

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

鉴 定 文 件

郑 州 大 学

河南科技大学

郑州市市政工程管理处

2002 年 8 月

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

鉴 定 文 件

郑 州 大 学

河南科技大学

郑州市市政工程管理处

2002 年 8 月

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

鉴定文件目录

- 1、 鉴定大纲
- 2、 工作报告
- 3、 研究报告
- 4、 用户报告
- 5、 查新报告

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

鉴 定 大 纲

“复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究”鉴定委员会

2002 年 8 月

河南省自然科学基金项目
复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

鉴 定 大 纲

一、郑州大学、河南科技大学和郑州市市政工程管理处联合完成的“复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究”为河南省自然科学基金项目（项目编号：974051700）。经过项目组全体人员的努力，取得了系统性的理论分析和应用技术研究成果，具备鉴定条件，特此提交会议进行技术鉴定。

二、本项目的鉴定形式为会议鉴定，由河南省科技厅组织，河南省教育厅主持，现场组织成立鉴定委员会，设主任委员 1 人，副主任委员 1 人，委员若干人。

三、鉴定内容

1. 审查课题组提供的技术资料是否齐全并符合要求；
2. 是否完成了项目任务书规定的研究内容；
3. 成果的科技水平和技术创新性；
4. 审查成果在实际工程中的应用范围及推广应用的可行性；
5. 社会效益和经济效益分析的可靠性；
6. 对成果的进一步完善提出建议。

四、鉴定程序

1. 成立鉴定委员会
2. 通过鉴定大纲
3. 审查提交的技术资料
4. 项目组成员介绍研究成果
5. 现场答辩
6. 讨论起草鉴定意见
7. 通过鉴定意见

五、鉴定委员会主任总结发言

六、河南省科技厅领导讲话

七、河南省教育厅领导讲话

八、郑州大学领导讲话

九、鉴定会议结束

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

工 作 报 告

郑 州 大 学

河南科技大学

郑州市市政工程管理处

2002 年 8 月

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究 工 作 报 告

复合材料具有优越的材料性能，目前已在交通、土建、水利、机械和电子工程等领域得到了广泛应用。在复合材料中，界面是一个重要组成部分，界面裂纹的产生和扩展是材料失效的主要原因，因此，近代新型材料（诸如精密陶瓷、高韧性复合材料、纳米材料等）的研制及微观结构的设计均需要断裂力学理论的指导，从而使复合材料断裂力学问题的研究显得十分重要，现已成为国际断裂界的研究热点和前沿课题。在最近几年中，国际上有许多力学家和材料科学家都致力于这一方面的研究工作，并取得了突破性进展，从而为复合材料断裂力学的发展奠定了良好的基础。国内在这一领域中也开展了许多工作，在复合材料断裂力学的力学模型、弹塑性应力场及断裂动力学等方面都已取得了创造性成果。就目前而言，绝大多数工作仍然是集中在二维问题方面。由于三维复合材料裂纹问题的理论分析非常复杂，数值计算仍没有合适的方法，从而使得三维复合材料断裂力学的研究显得非常困难，在这方面的研究至今开展较少。考虑到许多实际问题都是三维问题（如微电子材料中多层微电子结构的脱层与断裂，复合结构陶瓷涂层的龟裂与屈曲，复合材料中基体与纤维的剥离等），本课题组成员于 1995 年开始从事复合材料断裂力学问题方面的研究工作。在前期研究工作的基础上，1996 年申请河南省自然科学基金项目获得批准，项目编号为：974051700。1999 年 12 月完成课题的研究任务，并顺利结题。本项目在三维复合材料断裂力学的基本理论及其应用方面进行了较为系统的研究，并在随后的工作中，结合道路、水利、土木、机械等方面的理论和应用研究项目，将课题的研究成果在实际工程中进行了推广应用，取得了较好的效果。

