TONGBU DAOXUE 新课程

同步导学

XINK

必修5

高中

数学

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

目 录

第 3 章 不等式

第1章 解三角形

1.1.1 正弦定理(1)

【新知导读】

1. 在$\triangle ABC$中，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$a=10$，则b等于 ( )

A. $5\sqrt{2}$　　B. $10\sqrt{2}$

C. $\frac{10}{3}\sqrt{6}$　　D. $5\sqrt{6}$

2. 在$\triangle ABC$中，$a=6$，$b=6\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，则C等于 ( )

A. 30°或90°　　B. 30°或120°

C. 60°或150°　　D. 45°或135°

3. 在$\triangle ABC$中，若$A:B:C=1:2:3$，则$a:b:c=$ ______.

【范例点睛】

例1 利用“正弦定理”说明下列问题是否有解，若有解，是一解还是两解？并解三角形.

(1) 已知$b=4$，$c=8$，$B=30^\circ$，求C，A，a；

(2) 已知$a=7$，$b=3$，$A=110^\circ$，求B，C，c；

(3) 已知$b=6$，$c=9$，$B=45^\circ$，求C，a，A；

(4) 已知$b=11$，$c=12$，$B=60^\circ$，求C，a，A.

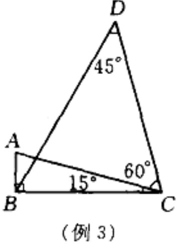
思路点拨:已知三角形的两边及其一边的对角解三角形，其方法是先根据正弦定理列以另一对角为未知数的三角方程.若三角方程无解，则三角形无解；若三角方程有解，则根据条件确定所求角的取值范围，在这一取值范围内三角方程解的个数就是三角形解的组数.

例2 在$\triangle ABC$中，$a+b=6+6\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，$B=60^\circ$，求c.

思路点拨:巧用公式的等比性质.

例3 如图，$AB\perp BC$，$CD=33$，$\angle ACB=15^\circ$，$\angle BCD=75^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，求AB的长.

思路点拨:灵活运用正弦定理.



(例3)

【课外链接】

1. 已知在$\triangle ABC$中，$A=105^\circ$，$B=45^\circ$，$c=\sqrt{2}$，则$S_{\triangle ABC}$等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{3}-1$

2. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$，则$\triangle ABC$是 ( )

A. 有一内角为30°的直角三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 有一内角为30°的等腰三角形　　D. 等边三角形

【随堂演练】

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a=5\sqrt{2}$，$c=10$，$A=30°$，则B等于 (　　)

A. 105°　　B. 60°　　C. 15°　　D. 15°或105°

2. 在$\triangle ABC$中，根据下列条件解三角形，则其中有两解的是 (　　)

A. $a=7$，$b=2$，$c=8$　　B. $a=10$，$B=45°$，$C=75°$

C. $a=7$，$b=5$，$A=80°$　　D. $a=7$，$b=8$，$A=45°$

3. 在$\triangle ABC$中，若$b=2\sqrt{2}$，$a=2$，且三角形有解，则A的取值范围是 (　　)

A. (0°，90°)　　B. (0°，45°]　　C. (0°，30°]　　D. (30°，60°)

4. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，则下列关系式中一定成立的是 (　　)

A. $a=b\sin A$　　B. $a\leqslant b\sin A$　　C. $a<b\sin A$　　D. $a\geqslant b\sin A$

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$B=$ ________.

6. 在$\triangle ABC$中，$\frac{2a}{\sin A}-\frac{b}{\sin B}-\frac{c}{\sin C}=$ ________.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=\frac{1}{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a=1$，则$b=$ ________.

8. 在$\triangle ABC$中，已知$a=4$，$A=30°$，$b=4\sqrt{3}$，则$S_{\triangle ABC}=$ ________.

9. 在$\triangle ABC$中，已知$a=14$，$b=7\sqrt{6}$，$B=60°$，解此三角形.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$b+c=1$，$C=45°$，$B=30°$，求b.

