高等数学（B）

（下册）

复旦大学数学系

二OOO年十一月

高等数学（B）

（下册）

复 旦 大 学 数 学 系

二〇〇〇年十一月

目录

目录

第五章　空间解析几何

同平面解析几何一样，空间解析几何也是用代数的方法来研究空间几何问题. 这是一种十分简洁有效的方法. 这一章将要研究空间直角坐标系和向量代数，平面与直线、二次曲面的方程及图形。

§5.1　空间直角坐标系和向量代数

一　空间直角坐标系

类似平面直角坐标系，可以建立空间直角坐标系. 设 O 为空间一点、以 OX,OY,OZ 分别表示从 O 出发的三条有向直线，它们彼此垂直，且排列位置符合右手法则（图 5.1). 再选取一个单位长度作基准，在 OX,OY,OZ 上分别标上刻度，这三条有向直线成为三个坐标轴，这就构成了一个直角坐标系. 三个坐标轴分别称为 x 轴，y 轴，z 轴.

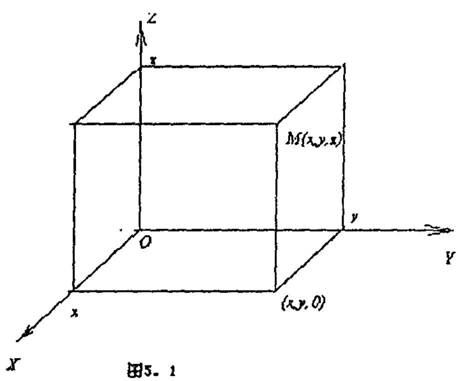

图5.1

对空间一点 M，向各坐标轴投影，得到点 M 在这三个坐标轴上的投影点的坐标值 x,y,z，称有序数组 (x,y,z) 为点 M 的坐标.

三个坐标平面 OXY,OXZ,OYZ 将空间分成八个部分，称为卦限，分别称为第一，第二，…，第八卦限. 具体位置是满足 $x>0,y>0,z>0$ 的点的全体为第一卦限；满足 $x<0,y>0,z>0$ 的点的全体为第二卦限；满足 $x<0,y<0,z>0$ 的点的全体为第三卦限；满足 $x>0,y<0,z>0$ 的点的全体为第四卦限，第五到第八卦限的位置分别在第一到第四卦限的下方.

二 向量

有些物理量不仅有大小而且有方向，例如位移，速度，力等，几何向量就是用来抽象表示这些物理量的. 有向线段就叫做几何向量. 向量常用一个箭头来表示. 如一段以 O 为起点，A 为终点的直线段是一个向量，记为 $\overrightarrow{OA}$，也常用粗体的小写字母来表示，比如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 等. 如果两个向量的大小(有向线段的长度)相等方向一样，则称这两个向量相等，例如图 5.2 中 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 如果两个向量的大小相等方向相反，则称一个向量是另一个向量的负向量，例如 $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$，$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}$. 由向量的定义知，两个向量相等并不要求它们的起点相同.

有向线段的长度表示向量的大小，叫做向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 显然两个相等的向量，它们的模也相等，但反之却不一定.

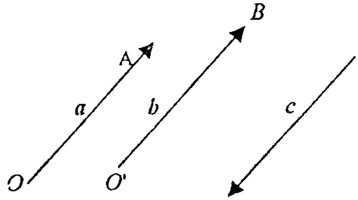

图 5.2

若一个向量的模为零：$|\boldsymbol{a}| = 0$，则称此向量为零向量，通常用 $\boldsymbol{0}$ 表示. 零向量是一个点，规定零向量的方向可以是任意的..

向量的加法 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也是一个向量，若记 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{Ob}$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 就是以 OA 和 OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$. 即 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在同一条直线上时，规定若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的大小为这两个向量的模的和，方向与原来向量的方向相同；若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的大小为这两个向量的模的差的绝对值，方向为模较大的向量的方向.向量的这种加法法则称为平行四边形法则.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 几何上有 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. 这表明有同一个起点的两个向量的差，是从减向量的终点出发到被减向量的终点的向量.

