我们生产实践和日常生活中常常用归纳的方法来判断某些事情，就是要把特殊的经验。个别情形的结论推断出一般的结论。这种归纳要成功就必须抓着事物的本质，把经验经过提炼才能推广。

数学归纳法是从数量侧面来进行归纳的一种方法，要把个别的数量结论推广到一般的情形，例如：

(1)
$$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$$

$$1+q+q^2=\frac{1-q^2}{1-q}$$

$$1+q+q^2+q^3=\frac{1-q^4}{1-q}$$

(2) $100\times1-1>0$，$100\times2-2^2>0$，$100\times3-3<0$

是个别结论，而

(1) $1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $q\neq1$，$n=1,2,3,\cdots$

(2) $100\times n-n>0$ $n=1,2,3,\cdots$

是一般结论，个别到一般需要那些条件呢？

这结论是否能成立呢？(1)我们早在中学就知道是成立的。至于(2)，对 $n=1,2,3,\cdots\cdots,99$，都成立，但对 $n=100$ 就不成立了。

(2)为什么不成立呢？$n=1$ 对了，不知 $n=2$ 是否对；$n=2$ 对了，不知 $n=3$ 是否对，总之，一个对了不能判断下一个是否对。

至于(1)分析一下它的过程：

$n=1$ $$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$$

$n=2 \quad 1+q+q^2=\frac{1-q^2}{1-q}+q^2=\frac{1-q^2+q^2(1-q)}{1-q}=\frac{1-q^3}{1-q}.$

$n=3 \quad 1+q+q^2+q^3=\frac{1-q^3}{1-q^3}+q^3\ \frac{1-q^4}{1-q}\cdots$

- - - - - - - - - - - -

$n=K+1 \quad 1+q+q^2+\cdots+q^K+q^{K+1}=\frac{1-q^{K+1}}{1-q}+q^{K+1}=\frac{1-q^{K+2}}{1-q},$

还可算下去，可以看出规律：n每增加1总是多加一项，通分一下就够了，规律是（能推广的原因）：前面一项对了就能保証后面一项对。这个规律就保証推广的可能性，当然不限于这个具体的例子，由此我们得到数学归纳法原理：

要証明一个結論象上面例子一样，对一切自然数成立，只要下面两点满足：

(I) 結論对 $n=1$ 成立.

(II) 如果結論对 $n=K$ 成立，能推出 $n=K+1$ 也成立.

回过来考虑(1)，现在用数学归纳法来証明它，作为例1.

(I) $n=1$. 即：$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$ 显然成立。

(II) 設 $n=K$ 已成立，即：

$$1+q+q^2+\cdots+q^K=\frac{1-q^{K+1}}{1-q}$$

証明它对 $n=K+1$ 也成立，这不难。

$$1+q+q^2+\cdots+q^K+q^{K+1}=\frac{1-q^{K+1}}{1-q}+q^{K+1}=\frac{1-q^{K+1}+q^{K+1}(1-q)}{1-q}$$
$$=\frac{1-q^{(K+1)+1}}{1-q}.$$

因此(1)对任何自然数都成立。

〔例2〕：設 $x_1=\sqrt{2}$、$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，…

証明：(i) $x_n<x_{n+1}$ $\quad n=1,2,\cdots$

(ii) $x_n<2$ $\quad n=1,2,\cdots$

(i)(ii)均用数学归纳法来証明：

(I) $n=1$ 不等式变成

自然成立。 $\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(II) 設 $n=K$ 不等式成立，即：

$$x_K<x_{K+1}$$

两边加2，开方，不等式保持（因 $x_K>0$），即：

$$\sqrt{2+x_K}<\sqrt{2+x_{K+1}}$$

即：

$$x_{K+1}<x_{(K+1)+1}$$

(ii) $n=1$，不等式变成：$\sqrt{2}<2$

当然成立．

設 $n=K$ 不等式成立，即：

$$x_K<2$$

两边加2．开方，得：

$$\sqrt{2+x_K}=x_{K+1}<\sqrt{2+2}=2$$

即不等式 对 $n=K+1$ 也成立。

§2．绝对值

实际生活中常发生这样的事情，不需要我们去考虑一量是正还是負，而只需知道它的大小，如允許誤差等于10厘米，意思是可以多10厘米或少10厘米（−10），又如計算距离时一般总是正的，因此在用坐标計算距离时往往要用到絶对值．

