

数 学 习 题 集

(代数 and 三角部分)

一九七九 . 四

目 录

一、数	(1)
1. 有理数	(1)
2. 实数	(3)
3. 复数	(6)
二、代数式	(12)
1. 整式	(12)
2. 分式	(16)
3. 根式	(21)
三、代数方程、不等式	(25)
1. 一次方程	(25)
2. 二次方程	(31)
3. 可化为一次或二次方程的方程	(40)
4. 不等式	(45)

四、函数..... (53)

1. 代数函数..... (53)

2. 指数函数..... (59)

3. 对数函数..... (66)

4. 三角函数..... (73)

五、数列、排列、组合、二项式定理 (102)

1. 数 列..... (102)

2. 排列、组合、二项式定理 (110)

3. 数学归纳法 (117)

习题答案 (119)

一、数

1. 有理数

习题 A

1. 计算:

$$(-3)^2; -3^2; -(-3)^2; (-2)^3; -2^3;$$

$$-(-2)^3.$$

2. 计算:

$$-5^2 \times 3; (-5 \times 3)^2; -5 \times 3^2; (-5)^2 \times 3.$$

3. 求下列各数的绝对值:

$$-5 \times 0; -\frac{2}{7}; -(-0.1)^3; 1 + 7^2; 7^2 - 1.$$

4. 求下列各数的倒数:

$$-8^2; -3 \times 0.1; |-0.75|; 1 + \frac{2}{3}.$$

5. 求下列各数的相反数:

$$-3^3; 0 \times (-5); \frac{5}{7} - 1; 1 + \frac{5}{7}.$$

6. 什么数等于它的倒数?

7. 什么数等于它的相反数?

8. 什么数的绝对值等于它的相反数?

9. 一个数的相反数的相反数等于什么?

10. 一个数的倒数的倒数等于什么?

习 题 B

11. 证明：不存在这样两个有理数，它们既互为相反数，又互为倒数。

12. 证明：若两个数互为倒数，那么这两个数的相反数也互为倒数。

13. 证明：若两个数互为相反数，那么这两个数的倒数也互为相反数（这两个数不为0）。

14. 证明：若两个数互为相反数，那么这两个数的相反数也互为相反数。

15. 证明：若两个数互为倒数，那么这两个数的倒数也互为倒数。

16. 计算：

$$\left| 1 - \left| 3 - 7.2 \right| \right|, - \left| (-2) \times 7 \right| \times \left| -\frac{5}{4} \right| \\ \times \left| \frac{3}{8} \right|.$$

17. 计算：

$$|2-x| + x; \quad \frac{|x|}{x}.$$

18. 计算：

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12.$$

19. 绝对值相等的两个数有什么关系？

20. 绝对值相等的两个数互为倒数，这两个数是什么数？

习 题 C

21. 证明：若两个数互为倒数，那么它们的和的倒数与

它们的倒数的和也互为倒数.

22. 证明: 两数之积的相反数与这二数相反数之积互为相反数.

23. 若三个数互为倒数, 求证: 这三个数都是 1 或都是 -1 .

24. 若三个数互为相反数, 求证: 这三个数都是 0.

25. 求证: 两数之和的相反数等于这二数的相反数之和.

26. 计算:

$$|3-x| + |x-2| + |5-x| - |x-5|.$$

27. 若 $|ab| + 1 = |a| + |b|$, 求 a, b .

28. 若 a, b 是整数, 且: $|ab| = |a| + |b|$, 求 a, b .

29. 若 $x' = |x| \times 2$, 求 x .

30. 若 $x^n = |x|$, 求 x .

2. 实数

习题 A

31. 指出下列各数那些是有理数, 那些是无理数:

$$-\frac{2}{3}; 0.72; 3.257; 1.232232223 \dots \dots \dots;$$

$$\sqrt{7}; \sqrt[3]{8}; \sqrt{2}-1; \frac{1}{\sqrt{3}}; -5\sqrt{6};$$

$$\sqrt{144} + 13.$$

32. 比较下列每对数的大小:

$$0.6, \frac{3}{4}; \sqrt{5}, 2.7; \pi, \sqrt{10};$$

$$\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{3}; \frac{4}{3}, \frac{3}{4}; a, -a; \frac{n}{m}, \frac{m}{n}; a-b, b-a; a^2, 0.$$

33. 若 $(a-1)^2 + (b+2)^2 = 0$, a, b 为实数, 求 a, b .
34. 若 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 0$, x, y 为实数, 求 x, y .
35. 若 $4a^2 + b^2 - 4a + 10b + 26 = 0$, a, b 为实数, 求 a, b .