本项课题的研究内容主要分为两个部分：第一部分为带有裂纹和夹杂的复合材料柱体扭转问题研究；第二部分为双相材料空间中三维裂纹问题（包括界面裂纹）的研究。

在复合材料柱体扭转问题研究中，根据纤维增强复合材料的特点，采用 Saint-Venant 扭转理论，对含有裂纹和夹杂的复合柱体扭转问题进行了分析。提出了一种能用于扭转分析的新型线夹杂模型，并得到了它的基本解。在此基础上，通过将此解与 Muskhelishvili

提出的单层势函数解及单裂纹的基本解结合,将该问题归结为解一组混合型积分方程,并为其建立了数值解法。通过对若干数值算例的计算,取得了较好的效果。该方面的研究成果不仅具有重要的理论价值,而且可以用于指导抗扭构件的材料和结构设计,具有重要的实际应用价值。该项研究成果的部分内容已在国际权威学术杂志“Engineering Fracture Mechanics”上发表,被SCI收录。1999年获河南省自然科学优秀论文一等奖。

关于双相材料空间中三维裂纹问题(包括界面裂纹)的研究方面,主要工作包括以下两个方面:

- (1) 根据双相材料空间问题的弹性力学基本解,采用边界元法对双相材料空间中位于界面一侧区域的平片裂纹问题进行了详细研究,获得了在垂直于和平行于界面情况下任意形状的平片裂纹问题的超奇异积分方程组,使用有限部分积分与边界元法结合的方法为其建立了数值求解方法,并对其中裂纹前沿应力强度因子的数值计算问题进行了专门讨论,给出了具体的计算公式。为了验证该方法的可靠性,本项目作了考核性计算,结果表明,该方法是成功的。本项目对工程中经常遇到的几种典型的平片裂纹问题(如椭圆形裂纹、矩形裂纹等)进行了具体的数值计算,并系统地分析了平片裂纹对材料界面应力的影响。
- (2) 采用边界元法,并结合有限部分积分的原理,首次对双相材料空间中任意形状的平片界面裂纹问题进行了研究,获得了问题的超奇异积分——微分方程组。当问题退化到二维界面裂纹问题时,其结果与已有的结果完全一致。本文还使用奇异积分方程的主部分分析法,研究了三维平片界面裂纹问题的未知解的性态,求得了其性态指数,该结果与已有的结果一致,从而为进一步研究三维界面裂纹问题提供了基础。

此部分研究成果已先后在 Science in China、Chinese Science Bulletin、科学通报、中国科学、固体力学学报、应用力学学报、机械强度等国内外重要学术期刊上发表,并受到国内外同行的关注。该方面的研究成果不仅发展和丰富了断裂力学的基本理论,对于深入认识多相介质的破坏规律,指导高性能复合材料的组成设计和结构设计,以及路面的罩面设计等都具有具有重要的参考价值。