1.1.2　正弦定理(2)

【新知导读】

1. 在$\triangle ABC$中，若$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则$\triangle ABC$的形状是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 不能确定

2. 在$\triangle ABC$中，如果$A=60°$，$a=\sqrt{6}$，$b=4$，那么满足条件的$\triangle ABC$ (　　)

A. 有一解　　B. 有二解　　C. 无解　　D. 不能确定

3. 已知正十边形的内切圆的半径是3，那么这个正十边形的面积是 (　　)

A. $45\sin 36°$　　B. $90\tan 18°$　　C. $45\cos 36°$　　D. $90\tan 72°$

【范例点睛】

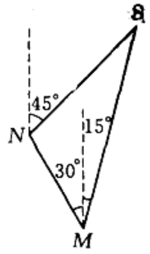
例1　在$\triangle ABC$中，若$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2}{b^2}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思路点拨:利用正弦定理,化边到角,将等式转化为只含有角的关系式.

例 2 在$\triangle ABC$中,求证:$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

思路点拨:等式右边是边的关系,想办法消去等式左边的三角函数.

例 3 一货轮航行到M处,测得灯塔S在货轮的北偏东15°相距20里处,随后货轮按北偏西30°的方向航行.半小时后,又测得灯塔在货轮的北偏东45°,求货轮的航行速度.



(例 3)

【课外链接】

1. 海上有A, B两个小岛相距10 n mile,从A岛望C岛和B岛成60°角($\angle BAC=60°$),从C岛望B岛和A岛成45°($\angle ACB=45°$),则B, C间的距离是 ( )

A. $10\sqrt{3}$ n mile　B. $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ n mile　C. $5\sqrt{2}$ n mile　D. $5\sqrt{6}$ n mile

2. 在$\triangle ABC$中,若$\sin\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$,则$\triangle ABC$是 ( )

A. 直角三角形　B. 正三角形
C. 等腰直角三角形　D. 等腰三角形或直角三角形

【随堂演练】

1. 在$\triangle ABC$中,较短的两边为$a=2\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{3}$, $A=45°$,则C等于 ( )
A. 15°　B. 75°　C. 120°　D. 60°

2. 在$\triangle ABC$中,已知$A=120°$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{3}$,则$\cos C$等于 ( )

A. $\dfrac{7\sqrt{19}}{38}$　B. $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$　C. $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$　D. $\dfrac{3\sqrt{19}}{38}$

3. 在$\triangle ABC$中,若$a=2b\cos C$,则$\triangle ABC$是 ( )
A. 直角三角形　B. 等腰三角形　C. 等腰直角三角形　D. 等腰或直角三角形

4. 某人向正东方向走x km,他向右转150°,然后朝新方向走了3 km,结果他离出发点恰好$\sqrt{3}$ km,那么x的值是 ( )

A. $\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$　C. $\sqrt{3}$或$2\sqrt{3}$　D. 3

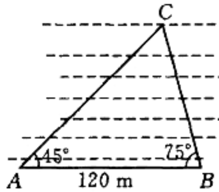
5. 若$A=150°$, $a=15$, $b=25$,那么满足条件的$\triangle ABC$的个数是________.

6. 在$\triangle ABC$中,$A=45°$, $\cos A$, $\cos B$是方程$4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m=0$的两个根,$AC=\sqrt{2}$,则$BC=$________.

7. 在$\triangle ABC$中,$\sqrt{3}a=2b\sin A$,则$B=$________.

8. 若关于x的方程$x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\dfrac{C}{2}=0$有一个根为1,则在$\triangle ABC$中形状是______.

9. 如图,为了测河的宽,在一岸边选定两点A和B,望对岸的标记物C,测得$\angle CAB=45°$, $\angle CBA=75°$, $AB=120$ m,求河的宽(精确到0.01 m).



(第 9 题)

10. 在$\triangle ABC$中,三内角A, B, C成等差数列,对应三边a, b, c也成等差数列,求证:$\triangle ABC$是正三角形.

1.2.1　余弦定理(1)

【新知导读】

1. 在$\triangle ABC$中,已知$a^2+ab=c^2-b^2$,则内角C等于 (　　)

A. 90°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 30°

2. 已知$\triangle ABC$的两边长为2和3,其夹角的余弦为$\frac{1}{3}$,则其外接圆的半径为 (　　)

A. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{9\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

3. 在$\triangle ABC$中,已知$a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=1+\sqrt{3}$,则$A=$ ________.