36. 写出两个其和为有理数的无理数.
37. 写出两个其积为有理数的无理数.
38. 写出两个其和其积都是有理数的无理数.
39. 有没有满足下列条件的实数?

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 5 = 0$$

40. 求下列各数的相反数与倒数:

$$\sqrt{3}; \sqrt{2}-1; \sqrt[3]{2}; \sqrt{5}+\sqrt{3}; |-\sqrt{7}|.$$

习题 B

41. 求证: $\sqrt{3}$ 是无理数.
42. 求证: $\sqrt{2}+1$ 是无理数.
43. 求证: $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.
44. 指出下列各数那些是有理数, 那些是无理数:
 $\sqrt[3]{7}-2; (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1); \sqrt[3]{64}; \sqrt[n]{a^n}; (\sqrt{2}-1)^2; (\sqrt{11})^3.$

45. a, b 是什么整数是, $\sqrt{a}+b$ 是有理数, 是无理数?

46. $0 \leq n \leq 50$, n 是什么整数时, $\sqrt{n}$ 是有理数? 是无理数?

47. x, y 是无理数, $xy, x+y$ 是不是无理数?

48. 若 x, y, z 是实数, 且:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

求证: $x=y=z$.

49. 求证: x^2+x+1 , 不论 x 是什么数时, 都不能是负数.

50. 求证, $4ab-a^2-5b^2$, 不论 a, b 是什么实数时, 都不能为正数.

51. x 是实数, 比较 x^2+1 与 $2x$ 的大小.

52. x 是正数, 比较 $2-x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的大小.

53. 比较大小: $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ 与 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

54. 比较大小: $\sqrt{11}+1$ 与 $\sqrt{19}$.

55. 比较大小: $\sqrt[3]{3}$ 与 $\sqrt{2}$.

习 题 C

56. 证明: $\lg 2$ 是无理数.

57. a, b 是有理数, $\sqrt{c}$ 是无理数, 若:

$$a+b\sqrt{c}=0, \text{ 求证: } a=0, b=0.$$

58. a, b, c, d 是有理数, $\sqrt{n}$ 是无理数, 若

$$a+b\sqrt{n}=c+d\sqrt{n}, \text{ 求证: } a=c, b=d.$$

59. 证明: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是无理数.

60. 若 a, b, c, d 是有理数, 那么:

60. $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ 成不成立? 为什么?

61. 若 a, b, c, d 是有理数, 且:

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0, \text{ 求证:}$$

$$a=b=c=d=0.$$

62. a, b, x, y 为实数, 若:

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=0.$$

求证: $a=b=0$ 或 $x=y=0$.

63. a, b, x, y 是实数, 且:

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2=0.$$

求证: $a:b=x:y$.

64. 证明: 不论 x, y 是什么实数, $x^2+y^2-2x+12y+40$ 都是正数.

65. 证明: 不论 x, y 是什么实数, x^2+xy+y^2 都是正数.

3. 复数

习题 A

66. 指出下列各数哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是纯虚数:

$$25i^2; -i^3; 3-2i; (1+5i)(1-5i);$$

$$\sqrt{-3}; \sqrt[3]{-3}; ai.$$

67. a, b 是什么实数时, $a+3+(b-2)i$ 是实数, 是虚数, 是纯虚数?

68. x 是什么实数时, $\sqrt{x-3}+x-2$ 是实数, 是虚数,

是纯虚数?

69. x, y 是实数, 若: $2x + y + 3i = 5 - (x - y)i$, 求 x, y .

70. 求 $|2 + 3i|$; $|x + yi|$.

71. 若: $|a + bi| = 0$, 求 a, b . a, b 是实数.

72. 已知 $a - 2i$ 的绝对值等于 $\sqrt{20}$, 求 a (a 是实数).