该课题经过多年的理论研究和工程实际应用,取得了系统性的研究成果,具备了鉴定的条件。

河南省自然科学基金项目

复合材料断裂力学问题的理论分析与应用研究

研 究 报 告

郑 州 大 学

河南科技大学

郑州市市政工程管理处

2002 年 8 月

目 录

第一部分

含有裂纹和夹杂的复合柱体扭转问题研究

第二部分

双相材料中三维断裂力学问题的理论与应用研究

第一章 绪论

§ 1.1 本文的目的的意义

§ 1.2 三维断裂力学的研究进展

§ 1.3 界面断裂力学

§ 1.4 本文的主要工作

第二章 双相材料空间的弹性力学基本解

§ 2.1 三维弹性力学问题的通解

§ 2.2 双相材料空间问题的基本方程

§ 2.3 问题的求解

§ 2.4 问题的位移场及几种退化结果

§ 2.5 基本解中的位移分量及应力分量

第三章 求解双相材料空间中平片裂纹问题的基本关系及其超奇异积分方程

§ 3.1 含有平片裂纹的双相材料空间中的位移场和应力场

§ 3.2 垂直于界面的平片裂纹问题的超奇异积分方程

§ 3.3 平行于界面的平片裂纹问题的超奇异积分方程

§ 3.4 裂纹前沿应力强度因子的定义及其计算

第四章 平片裂纹问题的数值方法及若干典型数值算例

§ 4.1 平片裂纹问题的超奇异积分方程

§ 4.2 超奇异积分方程的离散及数值处理

§ 4.3 裂纹前沿应力强度因子的数值计算

§ 4.4 考核性算例

§ 4.5 若干典型算例

第五章 界面应力

§ 5.1 双相材料受集中力作用时的界面应力

§ 5.2 双相材料中的平片裂纹对界面应力的影响

§ 5.3 界面应力的数值计算及若干典型算例的结果

第六章 三维平片界面裂纹问题的基本方程及其理论分析

§ 6.1 三维平片界面裂纹问题的基本方程

§ 6.2 三维平片界面裂纹问题的退化情形

§ 6.3 基本方程未知解的性态分析

第七章 总结与讨论

本项目已发表的学术论文目录

第一部分

含有裂纹和夹杂的复合柱体扭转问题研究

一、引言

虽然复合材料柱体的扭转问题已有许多学者作过研究[1-3], 对于含有裂纹的复合材料柱体的扭转问题文[4]也曾作过分析, 但对含有裂纹和夹杂的复合柱体的扭转问题的研究, 作者因接触到的文献有限, 还未见这方面成果的报导。很明显, 随着复合材料的广泛应用, 对此类问题进行研究不仅具有重要的理论意义, 而且具有重要的实际应用价值。因此, 本文将对此类问题进行具体分析。

本项目借鉴平面夹杂问题的处理方法, 提出了一种能用于扭转分析的线夹杂模型。通过采用 Mellin 变换方法, 求得了它的基本解, 然后, 将此解与文[1]中的单层势函数解和单裂纹基本解[6]进行叠加, 并将此作为含有裂纹和夹杂的复合柱体扭转问题的扭曲函数, 进而将该问题归为解一组混合型积分方程, 此组方程可联合使用 Gauss-Chebyshev 求积公式[7]和 Gauss-Legendre 求积公式[8]进行求解。最后, 用此方法对若干算例作了数值计算, 获得了满意的数值结果。

二、复合柱体扭转的基本关系

若复合柱面横截面如图 1 所示, 其中围线 L_0 为柱的外边界, L_1 为材料分界线, L_{ab} 和 L_{cd} 分别为由沿 z 轴向贯通的直线裂纹和直线夹杂上下岸组成的闭曲线, Q_0 为由闭曲线 L_0 、 L_1 、 L_{ab} 和 L_{cd} 围成的复连通域, 它是复合柱的基体, 其剪切弹性模量为 μ_0 , Q_1 为由闭围线 L_1 围成的单连通域, 它是柱的结合体, 其剪切弹性模量为 μ_1 。假定柱的外边界是和裂纹的上下表面均无外力作用, 基体和结合体的联结牢固, 无相对滑动, 图中 oxy 为整体坐标, 而 $o_1x_1y_1$ 和 $o_2x_2y_2$ 为局部坐标。

根据柱体的 Saint-Venant 扭转理论[1], 复合柱体扭转时的位移分量为:

$$u = -\alpha zy, \quad v = \alpha zx, \quad w = \alpha \varphi(x, y) \quad (1)$$

相应的剪应力为:

$$\tau_{xz} = \alpha \mu_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{xy} = \alpha \mu_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

柱体的抗扭刚度为:

$$D = \frac{M}{\alpha} = \sum_{j=0}^1 \int_{Q_j} \mu_j \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy \quad (3)$$

本项目只讨论刚性夹杂，它沿坐标轴 z 向贯通，在其自身平面内不产生线变形和角变形，但夹杂对出平面的扭转不能抵抗。对于此种刚性夹杂，函数 $\varphi_1(\rho, \theta)$ 可使用以下混合形式的边界条件的提法决定：

$$W(\rho, \pi) - W(\rho, -\pi) = 0, \quad 0 < \rho < \infty \quad (10)$$

$$\sigma_{z\theta}(\rho, \pi) - \sigma_{z\theta}(\rho, -\pi) = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad d < \rho < \infty \quad (11)$$

$$\sigma_{z\theta}(\rho, \pi) - \sigma_{z\theta}(\rho, -\pi) = -2\alpha\mu_0 p(\rho), \quad c < \rho < d \quad (12)$$