【范例点睛】

例1　在$\triangle ABC$中,

(1) 已知$a=3$, $b=4$, $C=60^\circ$, 求边c;

(2) 已知$a:b:c=(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:2$, 求最小内角.

思路点拨:(1)已知$\triangle ABC$中的两边夹一角,用余弦定理求边c;(2)将三边长度转化为已知三边,求内角.

例2　已知$\triangle ABC$的周长为20,面积为$10\sqrt{3}$, $A=60^\circ$, 求BC边的长.

思路点拨:中学数学中常用方程思想求元素,有时借助定理、公式列方程.

例3　已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别是$AB=2$, $BC=6$, $CD=DA=4$, 求四边形$ABCD$的面积.

思路点拨:圆内接四边形的对角互补,连结BD,用余弦定理列方程.

【课外链接】

1. 已知锐角三角形的两边长为2和3,那么第三边长x的取值范围是 (　　)

A. $(1, 5)$　　B. $(1, \sqrt{5})$　　C. $(\sqrt{5}, 5)$　　D. $(\sqrt{5}, \sqrt{13})$

2. 如果把直角三角形的三边都增加同样的长度,那么这个新的三角形的形状是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 由增加的长度确定

【随堂演练】

1. 在$\triangle ABC$中,若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, 则A等于 (　　)

A. 120°　　B. 150°　　C. 60°　　D. 30°

2. 若钝角三角形的三边长为连续自然数，则这三边长为 ( )

A. 1, 2, 3　B. 2, 3, 4　C. 3, 4, 5　D. 4, 5, 6

3. 在$\triangle ABC$中，已知$A=60°$, $AC=16$，面积$S=220\sqrt{3}$，则BC为 ( )

A. $20\sqrt{6}$　B. 75　C. 55　D. 49

4. 在$\triangle ABC$中，若$A=120°$, $c=5$, $b=3$，则$\sin B\sin C$等于 ( )

A. $\frac{45}{196}$　B. $\frac{35}{196}$　C. $\frac{25}{196}$　D. $\frac{45}{198}$

5. 在等腰梯形$ABCD$中，已知$AB=4$, $CD=2$，腰长$BC=3$，则对角线$AC=$ ________.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$a=7$, $b=8$, $\cos C=\frac{13}{14}$，则$\triangle ABC$中最大角的余弦为________.

7. 已知$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\sqrt{3}}$，则$C=$ ________.

8. 在$\triangle ABC$中，若$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\triangle ABC$中最小内角的度数是______.

9. 在$\triangle ABC$中，已知$a-b=4$, $a+c=2b$，且最大角为$120°$，求三边长.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$C=60°$，求$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}$的值.

1.2.2 余弦定理(2)

【新知导读】

1. 已知$\triangle ABC$的三边长$a=3$, $b=5$, $c=6$，则$\triangle ABC$的面积是 ( )

A. $\sqrt{14}$　B. $2\sqrt{14}$　C. $\sqrt{15}$　D. $2\sqrt{15}$

2. 已知$\triangle ABC$的三边满足$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，则$B$等于 ( )

A. $30°$　B. $45°$　C. $60°$　D. $120°$

3. 已知$\square ABCD$中，$B=120°$, $AB=6$, $BC=4$，则$AC=$ ________, $BD=$ ________.

【范例点睛】

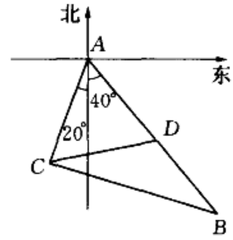
例1　在$\triangle ABC$中，如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，并且$B$为锐角，试判断$\triangle ABC$的形状.

思路点拨：利用余弦定理，寻找边的关系.

例2　在$\triangle ABC$中，已知$c=10$, $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，求$\triangle ABC$的内切圆的半径.

思路点拨:已知条件是三角形的边与内角余弦间的关系,借助正弦定理或余弦定理转化为只含有角或只含有边的关系式.

例 3 某观测站 C 在城 A 的南偏西 20°方向上,从城 A 出发有一条公路,走向是南偏东 40°. 在 C 处测得距离 C 处 31 千米的公路上的 B 处,有一辆车正沿着公路向城 A 驶去,行驶 20 千米后到达 D 处,测得 C, D 两处间的距离是 21 千米,这时此车距城 A 多少千米?



