

度盘检验方法

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

古为今用，洋为中用。

我们的提高，是在普及基础上的提高；我们的普及，是在提高指导下的普及。

前 言

本文主要介绍了目前普遍使用的几种度盘刻度误差的检定方法，诸如“对称联系法”、“嵌入法”、“海威林克法”、“比较法”等，为了便于读者阅读和建立系统的概念，对度盘检定的一般知识，一些基本概念，如格线误差，直径误差，偏心误差及检定方法的原理和选择等等均作了介绍，为了便于读者在生产中运用度盘检定方法，本文还提供了具体使用上述几种方法的步骤和表格。

度盘刻度误差的检验是角度测量技术的一部份，近几年来发展很快，国内外研制了或正在研制具有自动对线读数，自动记录打印，及具有储存性能和数据自动运算的新型测角仪器，其测角元件有光栅，感应同步器和环形激光等，特别是环形激光的应用将对测角精度有个新的突破，但由于条件限制广泛应用于度盘测试还有困难，我们遵循伟大领袖毛主席的教导：“我们的提高，是在普及基础上的提高；我们的普及，是在提高指导下的普及。正因为这样，我们所说的普及工作不但不是妨碍提高，而且是给目前的范围有限的提高工作以基础，也是给将来的范围大为广阔的提高工作准备必要的条件。”

为此我们根据自己几年来积累的点滴经验并参考了一些文献编写成了“度盘检定方法”一文，供大家使用时参考，错误和不妥之处，敬请批评指正。

编 者

1975年8月

目 录

前 言

第一章 度盘检定中的一些概念.....(1)

1. 格线误差和直径误差
2. 偏心误差及其消除
3. 度盘刻画误差产生的主要原因及长周期误差和短周期误差
4. 直径误差总合的条件
5. 测定直径误差的原理和测定方法的选择
 - (1) 简单的常角分布法
 - (2) 嵌入法
 - (3) 对称联系法
6. 常角分布法检测结果的处理及直径误差近似值的权
 - (1) 常角分布法检测结果的处理
 - (2) 按常角布法检测所得直径误差近似值 ω_{Φ}^{2s} 的权

第二章 对称联系法.....(10)

1. 测量方法概述
2. 三个联系角法
 - (1) 联系角的选择及各个系列的观测
 - (2) 计算方法
3. 两个联系角法
 - (1) 选用 60° 及 45° 两个常角
 - (2) 选用 80° 及 72° 两个常角
4. 直径系统误差及直径偶然误差的简单求法
5. 举例
6. 格线误差 $\Delta(\varphi)$ 的确定

第三章 海威林克法.....(28)

1. 测量原理及直径系统误差的求法
2. 测量方法直径全中误差, 直径偶然中误差的计算步骤
3. 检定方法示例

第四章 维道任茨法(嵌入法).....(45)

1. 原理
2. 测量方法示例

第五章 单系列多次联系法(52)

第六章 相互比较法(62)

第七章 对称联系法检验度盘直径误差的工作步骤(69)

1. 前言

2. 联系角之选择

3. 观测的准备工作及其要求

4. 观测中的注意事项

5. 观测的程序

6. 观测结果的处理

第八章 海威林克法检定度盘直径误差的工作步骤(80)

1. 前言

2. 常角的选择

3. 观测前之准备工作及要求

4. 观测中的注意事项

5. 观测的程序及要求

6. 观测结果之处理

第九章 维道任茨法检定度盘直径误差的工作步骤(90)

1. 前言

2. 联系角的选择

3. 检定工作步骤

参考资料(94)

第一章 度盘检定中的一般概念

1. 格线误差和直径误差

度盘格线的刻制有两个要求：(1) 格线的间隔相等；(2) 格线的间隔等于指定的数据。当与要求不符时，则格线存在着误差，这种误差称为格线全误差。当度盘是圆刻度时，其中任何一根格线皆可作为起始格线，也可以作为最后一根格线。因而对度盘格线间隔的要求应严格地相等。

近代测角仪器的度盘，一般是用双向读数，即同时读出直径两端格线的数值，而取其平均值。因而在读数时，度盘上刻制误差的影响为直径两端格线误差的平均值，即所谓直径全误差。

如图 1 所示，在圆周上刻制的格线为 1、2、3、4、…，而它们的位置应为 x_1, x_2, x_3, x_4 时，则格线位置的误差决定于格线的直线偏移量 l_δ ；若用角度来代表则为 δ ，二者之间的关系是：

$$l_\delta = \frac{\delta'' r}{\rho''} \quad (1)$$

如图 2 所示， m 和 $m+180^\circ$ ； n 和 $n+180^\circ$ 为直径上的两条格线，它们的真正位置应为 $x-x$ ，由图 2 可很容易地看出，直径误差 (m) 和 (n) 应分别为 $-\frac{1}{2}(\delta_m + \delta_{m+180^\circ})$ 和