丢開一数的正負号，所得的正数就称为该数的絶对值，数 a 的絶对值記作 $|a|$

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当 } a\geq 0\\ -a & \text{当 } a<0\end{cases}$$

20

例如：$|-5|=5$，$|5|=5$，$|-10|=10$，等．而$|0|=0$．

絶对值在估計一些量的大小时常常用到，因此把它的一些性质、陈述如來：

(i) $|a|\geq 0$．

(ii) $|a|\geq a$，$|a|\geq -a$，或統一写成 $|a|\geq \pm a$

(iii) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，

(iv) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$　　$(b\neq 0)$

(v) 若 $|x|<r$，則 $-r<x<r$．反之，若 $-r<x<r$，則 $|x|<r$．

証明：若 $|x|<r$，則：由于 $|x|\geq x$，$|x|\geq -x$ 推知：

$$x<r \text{ 和 } -x<r，\text{即 } x>-r．$$

合起来就是：

$$-r<x<r．$$

反之，若 $-r<x<r$，則：由 $-r<x$ 推知 $-x<r$．

即：$x<r$ 又 $-x<r$．因之：

$$|x|<r．$$

又証：处理絶对值的时候，往往分情形，去掉 $|\ |$ 号，来討論。

若 $|x|<r$ 分两种情形．

(1) 若 $x\geq 0$，則 $|x|=x<r$．

(2) 若 $x<0$，則 $|x|=-x<r$，即 $x>-r$

合起来就得到：

$$-r<x<r．$$

反之，若 $-r<x<r$，則用上証明 $|x|<r$

［附註］ 1° 由 $|x|<r$ 推得 $-r<x<r$ 称 $|x|<r$ 是 $-r<x<r$ 成立的充分条件而 $-r<x<r$ 是 $|x|<r$ 成立的必要条件。一般説来由事A能推出事B，就称A为B成立的充分条件，

B为A成立的必要条件。

2° 根据(V)得出一个較重要的性质：

若 $|x-a|<y$ 则：$a-y<x<a+y$，反过来也对。

实际上；由(V)若 $|x-a|<y$ 则

$$-y<x-a<y.$$

三边加 a，得

$$a-y<x<a+y.$$

反之，若 $a-y<x<a+y$ 三边减 a，得：

$$-y<x-a<y$$

由(V)得：

$$|x-a|<y$$

(vi) $|a+b|\leq|a|+|b|$

証：分两种情形，

(1) 若 $a+b\geq 0$，则：

$$|a+b|=a+b\leq|a|+|b|$$

(2) 若 $a+b<0$，则：

$$|a+b|=-a-b\leq|a|+|b|.$$

总之，任何情形都有：

$$|a+b|\leq|a|+|b|.$$

(vii) $|a-b|\geq|a|-|b|$.

証：由 $|a|=|a-b+b|\leq|a-b|+|b|$

推得。

§3. 二阶行列式与二元一次联立方程组

1. 引言：

二元、三元，……多元一次联立方程，在解决实际问题时有很多应用，如：計算复杂回路的电流强度，原子核計算问题

近似計算一些复杂的方程时（如微分方程，积分方程）往往都引起上述方程，在解决它们时常涉到：解是否存在？如果存在有几个？如何求？目前所讲的是未知数较少的情形。

2．二階行列式的引出：

解綫性方程组（即一次联立方程式）

$$(I)\qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \text{ - - - - } (1) \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \text{ - - - - } (2) \end{cases}$$

时，我们常用消去法进行：$(1)\times a_{22}+(2)\times(-a_{12})$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