(例 3)

【课外链接】

1. 在$\triangle ABC$中,已知 $a(b\cos B - c\cos C) = (b^2 - c^2)\cos A$, 则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰或直角三角形

2. 在$\triangle ABC$中,下列各式中一定成立的是 ( )

A. $a = \dfrac{b\sin A}{\cos B}$　　B. $c = a\cos B + b\cos A$

C. $b = \dfrac{c\sin A}{\cos C}$　　D. $a = \dfrac{c}{\tan B}$

【随堂演练】

1. 在$\triangle ABC$中,下列四个命题中正确的是 ( )

A. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$　　B. $\cos C = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

C. $a = b\cos C + c\cos B$　　D. 当 $a^2 > b^2 + c^2$ 时,A 为锐角

2. 在$\triangle ABC$中, 已知 $A = 60°$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于 ( )

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　　C. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

3. 在$\triangle ABC$中,已知 $AB = 7$, $AC = 6$, M 是 BC 的中点, $AM = 4$,则 BC 等于 ( )

A. $\sqrt{21}$　　B. $\sqrt{106}$　　C. $\sqrt{69}$　　D. $\sqrt{154}$

4. 已知$\triangle ABC$的周长为 20,面积为 $10\sqrt{3}$, $A = 60°$,则 BC 等于 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

5. 在$\triangle ABC$中,若 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$,则 $\cos A =$ ________.

6. 在$\triangle ABC$中,若 $\lg\sin A - \lg\cos B = \lg\sin C + \lg 2$, 则$\triangle ABC$是__________三角形.

7. 在$\triangle ABC$中,已知 $AB = 2$ cm, $AC = 1$ cm,角平分线 $AD = 1$ cm,则 $\triangle ABC$ 的面积是________.

8. 已知$\triangle ABC$的面积 $S = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$,则$\triangle ABC$中$\angle A$ 的大小是__________.

9. 已知梯形 $ABCD$ 中, $CD = 2$, $AC = \sqrt{19}$, $\angle BAD = 60°$, 求梯形的高.

10. 在$\triangle ABC$中，$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$，求证：三边 a, b, c 成等差数列.

1.3.1 正弦定理、余弦定理的应用(1)

【新知导读】

1. 已知 A, B 两地的距离为 10 km, B, C 两地的距离为 20 km，现测得$\angle ABC=120^\circ$，则 A, C 两地的距离为 ( )

A. 10 km B. $10\sqrt{3}$ km C. $10\sqrt{5}$ km D. $10\sqrt{7}$ km

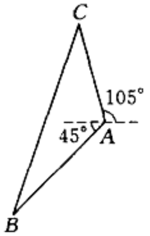
2. 在$\triangle ABC$中，已知 $b^2-bc-2c^2=0$, $a=\sqrt{6}$, $\cos A=\frac{7}{8}$，则$\triangle ABC$的面积 S 为 ( )

A. $\frac{2\sqrt{15}}{9}$ B. $\sqrt{15}$ C. 2 D. 3

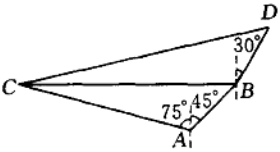
3. 海上有 A, B 两个小岛，相距 10 n mile，从 A 岛望 C 岛和 B 岛成 60°的视角，从 B 岛望 C 岛和 A 岛成 75°的视角，那么 B 岛和 C 岛间的距离为________.

【范例点睛】

例 1 甲船在 A 处遇险，在甲船正西南 10 n mile 处的乙船收到甲船的报警后，测得甲船是沿着方位角 105°的方向，以每小时 9 n mile 的速度向某岛靠近. 如果乙船要在 40 min 内追上甲船，那么乙船应以多大速度、何方向航行？



(例 1)



(例 3)

例 2 在离海岸不远处的海面上有两个航标 P, Q，现要测量它们之间的距离，在岸边取两点 A, B，测得 $AB=50$ m, $\angle PAB=105^\circ$, $\angle QAB=30^\circ$, $\angle PBA=45^\circ$, $\angle QBA=135^\circ$. 试根据这些数据求出两个航标之间的距离.