向量的加法满足结合律和交换律(图 5.3)，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

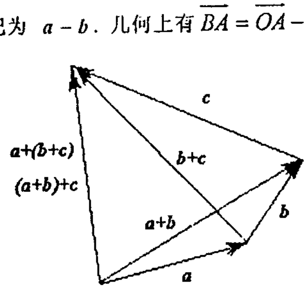

图5.3

向量的数乘 设 λ 是一个实数，$\boldsymbol{a}$ 是一个向量，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 也是一个向

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$　　$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

量，它的大小是$|\lambda||a|$，方向当$\lambda > 0$时，与a同向；当$\lambda < 0$时与a反向；当$\lambda = 0$时，为零向量. 由向量数乘的定义，知向量的数乘满足分配律和结合律：

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b;$$

$a_1 + \cancel{a_2} =$　$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

$\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

模为 1 的向量称为单位向量. 对于任意一个向量a，$a_0 = \dfrac{a}{|a|}$是与a同方向的单位向量，因此也有$a = |a|a_0$

利用上述结果可以证明许多几何定理.

例 1. 图 5.4 中，平行四边形$ABCD$的对角线交于E，证明点E平分对角线AC, BD. 事实上设$\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AE} = b\overrightarrow{AC}$，令$v = \overrightarrow{AB}, w = \overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{BD} = a(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}) = a(-v+w)$，而$\overrightarrow{AE} = b\overrightarrow{AC} = b(v+w)$，现在$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}$，所以$v = b(v+w) - a(-v+w)$，利用向量性质有

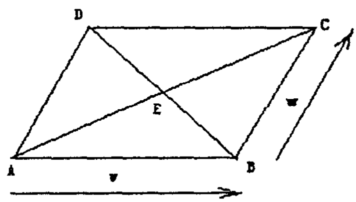

图 5.4

$$v = bv + bw + av - aw = (a+b)v + (-a+b)w.$$

故$(a+b-1)v = (a-b)w$，由于v, w的方向不平行，要使$(a+b-1)v = (a-b)w$成立，只有一种可能，即$(a+b-1)v$和$(a-b)w$都是零向量，由此.

$$\begin{cases} a+b-1=0 \\ a-b=0 \end{cases}.$$

解之得$a = b = \dfrac{1}{2}$. 即$\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 因此行四边形$ABCD$的对角线交点$E$平分对角线$AC, BD$.

这个例子的结论我们早以知道，但此例运用了一个重要的性质：若 v 和 w 不平行，且 $av+bw=cv+dw$，则 $a=c,b=d$.

向量在轴上的投影. 已知向量 $a=\overrightarrow{AB}$，单位向量 l_0，l 是过点 A 平行于 l_0 的数轴，方向和 l_0 相同. 由 B 向 l 作垂线，其垂足记为 B'，AB' 在数轴上的值称为向量 $a=\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，记为 $\mathrm{Pr}_l\, a$. 由定义知，若向量 a 和 l_0 的夹角为 φ，则

$$\mathrm{Pr}_l\, a = |a|\cos\varphi .$$

同样，可以定义向量在另一个向量上的投影. 设两个非零向量 a,b，若向量 a 和向量 b 的夹角是 φ，则向量 a 在向量 b 上的投影为

$$\mathrm{Pr}_b\, a = |a|\cos\varphi .$$

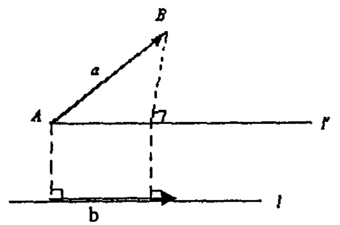

图5.5

三　向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，三个坐标轴上的三个单位向量 i,j,k，称为基向量. 已知一个向量 $\overrightarrow{OA}$，点 A 的坐标为 (a_1,a_2,a_3)，则 $\overrightarrow{OA}$ 在各坐标轴上的投影分别为 a_1,a_2,a_3，于是

$$\overrightarrow{OA}=a_1 i+a_2 j+a_3 k 。$$

即向量 $\overrightarrow{OA}$ 可以表示为三个坐标轴的基向量的线性组合. 由此也可以认为向量 $\overrightarrow{OA}$ 与有序数组 (a_1,a_2,a_3) 有一一对应关系，由此空间任意一个向量 a 都可以用一个三维数组 (a_1,a_2,a_3) 表示. 这是代数向量的一种特殊形式. 在直角坐标系下，三个个单位向量 i,j,k 可以分别表示为

$$i=(1,0,0),\qquad j=(0,1,0),\qquad k=(0,0,1).$$

易见，它们是三个线性无关的. 由此，三维空间的向量$\boldsymbol{a}$一定可以表示为它们的线性组合，且这种表示方式是唯一的:

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

通常把a_1,a_2,a_3称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标，为了区别于几何点的坐标表示，我们用$\{a_1,a_2,a_3\}$表示向量:

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

由于空间向量是代数向量的一种特殊形式，因此代数向量的许多性质可以移植到空间向量中来. 向量$\overrightarrow{MN}$的起点坐标为$M(x_1,y_1,z_1)$，终点坐标是$N(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

向量$\boldsymbol{a}$的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

于是$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，这和两点的距离公式一致.

若向量$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，$\lambda$为实数，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}.$$

例 1. 已知点p_1,p_2,p_3的坐标分别为(a_i,b_i,c_i)，$i=1,2,3$，求 (1) 向量$\overrightarrow{p_1p_2}$的坐标; (2) p_1,p_2间的距离; (3) 三角形$p_1p_2p_3$的重心G的坐标.

解 (1) $\overrightarrow{p_1p_2}=\overrightarrow{Op_2}-\overrightarrow{Op_1}=(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})-(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})$

$$=(a_2-a_1)\boldsymbol{i}+(b_2-b_1)\boldsymbol{j}+(c_2-c_1)\boldsymbol{k}$$

$$=\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}.$$

(2) $\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$.

(3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{Op_1}+\overrightarrow{Op_2}+\overrightarrow{Op_3})$

向量与力的正向夹角为φ

$$= \frac{1}{3}((a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{i}+(b_1+b_2+b_3)\boldsymbol{j}+(c_1+c_2+c_3)\boldsymbol{k})$$

四 向量的数量积(内积)　$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}$　$\cos\beta = \frac{a_2}{|a|}$　$\cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}$

设某物体在一个力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿着与 $\boldsymbol{F}$ 正向成角 φ 的方向 $\boldsymbol{s}$ 有位移 $\boldsymbol{s}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为　a的模长 $a_1^2+a_2^2+a_3^2$

$$W = |\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\varphi. \tag{5.2}$$

数量 W 是两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 作用的结果，因此我们定义向量的数量积与之对应.

定义　两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数量，其值为

① 当内积=0时，两向量垂直(|a|, |b|≠0)，代数中正交

②

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi,$$

如果|a|=1，则a·b是b在单位向量上的投影

其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\le\varphi\le\pi$，φ 也记为 $(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，零向量与任一向量的内积为零. 记号中的点“ . ”不能省略，不要写成 $\boldsymbol{ab}$. 数量积也称为内积. 根据向量内积的定义，功的表达式可以写为

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由定义也有性质:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2.$$

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$. 事实上，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = 0$，及 $|\boldsymbol{a}|\ne 0$，$|\boldsymbol{b}|\ne 0$，得 $\cos\varphi = 0$，因此 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，反之也成立.

向量的投影与内积有一定的关系.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a},$$

这就是说，两个向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在这个向量上的投影的乘积.

由上式得到向量投影的计算公式

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

向量的数量积满足下述分配律和结合律:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

下面讨论向量的数量积的坐标表示.

设i,j,k是坐标系的三个基向量，$a=a_1i+a_2j+a_3k$，$b=b_1i+b_2j+b_3k$ 则

$$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1,\qquad i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0.$$

于是

$$\begin{aligned}a\cdot b&=(a_1i+a_2j+a_3k)\cdot(b_1i+b_2j+b_3k)\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}\tag{5.3}$$

可见，在直角坐标系下，几何向量的数量积和实代数向量的内积是一致的. 因此向量的数量积特称为向量的内积，或称为向量的点积.

例 2 已知$a=4i-3j+2k$，$b=5i-4k$，求 $a\cdot b$；$\cos(\hat{a,b})$；$\mathrm{Pr}_a\, b$.