从而解出 x（只要 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$）

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同样 $(1)\times(-a_{21})+(2)\times(a_{11})$ 得

$$y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

首先从解看出它只与(I)的系数有关与未知数无关（无論它写成 y,z；z,w；u,v；…… 都一样）把方程(I)的系数写出来就足够知道方程的解的情况了，系数是

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{matrix}$$

从解 x，y 的分子分母看出：它们都是这些系数经有规则的运算得来的，例如分母正好是表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{pmatrix}$$

中两对角线项相乘的差，顺号的是＋，逆号的是－。x，y 的

分子分别是表

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

里的项经过用上相同的规则运算所得到的数。从此看出記住一个表和一个规则比記 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，$b_1b_{22}-a_{12}b_2$，$a_{11}b_2-b_{21}b_1$ 好得多。

我们称表为矩阵，而表内的各数经过上面规定的运算得到的数就称为表的（矩阵的）行列式，記作：（如第一个）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

其中横排称行，竖排称列，又因它是二行二列，故称为二阶行列式，它的值就是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$-$ $\qquad$ $+$

例1：$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-14=-9$，$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14-5=9$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5-14=-9$。

$$\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 14\cdot 5-7\cdot 10=0$$

利用行列式就可把（1）的解写成：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

20 x的分子是把常数项换入分母行列式中x的系数而得。

y的分子是把常数项换入分母行列式中y的系数而得。

例2、解方程

$$\begin{cases} 5x-8y=-41 \\ 6x+7y=67 \end{cases}$$

按上面公式得到

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-41 & -8\\ 67 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -8\\ 6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-41\cdot 7+8\cdot 67}{5\cdot 7+8\cdot 6}=\frac{536-287}{35+48}=\frac{249}{83}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & -41\\ 6 & 67\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -8\\ 6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{67\cdot 5+41\cdot 6}{35+48}=\frac{335+246}{83}=\frac{581}{83}=7$$

对解二元的一次方程组我们已找到了一个简单有用的工具——行列式，我们目光不能停留在这一点，我们要找三元，四元更多元线性方程组的解，这些情形的解法更为重要。但对二元情形的研究，可以提供我们研究其他情形的线索，为此讨论一下二阶行列式的性质和应用。

8 性质

(i) 行列互换行列式不变，即

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}$$

証明：直接計算即可知。这表明行与列的情形是相同的。以下的性质对行的情形也成立。

(ii) 列与列互换行列式变号，即

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & a\\ b & c\end{vmatrix}$$

証明：計算一下就成。

(iii) 列的公因子可以提出行列式号外，如

$$\begin{vmatrix}ka & b\\ kc & d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

証明：直接計算。

(iv) 加法性质，$\begin{vmatrix}a+a' & b\\ c+c' & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a' & b\\ c' & d\end{vmatrix}$

証明：直接計算就成

左边：$(a+a')d-(c+c')b=(ab-bc)+(a'd-bc')$

(v) 把一列加另一列的K倍行列式不变

$$\begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb & b \\ kd & d \end{vmatrix} \quad (由(vi))$$

这些性质对行列式的计算有很大方便，如：

$$\begin{vmatrix} 751 & 750 \\ 856 & 855 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 751+(-1)750 & 750 \\ 856+(-1)855 & 855 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 750 \\ 1 & 855 \end{vmatrix} = 105$$

(vi) 行列式为零的充分必要条件是列与列成比例．（行与行成比例）

証明：（必要性）設行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

即，$ad=bc$，因此 $a:b=c:d$．

反之（充分性）若 $a:b=c:d$ 即 $ad=bc$ 則

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc=0$$

特别如两行（列）相同則行列式为零．

4．对二元线性方程組的研究：

甲．若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 則 (3) 是方程 (1) 唯一的解．

直接代入方程驗証就成．例如代入 (1) 得

$$a_{11}x+a_{12}y = \frac{a_{11}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{11}a_{22}-b_2a_{11}a_{12}+b_2a_{11}a_{12}-b_1a_{12}a_{21}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} =$$

$$=b_1$$

由于本节初的計算，方程不可能再有其他解了．

特别 $b_1=b_2=0$ 則方程僅有零解．

乙．若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ 有两种可能：

(i) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ （或 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ ）不为0则方程(1)无解。