例 3 如图，在海岸 A 处，发现北偏东 45°方向、距离 A 为 $(\sqrt{3}-1)$ n mile 的 B 处有一艘走私船. 在 A 处北偏西 75°方向、距离 A 为 2 n mile 的 C 处的我方缉私艇奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追截走私船. 此时，走私船正以 10 n mile/h 的速度，从 B 处向北偏东 30°的方向逃窜. 问：缉私艇沿什么方向行驶，才能在最短时间内追上走私船？并求出所需时间.

【课外链接】

1. 渡轮以 15 km/h 的速度,沿与水流方向成 120°角的方向行驶,水流速度为 4 km/h,则渡轮实际航行的速度(精确到 0.1 km/h)为 ( )

A. 14.5 km/h　　B. 15.6 km/h　　C. 13.5 km/h　　D. 11.3 km/h

2. 在 200 m 的山顶上,测得山下一塔顶与塔底的俯角分别为 30°和 60°,则塔高为 ( )

A. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ m　　B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ m　　C. $\frac{400}{3}$ m　　D. $\frac{200}{3}$ m

【随堂演练】

1. 已知一个三角形的三边长为 a, b 和 $\sqrt{a^2+b^2+ab}$, 则这个三角形的最大角是 ( )

A. 75°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

2. 在△ABC 中,若 $3\sin A+4\cos B=6$, $4\sin B+3\cos A=1$, 则角 C 等于 ( )

A. 30°　　B. 150°　　C. 30°或 150°　　D. 60°或 120°

3. 从地面上观察一建在山顶的建筑物,测得其视角为 α,同时测得建筑物顶部的仰角为 β,则山顶仰角为 ( )

A. $\alpha+\beta$　　B. $\alpha-\beta$　　C. $\beta-\alpha$　　D. α

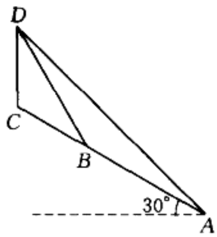
4. 一艘船以 4 km/h 的速度沿着与水流方向成 120°角的方向航行.已知水流速度为 2 km/h,则经过 $\sqrt{3}$ h,该船实际航程为 ( )

A. $2\sqrt{15}$ km　　B. 6 km　　C. $2\sqrt{21}$ km　　D. 8 km

5. 斜坡上有一铁塔 AB,在塔底 B 处测得坡底 C 的俯角为 30°.已知塔高 $AB=6$ m,斜坡 BC 长为 10 m,则塔顶 A 与坡底 C 的距离为________.

6. 已知直角三角形的周长为 $6+2\sqrt{3}$,斜边上的中线长为 2,则三角形的面积为________.

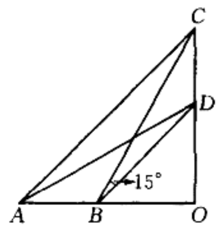
7. 如图,要在山坡上 A, B 两处测量与地面垂直的铁塔 CD 的高,由 A, B 两处测得塔顶 D 的仰角分别为 45°和 60°, AB 长为 40 m,斜坡与水平面成 30°角,则铁塔 CD 的高为________.



(第 7 题)

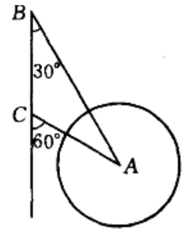
8. 某船开始看见灯塔在南偏东 30°方向,后来船沿南偏东 60°方向航行 30 n mile 后,看见灯塔在正西方向,则这时船与灯塔的距离是________n mile.

9. 如图,在地面上一点 A 测得山顶旗杆顶 C 的仰角为 45°,旗杆底 D 的仰角为 30°.向旗杆走 10 m 到 B,又测得旗杆顶与底所成的视角为 15°,求旗杆 CD 的高.



(第 9 题)

10. 如图,海中小岛周围 20 海里内有暗礁,一船正向南航行,在 B 处测得小岛 A 在船的南偏东 $30°$,航行 30 海里后,在 C 处测得小岛 A 在船的南偏东 $60°$. 如果此船不改变航向,继续向南航行,有无触礁危险?