73. 计算:

$$i^{38}; i^{61}; i^{127}; i^{300}; i^{2n}.$$

74. 计算:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100}.$$

75. 计算:

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \dots i^{100}.$$

76. 计算:

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3}; \sqrt{(-2)(-3)}; (\sqrt{-5})^2.$$

77. 计算:

$$(2 - 3i)(3 + 2i); (1 + \sqrt{2}i)^2; \frac{1 + 2i}{1 - i}.$$

78. 计算:

$$1) 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ) [3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)];$$

$$2) [12(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)] \div [2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)];$$

$$3) [\sqrt{3}(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ)]^4;$$

$$4) \sqrt[3]{27(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}.$$

79. 求下列各数的平方根:

$$24 + 10i; i.$$

80. 求: $\sqrt[3]{1 + i}$; $\sqrt[5]{1 + \sqrt{3}i}$; $\sqrt[3]{1}$.

81. 求下列各数的共轭复数及其绝对值:

$$3-4i; -2+2i; -i; -7; 0.$$

82. 求下列各数的幅角:

$$-\sqrt{3}+i; 1-i; -1-\sqrt{3}i; -3i; -5i; -27i; 6; 1+i.$$

习 题 B

83. a, b 是什么实数时, $a+\sqrt{b}$ 是有理数, 是无理数, 是实数, 是虚数, 是纯虚数?

84. x 是什么实数时, $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ 是实数, 是虚数?

85. Z 是复数, 若 $|Z|=2+Z$, 求 Z .

86. A, B 是复数, 求证:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \quad \left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}, \\ |A| + |B| \geq |A+B|.$$

87. 求证: 二数和的共轭复数等于这二数的共轭复数的和.

88. 求证: 二数积的共轭复数等于这二数的共轭复数的积.

89. 若复数 Z 与其倒数共轭, 求证: $|Z|=1$.

90. 一个数的平方与其本身共轭, 求这数.

91. 求证: 一个复数的倒数等于这个数的共轭复数除以这个数的绝对值平方.

92. 求证: 只有实数或纯虚数的平方才能等于实数.

93. 求证: 一个数的平方的共轭复数等于这个数的共轭复数的平方.

94. 求证: 二数之商的共轭复数等于这二数的共轭复数之商.

95. 设 w_1, w_2 是 1 的两个虚立方根, 求证:

$$(w_1^2 - w_2, w_2^2 - w_1, 1 + w_1 + w_2) = 0.$$

96. 设 w_1, w_2 是 1 的两个虚立方根, 求证:

$p = w_1^n + w_2^n$, 当 n 是 3 的倍数时, $p = 2$; 当 n 不是 3 的倍数的正整数时, $p = -1$.

97. 设 w_1, w_2, w_3, w_4 是 -1 的 4 个 4 次方根, 求证:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0.$$

98. 设 1 的立方根为 $1, w_1, w_2$, 求证:

$$1 \times w_1 \times w_2 = 1.$$

99. 设 -1 的 4 次方根为 w_1, w_2, w_3, w_4 , 求证:

$$w_1 \times w_2 \times w_3 \times w_4 = 1.$$

100. 设 w 是 1 的一个虚 5 次方根, 求证:

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0.$$

101. 求证: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的共轭复数是:

$$r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

102. 用复数的三角式证明:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta;$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

103. 用复数的三角式证明:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta;$$

$$\sin 3\theta = 3\cos 2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

104. 设 $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 及 $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 之和的绝对值为 r , 求证:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

105. 计算:

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^5 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3}{(\cos\theta - i\sin\theta)^2 \cdot [\cos(\theta + 2\varphi) + i\sin(\theta + 2\varphi)]}.$$

106. 计算: $(1-i)^5 \cdot [\cos(\theta+45^\circ) + i\sin(\theta+45^\circ)]$

$$\frac{[\cos(60^\circ+\theta) + i\sin(60^\circ+\theta)] (1+\sqrt{3}i)^3}{(1-i)^5}$$

107. 计算:

$$1 + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^3 + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^4 + \cdots + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^9$$

108. 若 $(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ) = a + bi$, 求:

$$1 + (\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ) + (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) + (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) + (\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ) + \cdots + (\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$$

109. 证明: 不论 n 是什么自然数,

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ 都是实数.}$$

110. 设

$$p = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

求证: 当 n 是奇数时, p 是纯虚数; 当 n 是偶数时, $p = 0$.

习 题 C

111. 设 $Z = \cos \theta + i\sin \theta$, 求证:

$$Z^n + Z^{-n} = 2\cos n\theta.$$

112. 设 w 是 1 的任一个 n 次虚数根, 求证:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

113. 设 1 的 n 个 n 次方根为:

$$1, w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n-1}$$

求证: $p = 1 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_{n-1}$, 当 n 是奇数时, $p = 1$, 当

n 是偶数时, $p = -1$.