$$-\frac{1}{2}(\delta_n + \delta_{n+180^\circ})。$$

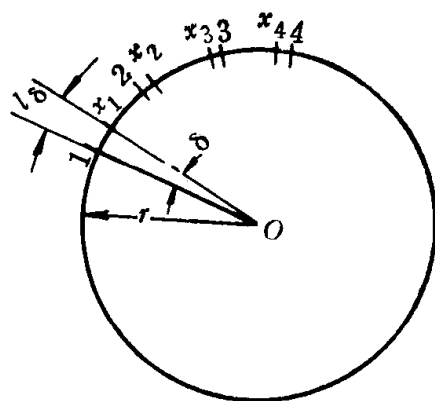


图 1

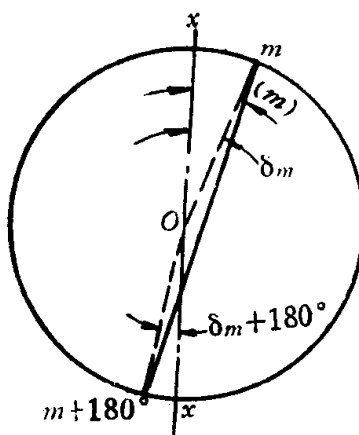
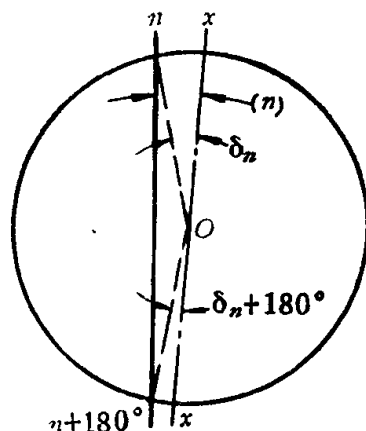


图 2



2. 偏心误差及其消除

当用度盘一边的格线读数时，分格的误差，同刻度圆对于读数设备旋转轴的偏心误差是分不开的。偏心过大时所造成的偏心误差，可能大于格线误差。如图 3 所示，C 为度盘

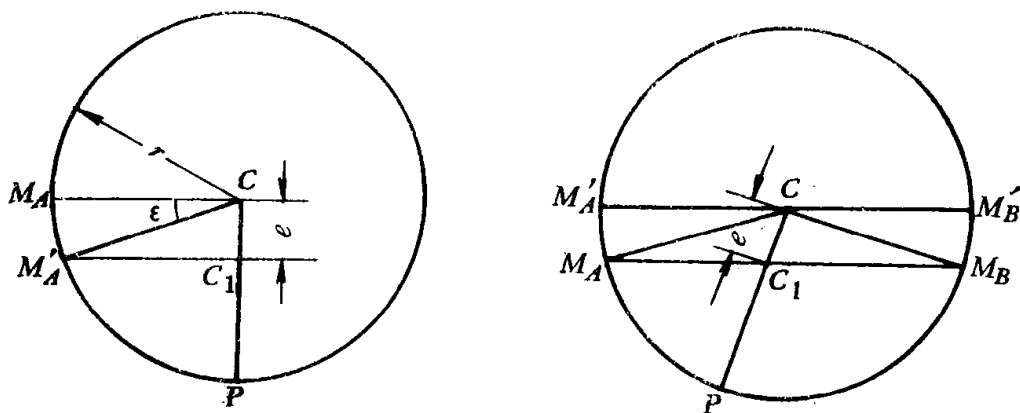


图 3

的刻度圆的中心， C_1 为读数设备的旋转中心，最大的偏心误差将为

$$\varepsilon'' = \frac{e}{r} \rho''$$

为了限制 ε'' 使之小于 $\delta''_{\max}$ ，必须减小偏心率 e ，因而对度盘的置中程度也提出了很高的要求。例如对于直径为140毫米的度盘，当刻线的误差不超过1.5秒时， l_s 应小于0.5微米， e 亦应小于0.5微米。这样高的置中程度是很难达到的，所以在精确的测角仪器上是在度盘的直径方向用相对应的两个读数设备来读数的，然后取其平均值。如不考虑其他因素，则由于偏心所产生的误差可以消除。其原因是：如图3所示， C 为度盘的刻度圆的中心， C_1 为读数设备的旋转中心， P 为 CC_1 连线的延长线与度盘刻度圆交点的读数，用直径相对应的两个显微镜读出的读数为 M_A 和 M_B ，假若没有偏心，其读数应为 M'_A 和 M'_B ，故在读数 M_A 上应该加上因偏心影响所产生的修正值 $M_A M'_A$ ，在 M_B 上应该加上 $M_B M'_B$ ；而

$$\begin{aligned} M_A M'_A &= \frac{e \cdot \sin(M_A - P)}{r} \rho'', \\ M_B M'_B &= \frac{e \cdot \sin(M_B - P + 180^\circ)}{r} \rho'' = -\frac{e \cdot \sin(M_A - P)}{r} \rho'' \\ &= -M_A M'_A, \quad \text{故 } M_A M'_A + M_B M'_B = 0. \end{aligned}$$

因此，采用直径相对应的两个显微镜读数，可以消除由度盘刻度圆中心和读数设备的旋转中心不相重合而产生的偏心误差。

3. 度盘刻划误差产生的主要原因、长周

期误差和短周期误差

度盘刻划误差产生的主要原因是：

- 1) 待刻划的度盘与标准齿盘的旋转中心不完全重合；
- 2) 待刻划的度盘与标准齿盘的平面不平行；
- 3) 标准齿盘的齿距不均匀和不够正确；
- 4) 刻刀的制造或安装不正确；
- 5) 在刻划过程中温度有变化。