(ii) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=0$ 则方程(1) 有无穷多解。

證明：若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$，假設 a_{21} a_{22} 不全为0（如全为0；则容易看出結論是正确的）则 $a_{11}=Ka_{21}$，$a_{12}=Ka_{22}$

(i) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1\neq 0$，则 $b_1\neq Kb_2$ 否则 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=0$ 矛盾。

下面用反証法来証明我们的結論：若方程(1)有解 x_0 y_0 则有矛盾，因为只要(2)式乘(−K)加到(1)式上去就得 $b_1-Kb_2=0$ 这与 $b_1\neq Kb_2$ 矛盾。

若 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 証明类似。

(ii) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=0$，则 $a_{11}:a_{21}=a_{12}:a_{22}=b_1:b_2$，(1)(2)是一样的，仅差一常数倍，这时(1)有无穷多解。

例3．解：

$$\begin{cases} 2x+y=3 \quad ------(1) \\ 4x+2y=K \quad ------(2) \end{cases}$$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & K \end{vmatrix}=2K-12=(K-6)$

(2)′ 的左边是(1)′右边的两倍，若(2)′之右边不是(1)′的两倍就矛盾，否则(1)′(2)′实际上就是一个。

所以当 $K\neq 6$ 时就没有解。

当K＝6时，方程实际上只有一个。

任给$x=K$解出$y=3-2K$ 因此解是

$$\begin{cases} x=K \\ y=3-2K \end{cases}\text{（K任意）}$$

丙，若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0.\ b_1=b_2=0$，作为乙(ii)的推论，则方程(1)有非零解。

若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0\ \ b_1=b_2=0$，则(1)只有零解：因要(1)有非0解，必须

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}=0$$

因此得到常数项为0的方程

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=0 \\ a_{22}x+a_{22}y=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0.$

利用上述结果，我们可以研究下列方程组

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{22}z=0 \end{cases}$$

其中x, y, z是未知数，且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$，

把$a_{13}z$，$a_{23}z$搬到方程之右边，用上述方法解出x, y即得

20

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}z \qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}z,$$

为方便起见令 $\dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}=K$ 则得解

$$x=K\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\quad y=K\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix},\quad z=K\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$（K可取任意值）

例4. 解方程

$$\begin{cases} 5x-3y+41z=0 \\ 6x+7y-67z=0 \end{cases}$$

按照上面解法把z项搬到右边解得：

$$x=3z,\quad y=7z$$

因此解是（命 $z=K$ 后）

$$x=3K,\quad y=7K,\quad z=K$$（K任意）

方程(Ⅲ)中x，y，z地位平等，若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$ 而 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\neq 0$ 则可把x项移到右边解之。

例5 解：

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$，而 $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1$ 把x搬到右边

得：
$$\begin{cases} -y+z=-x \\ -2y+z=-2x \end{cases}$$

解之得：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix}}{1}=x \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -x \\ -2 & -2x \end{vmatrix}}{1}=0.$$

解是
$$\begin{cases} x=K \\ y=K \\ z=0 \end{cases}$$（K任意）

§4. 三阶行列式与三元一次联立方程组

甲、概念，解方程式

$$(\text{I})\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{12}z=b_1 \cdots\cdots (1)\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \cdots\cdots (2)\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \cdots\cdots (3)\end{cases}$$

时，我们也用消去法，把$(1)\times A$，$(2)\times B$，$(3)\times C$ 加起来得

$$(a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C)x+$$
$$(a_{12}A+a_{22}B+a_{32}C)y+$$
$$(a_{13}A+a_{23}B+a_{33}C)z=b_1A+b_2B+b_3C.$$

如果能找出A, B, C，使y, z前的系数为0，那末只要$a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C\neq 0$就有

$$x=\frac{b_1A+b_2B+b_3C}{a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C}$$

由§2从方程$a_{12}A+a_{22}B+a_{32}C=0$，$a_{13}A+a_{23}B+a_{33}C=0$解得

$$A=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\quad C=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

因此x的分子分母出现这型数

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

在解y, z时也出现类似形式的数，我们把(I)系数排成表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$