式中 $p(\rho)$ 为未知函数，它是夹杂 L_{cd} 两侧的剪应力间断，满足以下平衡条件：

$$\int_0^{\infty} p(\rho) d\rho = 0 \quad (13)$$

引入函数 $\varphi_1(\rho, \theta)$ 的 Mellin 变换及其逆变换[9]：

$$\Phi(s, \theta) = \mathfrak{M}[\varphi_1(\rho, \theta); s] = \int_0^{\infty} \varphi_1(\rho, \theta) \rho^{s-1} d\rho \quad (14)$$

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \mathfrak{M}^{-1}[\Phi(s, \theta); \rho] = \frac{1}{2\pi i} \int \Phi(s, \theta) \rho^{-s} ds \quad (15)$$

使用调和方程(7)及其边界条件(10)~(12)，经过繁复的数学运算，求得函数 $\Phi(s, \theta)$ 为：

$$\Phi(s, \theta) = \frac{\Psi(s)}{s \cdot \sin(s\pi)} \cos(s\theta) \quad (16)$$

其中 $\Psi(s)$ 为一新的未知函数，它可使用以下三节积分方程决定：

$$\mathfrak{M}^{-1}[\Psi(s); \rho] = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad d < \rho < \infty \quad (17)$$

$$\mathfrak{M}^{-1}[\Psi(s); \rho] = \rho p(\rho), \quad c < \rho < d \quad (18)$$

解方程 (17) 和 (18) 可得：

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} p(\rho) \rho^s d\rho \quad (19)$$

将 (19) 式代入(16)式，并作反演，便得单夹杂的基本解 $\varphi_1(\rho, \theta)$ 为：

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \mathfrak{M}^{-1} \left[\frac{\int_0^{\infty} p(\rho) \rho^s d\rho}{s \cdot \sin(s\pi)} \cos(s\theta); \rho \right] \quad (20)$$

四、含裂纹和夹杂的复合柱体的扭曲函数

将以上得到的单夹杂基本解 $\varphi_1(\rho, \theta)$ 与 Mushelishvili 的单层势函数解[1]和单裂纹扭转问题基本解[6]进行叠加，便可作图 1 所示的含有裂纹和夹杂的复合柱体的扭曲函数：

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(\rho_1, \theta_1) + \varphi_2(\rho_2, \theta_2) \quad (21)$$

式中：

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j^{(s)} \ln \frac{1}{r_{qs}} ds \quad (22)$$

$$\varphi_1(\rho_1, \theta_1) = \Re^{-1} \left[\frac{\int_{L_1} p(\rho_1) \rho_1^s d\rho_1}{s \cdot \sin(s\pi)} \cos(s\theta_1); \rho_1 \right] \quad (23)$$

$$\varphi_2(\rho_2, \theta_2) = \Re^{-1} \left[\frac{\int_{L_2} f(\rho_2) \rho_2^s d\rho_2}{s \cdot \sin(s\pi)} \cos(s\theta_2); \rho_2 \right] \quad (24)$$

其中 q 为区域 Ω_0 或 Ω_1 中的点, $g_j(s)$ 为围线 $L_j (j=0,1)$ 上的未知势密度, $f(\rho_2)$ 为裂纹 L_{ab} 的未知位错密度函数, $p(\rho_1)$ 为定义于夹杂 L_{cd} 两侧的未知剪应力间断。

根据单层势函数的性质[1], 函数 $\varphi_0(x, y)$ 在 L_1 两侧的法向导数间断, 其内侧和外侧的边界值由以下公式计算:

$$\left(\frac{d\varphi_0}{dn} \right)_1 = -\pi g_1(t) + \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j(s) \frac{\cos \theta}{r_{ts}} ds \quad (25)$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{dn} \right)_0 = \pi g_1(t) + \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j(s) \frac{\cos \theta}{r_{ts}} ds \quad (26)$$

在 L_0 上的边界值为:

$$\left(\frac{d\varphi_0}{dn} \right)_0 = \pi g_0(t) + \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j(s) \frac{\cos \theta}{r_{ts}} ds \quad (27)$$