由此所产生的刻划误差，有些是偶然性的，有些是系统性的。系统性部分，在度盘全

周上逐渐变化的,称为**长周期误差**。此外,由于

1) 扇形齿轮的偏心差;

2) 蜗轮蜗杆的偏心差;

3) 扇形齿轮的齿和蜗轮齿的误差,也使度盘刻划含有另一种系统性的误差,这一部分系统误差,在度盘的一小段弧上循环出现,称为**短周期误差**。

限于篇幅,本文将只讨论长周期误差的检定方法。

4. 直径误差总合的条件

度盘的格线误差是个周期性的函数,可以用傅利叶级数来表示:

$$\Delta(\varphi) = C_0 + C_1 \sin(\varphi + b_1) + C_2 \sin 2(\varphi + b_2) + C_3 \sin 3(\varphi + b_3) + \dots, \quad (2)$$

对径方向的格线误差为

$$\Delta(\varphi + 180^\circ) = C_0 + C_1 \sin(\varphi + b_1 + 180^\circ) + C_2 \sin 2(\varphi + b_2 + 180^\circ) + C_3 \sin 3(\varphi + b_3 + 180^\circ) + \dots$$

但直径系统误差为

$$x(\varphi) = \frac{1}{2} [\Delta(\varphi) + \Delta(\varphi + 180^\circ)].$$

将上式两式代入则得

$$x(\varphi) = C_0 + C_2 \sin 2(\varphi + b_2) + C_4 \sin 4(\varphi + b_4) + \dots \quad (3)$$

设有 S 根沿圆周均匀分布的直径,这些直径误差的总和将具有什么性质,是一个很重要的问题,兹研究如下。

沿圆周均匀分布的 S 条直径,其直径间隔角为 $\sigma = \frac{180^\circ}{S}$,其直径的系统误差以 $x(\varphi + i\sigma)$ 表示之,式中 $i = 0, 1, 2, \dots, S-1$,它们的平均值以 $x(N)$ 表示之:

$$\begin{aligned} x(N) &= \frac{1}{S} \{x(\varphi) + x(\varphi + \sigma) + x(\varphi + 2\sigma) + \dots + x(\varphi + (S-1)\sigma)\} \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{s-1} x(\varphi + i \cdot \sigma). \end{aligned}$$

从(3)式可知:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s-1} x(\varphi + i \cdot \sigma) &= S \cdot C_0 + C_2 \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \sin 2(\varphi + i \cdot \sigma + b_2) \\ &\quad + C_4 \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \sin 4(\varphi + i \cdot \sigma + b_4) + \dots \end{aligned}$$

式中除去常数项 C_0 以外,其他各项具有下列式形:

$$\begin{aligned} C_{2j} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \sin 2j(\varphi + i \cdot \sigma + b_{2j}) &= C_{2j} \cdot \sin 2j(\varphi + b_{2j}) \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \cos 2ij\sigma \\ &\quad + C_{2j} \cdot \cos 2j(\varphi + b_{2j}) \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \sin 2ij\sigma. \end{aligned}$$

$[\sin 2ij\sigma]^*$ 及 $[\cos 2ij\sigma]$ 中的 σ 角均匀分布在圆周上, 故以上两个总和分别为直角坐标上对纵轴和横轴的投影之和, 其值应等于零。但当 $i\sigma = \pi, 2\pi, \dots$ 时, 亦即当 $j = S, 2S, \dots$ 时, 则 $[\sin 2ij\sigma]$ 仍为零, 而 $[\cos 2ij\sigma]$ 则等于 S , 故得:

$$\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x(\varphi + i\sigma) = C_0 + C_{2S} \cdot \sin 2S(\varphi + b_{2S}) + C_{4S} \cdot \sin 4S(\varphi + b_{4S}) + \dots$$

C_0 项仅代表度盘起始位置整置的误差, 对角度测量来说, 可以认为等于零; 故在 S 足够多时, 可以认为:

$$\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x(\varphi + i \cdot \sigma) = 0. \quad (4)$$

又因直径全误差 $x_{\varphi+i\sigma} = x(\varphi + i\sigma) + \delta_{\varphi+i\sigma}$, 故

$$\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x_{\varphi+i\sigma} = \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x(\varphi + i \cdot \sigma) + \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} \delta_{\varphi+i\sigma}$$

式中 $\delta_{\varphi+i\sigma}$ 为直径误差的偶然部分, 按偶然误差的特性, 显然, 当 S 足够大时,

$$\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x_{\varphi+i\sigma} = 0 \quad (5)$$

故可得出如下结论: 当直径的条数 S 无限增多时, 其直径全误差的平均值为零, 亦即其总和为零。

5. 测定直径误差的原理和测定方法的选择

测定度盘直径误差的原理, 是以度盘直径的不同间隔和某一固定的角度进行比较测量的。这个固定的角度值 (常角) 为度盘刻度的 $\frac{1}{n}$, n 为整数。由比较的结果, 可以推算出度盘的直径误差。这个常角, 在度盘检查仪上是由可以换置并可以牢固固定的两对显微测微器构成的。在综合检验经纬仪或测角仪器时, 可以用两个固定的目标 (或两个固定的准直光管) 和仪器度盘回转中心构成一个固定角。