114. 设 1 的 n 次方根为:

$$1, w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1},$$

求证: $w_k = w_1^k (1 \leq k \leq n)$.

115. 设 w 是 1 的任一个虚 7 次方根, 求证:

$$2 + w + w^2 = \frac{1 - w^3 + w^4}{1 + w^4}.$$

116. 若一个复数的立方与其本身共轭, 求证: 这个数是 0 或 ± 1 , 或 $\pm i$.

117. 设 $Z_1 = a_1 + b_1 i$, $Z_2 = a_2 + b_2 i$, 若:

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2,$$

求证: $|Z_1| : |Z_2| = |b_1| : |a_2|$, $a_2 \neq 0$.

118. 设 $Z_1 = a_1 + b_1 i$, $Z_2 = a_2 + b_2 i$, 求证: Z_1 、 Z_2 幅角之差为直角的条件为: $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, 其幅角相等的条件为: $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

119. A 、 B 是二复数, $|A| = 5$, $B = 3 + 4i$, AB 是纯虚数, 求 A .

120. Z 是复数, $A = 2$, $B = 2i$, $|Z - A| = |Z - B|$, $|Z| = 2\sqrt{2}$, 求 Z .

121. 用三角式证明: 一个数的 n 次幂的共轭复数等于这个数的共轭复数的 n 次幂.

122. 设 $f(Z)$ 是 Z 的有理代数式, 证明: $f(Z)$ 的共轭复数等于把 $f(Z)$ 中的 Z 及一切系数都换为其对应的共轭复数所得的值.

123. 用三角式证明: $||A| - |B|| \leq |A - B|$, A 、 B 是复数.

124. 用三角式证明:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \cos \frac{n-1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n-1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

125. 求证: $1 + \cos\theta + i\sin\theta$ 与 $1 - \cos\theta - i\sin\theta$ 的幅角相差 90° , 模数的平方和为 4.

二、代数式

1. 整式

126. 计算:

$$(a+b+c)(a-2b+3c);$$

$$(x^2+x+1)(x^2+2x-3);$$

$$(x+1)(y+2)(z+3);$$

$$(a+b)(b+c)(a+c);$$

127. 用公式计算:

$$(a-b+c)^2; (x+y+z)(x+y-z);$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2);$$

$$(x^2 - x + 7)(x^2 + x - 7);$$

$$(1-x)(1+x)(1+x^2);$$

$$(x+2y+3)(x+2y-1);$$

$$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2);$$

$$(2x+3y)^3; (3ab - \frac{1}{3}c)^3;$$

$$(1+3a)(1-3a+9a^2);$$

128. 计算:

$$(x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 - x + 1);$$

$$(x^2 + 7x + 12) \div (x+3);$$

129. 因式分解:

$$y(x-2) - x + 2; x^3 - 6x^2 + 9x;$$

$$3x^2 - 48;$$

$$6x^2 + x - 15;$$

$$27a^4 - 8a;$$

$$(a+b)^3 + b^3;$$

$$12x^2 + 14xy - 20y^2;$$

130. $x=98$, 求下列各式之值:

$$x^2 + 5x + 14; 10x^2 + 40;$$

$$(x+3)^2 - (x-2)^2 + 5.$$

131. $a+b=90$, $a-b=10$, 求: $2(a^2+b^2)-110$ 的值.

132. $x+y=10$, $xy=24$, 求: $5x^2+5y^2$ 之值.

133. 求证:

$$(ax+by)^2 + (ax-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

134. 求证:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

135. 求证:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

习 题 B

136. 计算:

$$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1);$$

$$(x+a)(x+b)(x+c);$$

$$(a+b+c+d)^2;$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4);$$

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c);$$

$$(a-b-c+d)(a+b-c-d);$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2-(ab+ac+bc)^2.$$

137. 因式分解:

$$ab^2-a^2b-2bc+2ac;$$

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b);$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc;$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$$

138. 因式分解:

$$2x^2-(a-2)x-a(a-1);$$

$$2x^2-3xy+y^2-4x+y-6;$$

$$x^2-xy-2y^2+3x-3y+2;$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz.$$

139. 因式分解:

$$x^4+x^2+1;$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24;$$

$$(1-a^2)(1-b^2)-4ab;$$