式中 r_{ts} 为围线 L_j 上定点 t 至积分点 s 的距离, θ 是矢量 ts 与点 t 处的外法线 n 之间的夹角。

以上给出的扭曲函数 (21) 式共含有四个未知函数, 它们可使用问题的边界条件、夹杂刚性性质及围线 L_1 上的联结条件决定, 即柱的外边界 L_0 及裂纹 L_{ab} 不受外力作用、夹杂 L_{cd} 剪应变为零及材料分界线 L_1 两侧剪应力连续四个条件决定。其中在夹杂 L_{cd} 上的条件可表示为:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} = 0 \quad (28)$$

将 (21) 式中的扭曲函数代入边界条件 (5)、(6) 和 (28) 中, 在整体坐标系中可以得到用于决定以上四个未知函数 $g_0(t)$ 、 $g_1(t)$ 、 $f(t)$ 及 $p(t)$ 的一组积分方程,

$$\pi g_0(t) + \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j(s) \frac{\cos \theta}{r_{ts}} ds + \frac{d\varphi_1(x, y)}{dn} + \frac{d\varphi_2(x, y)}{dn} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y), \quad t(x, y) \in L_0 \quad (29)$$

$$\frac{\pi(\mu_0 + \mu_1)}{(\mu_0 - \mu_1)} g_0(t) + \sum_{j=0}^1 \int_{L_j} g_j(s) \frac{\cos \theta}{r_{js}} ds + \frac{d\varphi_1(x, y)}{dn} + \frac{d\varphi_2(x, y)}{dn} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y), \quad t(x, y) \in L_0 \quad (30)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t - \rho_2} dt + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} [\varphi_1(\rho_2, \pi) + \varphi_0(\rho_2, \pi)] = -\rho_2, \quad a < \rho_2 < b \quad (31)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_c^d \frac{p(t)}{t - \rho_1} dt - \frac{\partial}{\partial \rho_1} [\varphi_2(\rho_1, \pi) + \varphi_0(\rho_1, \pi)] = 0, \quad c < \rho_1 < d \quad (32)$$

此外, 函数 $f(t)$ 和 $p(t)$ 应分别满足位移的复通域条件及夹杂的平衡条件:

$$\int_a^b f(t) dt = A, \quad \int_c^d p(t) dt = 0 \quad (33)$$

其中常数 A 由问题的物理条件决定。因此, 图 1 所示的扭转问题可以使用扭曲函数 φ [其表达式见 (21) 式] 进行求解。

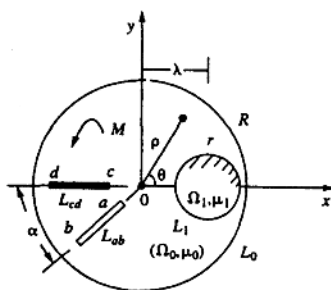


图 3

对于图 3 所示的含有单根径向裂纹 $L_{ab} = (a, b)$ 和单根径向夹杂 $L_{cd} = (c, d)$ 的复合圆柱的扭转问题, 若使用图示的极坐标 (ρ, θ) , 并略去刚体位移, 则该问题的扭曲函数(21)为:

$$\varphi_0(\rho, \theta) = -\frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \ln[R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \eta)] g_0(\eta) d\eta \quad (34)$$

$$-\frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \ln[r + \rho + \lambda - 2\lambda(r \cos \eta - \rho \cos \theta) - 2r\rho \cos(\theta - \eta)] g_1(\eta) d\eta$$

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_c^d \ln(t^2 + \rho^2 + 2t\rho \cos \theta) p(t) dt \quad (35)$$

$$\varphi_2(\rho, \theta) = -\frac{1}{\pi} \int_a^b \arctg \frac{\rho \sin(\theta - \alpha)}{t + \rho \cos(\theta - \alpha)} f(t) dt \quad (36)$$

将以上结果(34)~(36)代入方程组 (29) - (32) 中, 并使用条件(33), 则得该问题的积

分方程及其定解条件为:

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\bar{\varphi}_i(t)}{t-\rho} dt + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} G_{ij}(t, \rho) \bar{\varphi}_j(t) dt + \sum_{j=3}^4 \int_0^{2\pi} H_{ij}(\eta, \rho) \bar{\varphi}_j(\eta) d\eta = R_i(\rho), \quad \rho \in (a_i, b_i), \quad i=1,2 \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} G_{ij}(t, \zeta) \bar{\varphi}_j(t) dt + \sum_{j=3}^4 \int_0^{2\pi} H_{ij}(\eta, \zeta) \bar{\varphi}_j(\eta) d\eta + \pi \bar{\varphi}_i(\zeta) = R_i(\zeta), \quad \zeta \in (0, 2\pi), \quad i=3,4 \quad (38)$$

$$\int_a^b f(t) dt = A, \quad \int_a^d p(t) dt = 0 \quad (39)$$

以上公式中, 积分限 $a_1 = a, b_1 = b, a_2 = c, b_2 = d$, 未知函数 $\bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j$ 及自由项 R_i 由以下一些公式给出:

$$\bar{\varphi}_1(t) = f(t), \quad \bar{\varphi}_2(t) = p(t) \quad (40)$$

$$\bar{\varphi}_3(\eta) = g_0(\eta), \quad \bar{\varphi}_4(\eta) = g_1(\eta) \quad (41)$$

$$R_1(\rho) = -\rho, \quad R_2(\rho) = R_3(\zeta) = 0 \quad (42)$$

$$R_4(\zeta) = \frac{\lambda(\mu_0 - \mu_1)}{\mu_0 + \mu_1} \sin \zeta \quad (43)$$

积分核 $G_{ij}(t, \rho)$ 、 $G_{ij}(t, \zeta)$ 、 $H_{ij}(\eta, \rho)$ 和 $H_{ij}(\eta, \zeta)$ 的显式表达式如下:

$$G_{11}(t, \rho) = G_{22}(t, \rho) = 0$$

$$G_{11}(t, \rho) = G_{22}(t, \rho) = -\frac{t \sin \alpha}{\rho^2 + t^2 - 2\rho t \cos \alpha}$$

$$H_{13}(\eta, \rho) = \frac{R \sin(\alpha - \eta)}{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos(\alpha - \eta)}, \quad H_{23}(\eta, \rho) = \frac{R\rho + R^2 \cos \eta}{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos \eta}$$

$$H_{14}(\eta, \rho) = \frac{r\lambda \sin \alpha + r^2 \sin(\alpha - \eta)}{r^2 + \lambda^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\alpha - \eta) + 2\lambda(r \cos \eta + \rho \cos \alpha)}$$

$$H_{24}(\eta, \rho) = \frac{r(\rho + \lambda + r \cos \eta)}{r^2 + \lambda^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos \eta + 2\lambda(r \cos \eta + \rho)}$$

$$G_{31}(t, \zeta) = \frac{t \sin(\alpha - \zeta)}{R^2 + t^2 + 2Rt \cos(\alpha - \zeta)}, \quad G_{32}(t, \zeta) = \frac{R + t \cos \zeta}{R^2 + t^2 + 2Rt \cos \zeta}$$

$$G_{41}(t, \zeta) = \frac{\kappa[\lambda \sin \zeta + t \sin(\zeta - \alpha)]}{r^2 + \lambda^2 + t^2 + 2rt \cos(\zeta - \alpha) + 2\lambda(r \cos \zeta + t \cos \alpha)}$$

$$G_{42}(t, \zeta) = \frac{\kappa[r + (t + \lambda) \cos \zeta]}{r^2 + (\lambda + t)^2 + 2r(t + \lambda) \cos \zeta}, \quad \kappa = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1}$$

$$H_{33}(\eta, \zeta) = -\frac{1}{2}, \quad H_{34}(\eta, \zeta) = \frac{r[\lambda \cos \zeta + r \cos(\eta - \zeta) - R]}{R^2 + \lambda^2 + r^2 - 2Rr \cos(\eta - \zeta) + 2\lambda(r \cos \eta - R \cos \zeta)}$$