设有 S 根沿圆周均匀分布的直径, 其中有一条为直径 φ , 以直径 φ 为起始直径进行观测, 则该系统称为系列 φ , 以符号 $R(S, \varphi)$ 表示之, 此系列中的直径间隔为 $\frac{180^\circ}{S}$ 。有 S 条直径, 即 $\varphi, \varphi + \frac{180^\circ}{S}, \varphi + \frac{2 \times 180^\circ}{S}, \dots, \varphi + \frac{(S-1)180^\circ}{S}$ 。

例如系列 $R(9, 20)$ 有直径 $20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 160^\circ, 180^\circ$ 。

观测系列时, 如果采用的常角和系列中的直径间隔一致, 则由于度盘是圆刻度的特点, 将有下列关系:

设观测系列 $R(S, 0)$; 其起始直径为 $0, \frac{180}{S}, \frac{2 \times 180}{S}, \dots, \frac{(S-1)180}{S}$; 以

注 * [] 为高斯符号, 表示和的意思

序号 0, 1, 2, ..., (S-1) 表示之; 采用的常角为 $\frac{180}{S}$, 该常角的最或然值为 C; 并设 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{S-1}$ 为相应的各直径全误差, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{S-1}$ 为在各起始直径处测得 C 角的值。假如略去照准和读数等偶然误差, 可得下列各式:

$$\begin{aligned} A_0 + x_1 - x_0 &= C, \\ A_1 + x_2 - x_1 &= C, \\ A_2 + x_3 - x_2 &= C, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ A_{S-1} + x_0 - x_{S-1} &= C. \end{aligned}$$

然后将上列等式相加, 得

$$S \cdot C = \sum_{i=0}^{S-1} A_i,$$

所以

$$C = \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} A_i.$$

今以 $l_0 = C - A_0, l_1 = C - A_1, l_2 = C - A_2, \dots, l_{S-1} = C - A_{S-1}$ 代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_0 &= l_0, \\ x_2 - x_1 &= l_1, \\ x_3 - x_2 &= l_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_0 - x_{S-1} &= l_{S-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

从上式可以看出, $\sum_{i=0}^{S-1} l_i = 0.$ (7)

将 (6) 中各等式依次乘以 S、S-1、... 1 并相加, 得

$$-S \cdot x_0 + (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{S-1}) = S \cdot l_0 + (S-1)l_1 + \dots + l_{S-1},$$

$$\therefore x_0 = -\frac{1}{S} [S \cdot l_0 + (S-1)l_1 + (S-2)l_2 + \dots + l_{S-1}] + \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x_i. \quad (7a)$$

从 (5) 式可知, 当 S 足够多时, $\frac{1}{S} \sum_{i=0}^{S-1} x_i$ 等于零。今设

$$\omega_0 = -\frac{1}{S} [S \cdot l_0 + (S-1)l_1 + (S-2)l_2 + \dots + l_{S-1}], \quad (7b)$$

则当 S 逐渐增多时, ω_0 可以极近似地等于 x_0 。按类似的方法, 可以推导出 $x_1, x_2, \dots, x_{S-1}$ 的近似值 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{S-1}$, 即得下列等式:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= -\frac{1}{S} \{S \cdot l_0 + (S-1)l_1 + (S-2)l_2 + \cdots + l_{s-1}\}, \\
\omega_1 &= -\frac{1}{S} \{l_0 + S \cdot l_1 + (S-1)l_2 + \cdots + 2l_{s-1}\}, \\
\omega_2 &= -\frac{1}{S} \{2l_0 + l_1 + S \cdot l_2 + (S-1)l_3 + \cdots + 3l_{s-1}\}, \\
&\dots\dots\dots \\
\omega_{s-1} &= -\frac{1}{S} \{(S-1)l_0 + (S-2)l_1 + \cdots + l_{s-2} + S \cdot l_{s-1}\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

观测系列时，如果采用的常角为系列中直径间隔的整倍数，其值除 180° 之商不为整数时，这类系列称为**等效系列**，也具有(6)~(8)式的性质，可以用(8)式计算直径全误差的近似值。例如系列 $R(9,0)$ ，观测时采用的常角 C 为 40° 或 80° ，观测系列以新符号 $R(9,0)_{40}$ ， $R(9,0)_{80}$ 表示之，它是系列 $R(9,0)$ 的等效系列。相反，如果观测系列时所采用的常角不与系列中的直径间隔相一致，也不是等效系列，例如 $R(9,0)_{45}$ ，在观测

结果中便没有 $\sum_{i=0}^{s-1} l_i = 0$ 的条件，也就不能应用公式(8)去解算直径全误差。

按上述原理测定直径误差的方法可以分为两类，即**常角法**和**常角分布法**。常角法所选用的观测常角为任意角，而常角分布法选用的观测常角，必须等于系列的直径间隔或为等效系列的直径间隔。常用的常角法有海威林克法等，常角分布法：有**嵌入法**（如维道任茨法），**对称联系法**（如耶利谢也夫法）等。