(第 10 题)

1.3.2 正弦定理、余弦定理的应用(2)

【新知导读】

1. 力 F_1, F_2 共同作用在某质点上,已知 $F_1 = 5\text{ N}$, $F_2 = 12\text{ N}$, 且 F_1, F_2 互相垂直,则质点所受的合力的大小为 ( )

A. 7 N B. 17 N C. 13 N D. 10 N

2. 某人以时速为 a km 的速度向东行走,此时正刮着时速为 a km 的南风,则此人感到的风向与风速分别为 ( )

A. 东北,$\sqrt{2}a$ km/h B. 东南,a km/h C. 西南,$\sqrt{2}a$ km/h D. 东南,$\sqrt{2}a$ km/h

3. 由 A 地到 B 地以前无直达列车,必须经过 D, C 两地转车才能到达. 现要在 A, B 两地间修一条直达铁路,经测量得 $\angle DCB = 60°$, $\angle ADC = 150°$, $BC = 10\sqrt{2}$ km, $DC = 20\sqrt{2}$ km, 则 $AB =$ ________ km.

【范例点睛】

例 1 平面内三个力 F_1, F_2, F_3 作用于同一点,且处于平衡状态,已知 $F_1 = 1\text{ N}$, $F_2 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\text{ N}$, F_1, F_2 的夹角为 $45°$,求 F_3 的大小及 F_1 与 F_3 的夹角.

思路点拨:F_3 的大小等于 F_1 与 F_2 合力的大小,但方向相反.

例 2 垒球比赛时,击球手甲在本垒 O 处击球,游击手乙在 A 处准备跑动接球,甲击出的球的水平速度为乙的最大跑速的 4 倍. 若甲击出的球的飞行方向与 OA 成 $15°$的角,游击手乙是否可以接到球? 为什么?

思路点拨:游击手乙在看到击球手击出球的瞬间作出判断,假如对击球方向判断无误且直接跑到点 B 处接住球. 解三角形 OAB,有解则能接住球,无解则不能接住球.

例 3 在四边形 $ABCD$ 中,A, B 为定点,C 与 D 是动点, $AB = \sqrt{3}$, $BC = CD = AD = 1$. 若$\triangle BCD$ 与$\triangle BAD$ 的面积分别为 T 与 S,则当$\angle BCD$ 为何值时, $S^2 + T^2$ 取最大值?

思路点拨:取 BD 中点 E,设 $\angle BCE = \theta$, 建立关于 θ 的目标函数.

【课外链接】

1. 有一广告气球,直径为 6 m,放在公司大楼上空. 当行人仰望气球中心的仰角 $\angle BAC = 30°$

时，测得气球的视角为 2°. 若 θ 的弧度数很小时，可取 $\sin\theta\approx\theta$，则估计该气球的高 BC 的值约为 ( )

A. 70 m　　B. 86 m　　C. 102 m　　D. 118 m

2. 若方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 和 $x^2+2ax-b^2=0$ 有一个相等的公共根，且 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，则此三角形为 ( )

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 以 c 为斜边的直角三角形　　D. 以 a 为斜边的直角三角形

【随堂演练】

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c，那么 $a\cos B+b\cos A$ 等于 ( )

A. $2\cos C$　　B. $2\sin C$　　C. $\dfrac{a+b}{2}$　　D. c

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A\tan B>1$，则 $\triangle ABC$ 一定是 ( )

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 等腰三角形

3. 在一幢 20 米高的楼顶测得一塔吊的仰角为 60°，塔基的俯角为 45°，则这座塔吊的高度是 ( )

A. $20\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 米　　B. $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 米

C. $20(1+\sqrt{3})$ 米　　D. $10(1+\sqrt{3})$ 米

4. 已知 D, C, B 三点在地面同一直线上，$DC=a$，从 C, D 两点测得 A 点的仰角分别为 α, β，则 C 到 B 之间的距离 CB 等于 ( )

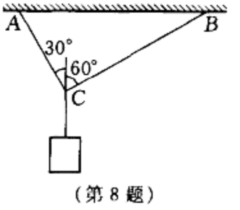
A. $\dfrac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$　　B. $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$　　C. $\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$　　D. $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，D 在边 BC 上，且 $BD=2$, $DC=1$, $\angle B=60°$, $\angle ADC=150°$，则 $AC=$ ________, $S_{\triangle ABC}=$ ________.