解 $a\cdot b=4\times5+(-3)\times0+2\times(-4)=12$；

$$\cos(\hat{a,b})=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{12}{\sqrt{29}\sqrt{41}};$$

$$\mathrm{Pr}_a\, b=\frac{a\cdot b}{|a|}=\frac{12}{\sqrt{29}}.$$

设非零向量$a=\{a_1,a_2,a_3\}$，它与基向量i,j,k的夹角分别为α,β,γ，于是

$$a_1=a\cdot i=|a|\cos\alpha,\qquad \cos\alpha=\frac{a_1}{|a|},$$

$$a_2=a\cdot j=|a|\cos\beta,\qquad \cos\beta=\frac{a_2}{|a|},$$

$$a_3=a\cdot k=|a|\cos\gamma,\qquad \cos\gamma=\frac{a_3}{|a|}.$$

称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量a的方向余弦. 显然成立

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 3 求向量$a=3i+4j-k,b=-2i+8j-3k$之间的夹角.φ

解 $$\varphi=\arccos\frac{a\cdot b}{|a||b|}$$

$$= \arccos \frac{3\times(-2)+4\times 8+(-1)\times(-3)}{\sqrt{[3^2+4^2+(-1)^2][(-2)^2+8^2+(-3)^2]}}$$

$$= \arccos \frac{29}{\sqrt{26\times 77}} \approx \arccos(0.6481357) \approx 49^{\circ}35'56''.$$

① $a\times b = -b\times a$

五. 向量积

两个特性 ② $c\perp a,\ c\perp b$

在磁场内，运动电荷受到磁场力的作用. 设某时刻，单位电荷 A 的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，磁场的磁感强度为 $\boldsymbol{B}$，则电荷所受到磁场力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

③ $a\times a = 0$

$$\vec{F} = \vec{v}\times\vec{B} \qquad |\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\varphi,$$

其中 φ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角. $\boldsymbol{F}$ 的方向由 $\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{B}, \boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{v}$，且 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{F}$ 的顺序按右手法则来确定.

定义 给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它的模为

模的几何意义平行四边形面积.

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi, \tag{5.4}$$

其中 φ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\le\varphi\le\pi$，它的方向由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的顺序符合右手法则，见图 5.6.

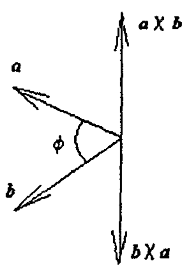

图 5.6

向量的向量积也称为向量的矢积

由定义知，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0.$$

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = 0$，于是

当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，有 $\sin\varphi = 0$，因此 $\varphi = 0$ 或 $\varphi = \pi$，即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行；

当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有零向量时，由零向量的定义，则也可以认为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行. 因此有

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模有一个几何解释. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$.

向量积成立下述运算规则:

(1) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(2) $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$;

(3) $(\lambda a)\times b = \lambda(a\times b) = a\times(\lambda b)$.

下面讨论向量积的坐标表示. 显然

$a\times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\times(b_1 i + b_2 j$

$i\times i = 0, j\times j = 0, k\times k = 0$,

$$i\times j = k, j\times k = i, k\times i = j.$$

于是,

$$a\times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\times(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k.$$

或写为行列式

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

$= \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k \right\}$

例 4. 已知三角形 ABC 的三个顶点为 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解　由 $\overrightarrow{AB} = \{3-1, 4-2, 5-3\} = \{2,2,2\}$,

$$\overrightarrow{AC} = \{2-1, 4-2, 7-3\} = \{1,2,4\}$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 6j + 2k,$$

于是

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

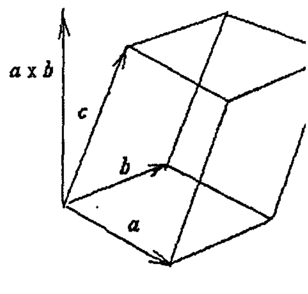

图5.7

六 向量的混合积

定义 称 $(a\times b)\cdot c$ 为三个向量 a, b, c 的混合积.