(1) 简单的常角分布法 它是以系列的观测成果加入直径误差的总和为零的条件，算出直径误差的方法。如果观测中不是测定常角的角值，而是将常角和一已知直径误差的标准器相比较，直接量得直径间隔误差的方法，称为**比较法**。

由于常角的不稳定和检测成果的精度不均匀，用简单的常角分布法时，其直径条数不宜过多，最多为12条。比较法则为不大于20条。为了弥补这一缺陷，经改进后，便有**嵌入法**（较简单的常角分布法好些，但也有上述缺点）和**对称联系法**等。

(2) 嵌入法 它首先以待测直径间隔的倍角为固定角（即常角），按常角分布法测定其相应的直径误差作为控制直径，这种系列称为**控制系列**。然后以待测直径间隔为常角，在控制直径中再按常角分布法进行测算，这种系列称为**嵌入系列**。控制系列观测较多的系列测回。控制系列和嵌入系列中所选用的观测常角，应各在其相应的系列中容纳4~6倍，这样，直径条数不宜大于36条。

(3) 对称联系法 它是在系列 $R(S, \varphi)$ 中寻求两个联系系列，如 $R(p, \varphi)$ 及 $R(q, \varphi)$ ，其中 $p \cdot q = S$ ， p 和 q 不得互成倍数。也可以寻求三个联系系列，如 $R(p, \varphi)$ ， $R(q, \varphi)$ 及 $R(\gamma, \varphi)$ ，其中 $p \cdot q \cdot \gamma = S$ ；同样， p 、 q 、 γ 不得互成倍数。各个系列中的常角（又称为联系角）为 $\sigma_1 = \frac{180^\circ}{p}$ ， $\sigma_2 = \frac{180^\circ}{q}$ 。及 $\sigma_3 = \frac{180^\circ}{\gamma}$ ，联系角不宜小于 20° 或大于 90° （此处所要研究的直径间隔为 $\sigma = \frac{180^\circ}{S}$ ）。

各个常角至少观测 $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ 、 $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ 、 $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ 个系列，或者都观测 $\frac{180}{\sigma}$ 个系列，所有的观测值按一定的计算方法，算出各个直径的直径误差。详细计算方法将于第二节中的讨论。

6. 常角分布法检测结果的处理及直径误差近似值的权

(1) 常角分布法检测结果的处理 由上述常角分布法测量所得的直径误差，均为直径全误差的改正数，用作图法描绘出平滑曲线，即可得出直径系统误差的改正数，折线(即全误差的改正数的曲线)与平滑曲线的差，即为偶然误差。假如需要，也可以计算下列级数的系数：

$$X_{(\varphi)} = a_0 + a_2 \cdot \cos 2\varphi + a_4 \cdot \cos 4\varphi + a_6 \cdot \cos 6\varphi + \cdots b_2 \cdot \sin 2\varphi + b_4 \cdot \sin 4\varphi + b_6 \cdot \sin 6\varphi + \cdots \quad (9)$$

因直径偶然误差 $\delta_\varphi = X_\varphi - X_{(\varphi)}$

所以

$$\delta_\varphi = X_\varphi - (a_0 + a_2 \cdot \cos 2\varphi + a_4 \cdot \cos 4\varphi + a_6 \cdot \cos 6\varphi + \cdots + b_2 \cdot \sin 2\varphi + b_4 \cdot \sin 4\varphi + b_6 \cdot \sin 6\varphi + \cdots)$$

依次将 $\phi = 0, \sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots, (S-1)\sigma$ 代入上式，得 S 个误差方程式如下：

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= X_0 - (a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) \\ \delta_\sigma &= X_\sigma - (a_0 + a_2 \cdot \cos 2\sigma + a_4 \cdot \cos 4\sigma + a_6 \cdot \cos 6\sigma + \cdots \\ &\quad + b_2 \cdot \sin 2\sigma + b_4 \cdot \sin 4\sigma + b_6 \cdot \sin 6\sigma + \cdots) \\ \delta_{(S-1)\sigma} &= X_{(S-1)\sigma} - [a_0 + a_2 \cdot \cos 2(S-1)\sigma \\ &\quad + a_4 \cdot \cos 4(S-1)\sigma + \cdots + b_2 \cdot \sin 2(S-1)\sigma \\ &\quad + b_4 \cdot \sin 4(S-1)\sigma + \cdots] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