6. 一直角三角形的三边长可构成等差数列，则最小的内角的正弦值为________.

7. 用一矩形钢板 $ABCD$ 加工某四边形工件 $ADCE$，已知 $AB=2$ dm, $BC=1$ dm, $CE\perp BD$ 于 E，则该工件 AE 边的长为________dm.

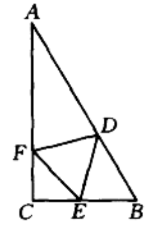
8. 如图，用绳子 AC 和 BC 吊一重物，绳子与竖直方向的夹角分别为 30°和 60°. 若绳子 AC 和 BC 能承受的最大拉力分别为 150 N 和 100 N，则此重物不能超过________N.



(第 8 题)

9. 一艘船以 8 km/h 的速度向东航行，船上的人测得风是从正北方向吹来，若船以 16 km/h 的速度加速航行，则测得风是从东北(即北偏东 45°)方向吹来，求风速.

10. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$AB=2$，$BC=1$，$CA=\sqrt{3}$，分别在边AB，BC，CA上取点D，E，F，使得$\triangle DEF$为正三角形. 设$\angle FEC=\alpha$，$\triangle DEF$的边最短时，$\sin\alpha$的值是否存在？并求出此最短边的长.



（第 10 题）

复习与小结

【知识梳理】

三角形中的边角关系

正弦定理　　余弦定理

↓

解三角形

↓

解三角形的应用

【范例点睛】

例 1　在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C的对边，$4\sin^2\dfrac{B+C}{2}-\cos 2A=\dfrac{7}{2}$.

(1) 求A的度数；　(2) 若$a=\sqrt{3}$，$b+c=3$，求b和c的值.

思路点拨：$\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{180^\circ-A}{2}$，$2A$转化为角$A$，将已知等式中的角转化为同一个角.

解：(1) 由$4\sin^2\dfrac{B+C}{2}-\cos 2A=\dfrac{7}{2}$，得$4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)-\cos 2A=\dfrac{7}{2}$，$4\cos^2\dfrac{A}{2}-\cos 2A=\dfrac{7}{2}$，即$2+2\cos A-2\cos^2 A+1=\dfrac{7}{2}$，

则$\cos^2 A-\cos A+\dfrac{1}{4}=0$，$\cos A=\dfrac{1}{2}$，$A=60^\circ$.

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2+(3-b)^2-2b(3-b)\cos 60^\circ=3$，则$b^2-3b+2=0$，$b=1$或$b=2$.

$\therefore\begin{cases}b=1,\\c=2\end{cases}$或$\begin{cases}b=2,\\c=1.\end{cases}$

易错辨析：注意角B，C、边b，c的对称性，结果应为两解.

方法点评：本题的关键是利用已知条件转化到关于一个未知量的方程：(1) A，(2) b或c.

例 2 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$a$, b, c分别为角A, B, C所对的边.

(1) 求$t=\sin A+\sin B$时，t的取值范围；

(2) 化简：$\dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{abc}$（用(1)中的$t$表示）.

思路点拨：(1) 求值域应转化为$y=A\sin(\omega x+\theta)+k$的形式；(2) 注意$\sin A+\cos A$与$\sin A\cos A$的关系.

解：(1) $\because \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore \overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\therefore\triangle ABC$是直角三角形，$\therefore A+B=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore t=\sin A+\sin B=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\because A\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore t\in(1,\ \sqrt{2}]$.

(2) $\because b=c\cos A$，$a=c\sin A$，

$\therefore \dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{abc}=$

$$\frac{c^2\sin^2A(c\cos A+c)+c^2\cos^2A(c\sin A+c)+c^2(c\sin A+c\cos A)}{c^3\sin A\cos A}=\frac{t^2-t+2}{t-1},\ t\in(1,\ \sqrt{2}].$$

易错辨析：$t=\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$，求值域时应注意$A$的范围为$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

方法点评：注意整体思想的应用，将$\sin A+\cos A$看成整体，$\sin A\cos A$转化成整体的关系式.