考察一个以向量 a, b, c 为边的平行六面体（见图 5.7），它的底边是以 a, b 为邻边的平行四边形. 六面体的底面积为 $|a\times b|$，六面体的高为向量 c 在 $a\times b$ 方向的投

$a\times(b\times c)=(a c)b-(a b)c$

影的绝对值: $|c||\cos\varphi|$, 这儿φ是$a\times b$和c的夹角. 因此 $|(a\times b)\cdot c|$ 恰为这个平行六面体的体积. 于是得到

向量a,b,c共面的充分必要条件是 $(a\times b)\cdot c=0$.

由混合积的定义可以得到下述性质:

$(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$;

$(a\times b)\cdot c=-(b\times a)\cdot c$;

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

例 5. 已知四个点P,A,B,C的坐标分别是$(-1,-2,1),(4,2,-1),(2,0,-1),(3,1,-2)$. 求四面体$PABC$的体积.

解 $\overrightarrow{PA}=5i+4j-2k$,

$\overrightarrow{PB}=3i+2j-2k$,

$\overrightarrow{PC}=4i+3j-3k$,

$$(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & -3\end{vmatrix}=2.$$

因此所求体积为

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}\right|=\frac{1}{3}.$$

习题 5.1

1. 求点 (a,b,c) 关于坐标原点, 坐标平面, 坐标轴的对称点的坐标.

2. 设A,B,C,D为空间四点, 且$\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=c$, $\overrightarrow{DA}=d$, 又点E,F分别是线段AC,BD的中点, 求向量$\overrightarrow{EF}$.

3. 设平面上的四边形的对角线互相平分, 证明它是个平行四边形.

4. 求下列向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 和单位向量 $\boldsymbol{a}_0$:

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$;

(4) $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

5. 已知$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$, 求:

(1) $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$; (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$; (4) $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}$;

(5) 向量$\boldsymbol{b}$的方向余弦。

6. 下列结论是否成立, 若成立, 证明之; 若不成立, 则举反例说明.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$, 且$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;

7. 证明向量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{c}$垂直.

8. 已知$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, 求

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$; (4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$;

(5) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

9. 证明 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$;

10. 已知三角形ABC的顶点的坐标分别是$A(1,-1,2),B(3,3,1),C(3,1,3)$, 求三角形$ABC$的面积.

§ 5.2 平面方程和直线方程

一. 空间平面方程

对于给定的一个平面π，若有一个非零向量$\boldsymbol{n}$垂直于该平面，这向量$\boldsymbol{n}$就称为这平面π的法向量. 易见，平面上的任意一个向量都于该平面的法向量垂直. 在直角坐标系中，如果已知平面π的法向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$和平面上的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，则此平面就完全确定了. 下面导出此平面的方程.

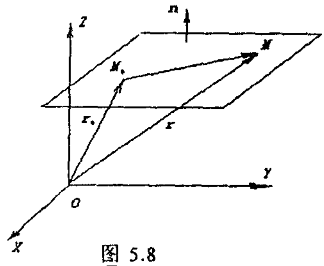

图 5.8
图5.7

设点$M(x,y,z)$在平面π上，于是向量$M_0M=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$与向量$\boldsymbol{n}$垂直，即

$$M_0M\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

写出其代数表达式为

$D=-(Ax_0$

点向式 $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,, \tag{5.7}$$

$Ax+By+Cz+D=0$

这就是过已知点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量为$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$的平面方程. 称它为平面的法式方程.

平面的方程也可以写成如下的向量形式，记$\boldsymbol{r}=OM$，$\boldsymbol{r}_0=OM_0$，法向量为$\boldsymbol{n}$，则平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

例 1. 求过点$(2,-3,1)$，且以$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$为法向量的平面方程.

解　由点法式方程 (5.7)得

$$1(x-2)+(-2)(y+3)+3(z-1)=0,$$

即
$$x-2y+3z-11=0.$$

例 2　求过点$M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$，$M_3(0,2,0)$的平面方程.

解 由法向量的定义，向量$M_1M_2\times M_1M_3$就是所求平面的法向量. 而

$$M_1M_2=(-1-2)\boldsymbol{i}+(3-(-1))\boldsymbol{j}+(-2-4)\boldsymbol{k}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$$