求 (10) 式的法方程式如下：

$$\begin{aligned} [X_{i\sigma}] - S \cdot a_0 - [\cos 2i\sigma]a_2 - [\cos 4i\sigma]a_4 - [\cos 6i\sigma]a_6 - \\ [\sin 2i\sigma]b_2 - [\sin 4i\sigma]b_4 - [\sin 6i\sigma]b_6 - \cdots &= 0, \\ [X_{i\sigma} \cdot \cos 2i\sigma] - a_0[\cos 2i\sigma] - a_2[\cos^2 2i\sigma] - a_4[\cos 2i\sigma \cdot \cos 4i\sigma] \\ - a_6[\cos 2i\sigma \cdot \cos 6i\sigma] - b_2[\cos 2i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] - b_4[\cos 2i\sigma \cdot \sin 4i\sigma] \\ - b_6[\cos 2i\sigma \cdot \sin 6i\sigma] - \cdots &= 0, \\ [X_{i\sigma} \cdot \cos 4i\sigma] - a_0[\cos 4i\sigma] - a_2[\cos 4i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] - a_4[\cos^2 4i\sigma] - \\ a_6[\cos 4i\sigma \cdot \cos 6i\sigma] - b_2[\cos 4i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] - b_4[\cos 4i\sigma \cdot \sin 4i\sigma] - \\ b_6[\cos 4i\sigma \cdot \sin 6i\sigma] - \cdots &= 0, \\ [X_{i\sigma} \cdot \cos 6i\sigma] - a_0[\cos 6i\sigma] - a_2[\cos 6i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] \\ - a_4[\cos 6i\sigma \cdot \cos 4i\sigma] - a_6[\cos^2 6i\sigma] - b_2[\cos 6i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] \\ - b_4[\cos 6i\sigma \cdot \sin 4i\sigma] - b_6[\cos 6i\sigma \cdot \sin 6i\sigma] - \cdots &= 0, \\ [X_{i\sigma} \cdot \sin 2i\sigma] - a_0[\sin 2i\sigma] - a_2[\sin 2i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] \\ - a_4[\sin 2i\sigma \cdot \cos 4i\sigma] - a_6[\sin 2i\sigma \cdot \cos 6i\sigma] - b_2[\sin^2 2i\sigma] \\ - b_4[\sin 2i\sigma \cdot \sin 4i\sigma] - b_6[\sin 2i\sigma \cdot \sin 6i\sigma] - \cdots &= 0, \\ [X_{i\sigma} \cdot \sin 4i\sigma] - a_0[\sin 4i\sigma] - a_2[\sin 4i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_4[\sin 4i\sigma \cdot \cos 4i\sigma] - a_6[\sin 4i\sigma \cdot \cos 6i\sigma] - b_2[\sin 4i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] \\
& -b_4[\sin^2 4i\sigma] - b_6[\sin 4i\sigma \cdot \sin 6i\sigma] - \dots = 0, \\
& [X_{i\sigma} \cdot \sin 6i\sigma] - a_0[\sin 6i\sigma] - a_2[\sin 6i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] \\
& -a_4[\sin 6i\sigma \cdot \cos 4i\sigma] - a_6[\sin 6i\sigma \cdot \cos 6i\sigma] - b_2[\sin 6i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] \\
& -b_4[\sin 6i\sigma \cdot \sin 4i\sigma] - b_6[\sin^2 6i\sigma] - \dots = 0.
\end{aligned}$$

因 σ 均匀分布于半周之内, 故存在下列关系:

$$[\sin 2i\sigma] = [\sin 4i\sigma] = [\sin 6i\sigma] = [\cos 6i\sigma] = [\cos 4i\sigma] = [\cos 2i\sigma] = 0.$$

又因

$$\sin 2i\sigma \cdot \cos 2i\sigma = \frac{1}{2} \sin 4i\sigma,$$

$$\sin 4i\sigma \cdot \cos 2i\sigma = \frac{1}{2}(\sin 6i\sigma + \sin 2i\sigma) \cos 4i\sigma \cdot \sin 2i\sigma = \frac{1}{2}(\sin 6i\sigma - \sin 2i\sigma), \dots,$$

故

$$[\sin 2i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] = [\cos 4i\sigma \cdot \sin 2i\sigma] = [\sin 4i\sigma \cdot \cos 2i\sigma] = \dots = 0.$$

又因

$$\sin^2 2i\sigma = \frac{1}{2}(1 - \cos 4i\sigma),$$

$$\text{故 } [\sin^2 2i\sigma] = \frac{1}{2} [1 - \cos 4i\sigma] = \frac{S}{2}, \text{ 同理, 可推得:}$$

$$[\sin^2 2i\sigma] = [\sin^2 4i\sigma] = [\sin^2 6i\sigma] = [\cos^2 2i\sigma] = [\cos^2 4i\sigma] = [\cos^2 6i\sigma] = \frac{S}{2}$$

故上式可以化简为:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{S} [X_{i\sigma}], \\
\frac{S}{2} a_2 &= [X_{i\sigma} \cdot \cos 2i\sigma], \quad \frac{S}{2} b_2 = [X_{i\sigma} \cdot \sin 2i\sigma], \\
\frac{S}{2} a_4 &= [X_{i\sigma} \cdot \cos 4i\sigma], \quad \frac{S}{2} b_4 = [X_{i\sigma} \cdot \sin 4i\sigma], \\
\frac{S}{2} a_6 &= [X_{i\sigma} \cdot \cos 6i\sigma], \quad \frac{S}{2} b_6 = [X_{i\sigma} \cdot \sin 6i\sigma],
\end{aligned} \tag{11}$$

由 (11) 式可求出级数 (9) 的各项系数, 由此即可求出任意直径的系统误差。

(2) 按常角分布法检测所得直径误差近似值 ω_{Φ}^{2S} 的权

由式 (8) 知:

$$\omega_{\Phi}^{2S} = \frac{-1}{S} \{S \cdot l_{\Phi}^{2S} + (S-1) l_{\Phi+\sigma}^{2S} + \dots + l_{\Phi+(S-1)\sigma}^{2S}\} \tag{12}$$