【训练巩固】

1. 已知$\triangle ABC$的周长为9，且$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$，则$\cos C$的值为 (　　)

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

2. 设a, b, c分别是$\triangle ABC$中角A, B, C所对的边长，则直线l_1：$\sin A x+ay+c=0$与l_2：$bx-\sin By+c=0$的位置关系是 (　　)

A. 平行　　B. 垂直

C. 重合　　D. 相交但不垂直

3. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且在区间$(0,\ +\infty)$上单调递增，若$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$\triangle ABC$的内角满足$f(\cos A)<0$，则$A$的取值范围是 (　　)

A. $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$

C. $\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \pi\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \pi\right)$

4. 已知a, b, c分别是$\triangle ABC$中角A, B, C所对的边长，且$a=2\sqrt{3}$，$c=2$，$1+\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{2c}{b}$，则$\triangle ABC$的面积$S=$ ________.

5. 已知a, b, c分别是$\triangle ABC$中角A, B, C所对的边长，且$3a^2+3b^2-3c^2+2ab=0$，则$\tan C=$ ________.

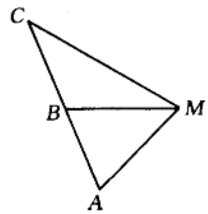
6. 在$\triangle ABC$中，边 AB 为最长边，且 $\sin A\sin B=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$，则 $\cos A\cos B$ 的最大值是______.

7. 在$\triangle ABC$中，a, b, c 分别是$\triangle ABC$中角 A, B, C 所对的边长，已知 $\tan A+\tan C=\sqrt{3}(\tan A\tan C-1)$，$b=\dfrac{7}{2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $a+c$ 的值.

8. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin B,\ 1-\cos B)$，且与向量 $\boldsymbol{n}=(2,\ 0)$所成角为$\dfrac{\pi}{3}$，其中 A, B, C 是$\triangle ABC$的内角.

(1) 求角 B 的大小；(2) 求 $\sin A+\sin C$ 的取值范围.

9. 如图，已知 A, B, C 是一条直路上的三点，AB 与 BC 的长均为 1 km，从三点分别遥望塔 M，在 A 处看见塔在北偏东 45°方向，在 B 处看见塔在正东方向，在点 C 处看见塔在南偏东 60°方向，求塔到直路 ABC 的最短距离.



（第 9 题）

第2章 数列

2.1.1 数列

【新知导读】

1. 数列可以看做是一个定义域为____________的函数.
2. 数列有几种分类方法？数列有几种表示方法？

3. 什么是数列的通项公式？

【范例点睛】

例 1 写出数列的一个通项公式,使得它的前 4 项分别是下列各数.

(1) 1, 3, 5, 7;

(2) $\frac{2^2-1}{2}$, $\frac{3^2-1}{3}$, $\frac{4^2-1}{4}$, $\frac{5^2-1}{5}$;

(3) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$;

(4) 1, −2, 3, −4;

(5) $-\frac{1}{1\times 2}$, $\frac{1}{2\times 3}$, $-\frac{1}{3\times 4}$, $\frac{1}{4\times 5}$.

思路点拨:已知数列的前几项,找出通项公式的办法是找出项与序号 n 的关系,可以从符号、大小变化、分式的结构等寻找规律.

例 2 已知有穷数列:3, 5, 7, 9, 11, …, $2m+7$ ($m\in \mathbf{N}^*$),其中每一项都比它的后一项小 2.

(1) 写出这个数列的通项公式;

(2) 指出 $4m+9$ ($m\in \mathbf{N}^*$) 是否是这个数列中的项,并说明理由.

思路点拨:看到此题目,可能有同学会认为题目错了,因为 $2m+7$ 应写成 $2m+1$ 才符合给出数列的变化规律;也可能有同学认为 $a_n=2n+7$ ($n\in \mathbf{N}^*$) 就是此数列的通项公式,这都是不对的.

这两种错误的一个共同点在于都没有区别有穷数列的通项和末项,数列的通项公式是第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系:$a_n=f(n)$,而有穷数列的末项未必是第 n 项,还要注意对有穷数列中 n 的范围的要求可能不仅是 $n\in \mathbf{N}^*$.

例 3 已知在数列$\{a_n\}$中,$a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$ ($n\in \mathbf{N}^*$),那么这个数列中的最大项与最小项