以 $l_{\Phi+i\sigma}^{2S} = \frac{1}{S} [A] - A_i$ 代入 (12) 式并化简之, 得 (A_i 为各个位置观测所得之角度值):

$$\begin{aligned}
\omega_{\Phi}^{2S} &= \frac{1}{2S} \{ (S-1)A_0 + (S-3)A_1 + (S-5)A_2 + \dots \\
&\quad - (S-3)A_{S-2} - (S-1)A_{S-1} \}
\end{aligned} \tag{13}$$

由最小二乘法知, 任意线性方程式为:

$$x = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n。$$

对于各个变数 z , $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的权为 $p_z, p_1, p_2, \cdots p_n$, 则存在有下列关系:

$$\frac{1}{p_x} = a_1^2 \frac{1}{p_1} + a_2^2 \frac{1}{p_2} + a_3^2 \frac{1}{p_3} + \cdots + a_n^2 \frac{1}{p_n}。 \quad (14)$$

设常角的观测值 A_i 的权为单位权, 直径误差近似值 ω_{φ}^{2s} 的权为 $P_{\omega_{\varphi}^{2s}}$, 则由 (13)(14) 式得:

$$\frac{1}{P_{\omega_{\varphi}^{2s}}} = \frac{1}{2S^2} \{ (S-1)^2 + (S-3)^2 + (S-5)^2 + \cdots + (1^2 \text{ 或 } 2^2) \}$$

上式中括号内最后一项, 当 S 为偶数时, 为 1^2 , 当 S 为奇数时, 为 2^2 , 但 $(S-1)^2 + (S-3)^2 \cdots + (1^2 \text{ 或 } 2^2)$ 无论当 S 为偶数或奇数时, 其和均为 $\frac{1}{6} S(S+1)(S-1)$, 故得:

$$\frac{1}{P_{\omega_{\varphi}^{2s}}} = \frac{1}{2S^2} \cdot \frac{S(S+1)(S-1)}{6} = \frac{S^2-1}{12S}，$$

故

$$P_{\omega_{\varphi}^{2s}} = \frac{12S}{S^2-1}。 \quad (15)$$

第二章 对称联系法

1. 测量方法概述

该方法按检定时所选联系角的个数不同，又分为三个联系角及两个联系角。

在检验时，将度盘安装在度盘检查仪上，调整度盘刻度表面使其垂直于度盘检查仪的旋转轴，用千分表调整使其偏差小于 5μ ；然后调整度盘中心与旋转轴轴线重合，可先用一个显微镜根据度盘基圆或刻划线端点进行粗调；然后用一对显微镜在度盘对径方向用压线法进行细调，使其偏心量小于 1μ ；最后将显微镜按所选常角紧固，即两对显微镜所组成的直径夹角等于所选常角，即可开始测量读数。测量时对每个系列测回按往测与返测进行（即完成一个测回），往测时自该系列的第一个角至第末个角分别在四个显微镜上作两次对线读数；返测时按相返的顺序自该系列的最末个角至第一个角在每个显微镜上作两次对线读数，将各个常角的各个系列按往返测量，测完以后即可进行计算，计算方法和系列的选择详述于后：

2. 三个联系角法

该方法测量精度较高可用来检定精度较高的度盘，我国三角测量细则中亦规定 $TT2''/6''$ 等高精度仪器度盘要用该方法检定。

（1）联系角的选择及各个系列的观测：

如检验每隔 3° 的度盘直径，即直径条数 $S = \frac{180}{3} = 60$ ，联系角可选用 $36^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ，即：

$p = \frac{180}{36} = 5$ ， $q = \frac{180}{45} = 4$ ， $\gamma = \frac{180}{60} = 3$ 显然符合 $p \times \gamma \times q = S$ 的条件。同时， p, q, γ 不互成倍数；且 $36^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 均能被 3° 除尽。

对于每个常角 c ，测量 $\frac{c}{3}$ 个系列，即对于 36° 常角，共 12 个系列， 45° 常角共 15 个系列， 60° 常角共 20 个系列，兹列出如下：

常角 36° 的各个系列的度盘起始整置位置为：

$R(5, 0): 0^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$

$R(5, 3): 3^\circ, 39^\circ, 75^\circ, 111^\circ, 147^\circ$

.....

.....

$R(5, \varphi): \varphi^\circ, \varphi + 36, \varphi + 72, \varphi + 108, \varphi + 144$

.....

.....

$R(5, 33): 33^\circ, 69^\circ, 105^\circ, 141^\circ, 177^\circ$

共12个系列

常角为 45° 的各个系列的度盘起始整置位置为:

$$\left. \begin{array}{l} R(4, 0): 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ \\ R(4, 3): 3^\circ, 48^\circ, 93^\circ, 138^\circ \\ \dots\dots\dots \\ R(4, \varphi): \varphi, \varphi + 45^\circ, \varphi + 90^\circ, \varphi + 135^\circ, \\ \dots\dots\dots \\ R(4, 42): 42^\circ, 87^\circ, 132^\circ, 177^\circ \end{array} \right\} \text{共15个系列}$$

常角为 60° 的各个系列的度盘起始整置位置为:

$$\left. \begin{array}{l} R(3, 0): 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ \\ R(3, 3): 3^\circ, 63^\circ, 123^\circ \\ \dots\dots\dots \\ R(3, \varphi): \varphi, \varphi + 60, \varphi + 120 \\ \dots\dots\dots \\ R(3, 57): 57^\circ, 117^\circ, 177^\circ \end{array} \right\} \text{共20个系列}$$

(2) 计算方法:

现将测量结果的计算方法介绍如下:

对于常角 $c_1 = 36^\circ$ 各个系列中测量计算所得 c_1 角的值为 A_φ^{10} , $A_{\varphi+36}^{10}$, $A_{\varphi+72}^{10}$, $A_{\varphi+144}^{10}$, 相应的直径全误差为: (φ) , $(\varphi + 36)$, $(\varphi + 72)$, $(\varphi + 144)$

今以 $\varphi = 0^\circ$ 为例参考公式(6)得下列各式:

$$\begin{aligned} (36) - (0) &= \frac{[A]}{5} - A_0^{10} = l_0^{10} \\ (72) - (36) &= \frac{[A]}{5} - A_{36}^{10} = l_{36}^{10} \\ (108) - (72) &= \frac{[A]}{5} - A_{72}^{10} = l_{72}^{10} \\ (144) - (108) &= \frac{[A]}{5} - A_{108}^{10} = l_{108}^{10} \\ (0) - (144) &= \frac{[A]}{5} - A_{144}^{10} = l_{144}^{10} \end{aligned}$$

l 的上指数表示整个圆周内所含定角的个数, 下指数表示度盘的起始整置位置, 从公式(7a)可得:

$$\begin{aligned} (0) = & -\frac{1}{5} (5 l_0^{10} + 4 l_{36}^{10} + 3 l_{72}^{10} + 2 l_{108}^{10} + l_{144}^{10}) + \frac{1}{5} [(0) + (36) \\ & + (72) + (108) + (144)] \end{aligned}$$

又因 $\sum l_\varphi^{10} = 0$, 故上式可简化为:

$$(0) = -\frac{1}{5}(-2l_0^{10} - l_{36}^{10} + l_{108}^{10} + 2l_{144}^{10}) + \frac{1}{5}[(0) + (36) + (72) + (108) + (144)] \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{今设 } \frac{1}{5}(-2l_0^{10} - l_{36}^{10} + l_{108}^{10} + 2l_{144}^{10}) &= \omega_0^{10} \\ \frac{1}{5}[(0) + (36) + (72) + (108) + (144)] &= R_0^{10} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

故(16)式可写成:

$$(0) = \omega_0^{10} + R_0^{10} \quad (18)$$

对于度盘开始读数为 φ 的任何一条直径的全误差应为:

$$(\varphi) = \omega_\varphi^{10} + R_\varphi^{10} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中: } \omega_\varphi^{10} &= -\frac{1}{5}(-2l_\varphi^{10} - l_{\varphi+36}^{10} + l_{\varphi+108}^{10} + 2l_{\varphi+144}^{10}) \\ R_\varphi^{10} &= \frac{1}{5}[(\varphi) + (\varphi+36) + (\varphi+72) + (\varphi+108) + (\varphi+144)] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

根据上述计算所得各系列之 ω_φ^{10} , 并设:

$$\omega_\varphi^{10.6} = \frac{\omega_\varphi^{10} + \omega_{\varphi+60}^{10} + \omega_{\varphi+120}^{10}}{3} \quad (21)$$

式中 $\omega_\varphi^{10.6}$ 的上指数10说明该系列所用常角的大小, 6说明在那一种起始整置位置选取 ω_φ^{10} , (此处为每隔 $\frac{360}{6}=60^\circ$ 选出), 根据公式(21)计算出所有每隔 3° 的 $\omega_\varphi^{10.6}$ (与 ω_φ^{10} 的个数相同, 即 $\varphi=0, 3, 6, \dots, 177$ 共60个), 今以 $\omega_0^{10.6}$ 为例计算如下:

$$\omega_0^{10.6} = \frac{\omega_0^{10} + \omega_{60}^{10} + \omega_{120}^{10}}{3} \text{ 从(19)式可知:}$$

$$\omega_0^{10} = (0) - R_0^{10} = (0) - \frac{1}{5}[(0) + (36) + (72) + (108) + (144)]$$

$$\omega_{60}^{10} = (60) - R_{60}^{10} = (60) - \frac{1}{5}[(60) + (96) + (132) + (168) + (24)]$$

$$\omega_{120}^{10} = (120) - R_{120}^{10} = (120) - \frac{1}{5}[(120) + (156) + (12) + (48) + (84)]$$

三式相加并除以3, 得:

$$\omega_0^{10.6} = \frac{1}{3}[(0) + (60) + (120)] - \frac{1}{15}[(0) + (12) + (24) + \dots + (168)]$$

采取与(17)式相类似的符号得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}[(0) + (60) + (120)] &= R_0^6 \\ \frac{1}{15}[(0) + (12) + (24) + \dots + (168)] &= R_0^{30} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

故可以将 $\omega_0^{10.6}$ 写成以下形式:

$$\omega_0^{10.6} = R_0^6 - R_0^{30} \quad (23)$$

一般形式为:

$$\omega_\varphi^{10.6} = R_\varphi^6 - R_\varphi^{30} \quad (24)$$