文登学校数学辅导材料系列之二

高等数学试题分析及解答

（理工类）

（1987年—2004年全国硕士研究生考试试题）

北 京 文 登 培 训 学 校

文艺学校办学宗旨：

高质量

高水平

高信誉

陈文何

目　　录

* **数学二不作要求.**

第一章 函数、极限与连续

一、填空题

1. (1987 数学二) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$ $\underline{\quad e^{-3}\quad}$.

【解】 原式 $=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}-1\right)n\right]=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n}{n+1}\right]=e^{-3}$.

$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t[(1+\frac{1}{x})^x]^{2t}=$

2. (1988 数学一、二) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$ $\underline{\quad (2t+1)e^{2t}\quad}$.

【解】 $f(t)=t\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2tx}{x}\right)=te^{2t}$,故 $f'(t)=(2t+1)e^{2t}$.

3. (1988 数学二) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

【解】 原式 $=\exp\left(\lim\limits_{x\to+0}\tan x\cdot\ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}x\ln x\right)$

$=e^0=1$. [式中用了 $\tan x\sim x$.]

4. (1988 数学二) 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,则 $a=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to+0}e^x(\sin x+\cos x)=1$, $\lim\limits_{x\to-0}(2x+a)=a$,得 $a=1$.

5. (1989 年数学二) 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{\quad a=b\quad}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to-0}(a+bx^2)=a$, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin bx}{x}=b$,得知 $a=b$.

6. (1989 数学二) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2}\quad}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$. [$\tan 2x\sim 2x$]

7. (1990 数学一) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ $\underline{\quad e^{2a}\quad}$.

【解】 原式 $=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}-1\right)x\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{x-a}\right]=e^{2a}$.

8. (1990 数学一、二) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

【解】 由于对任意实数 x 均有 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$.

9.(1991 数学一)　已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ $\underline{-\frac{3}{2}}$.

【解】　由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$，得 $a=-\dfrac{3}{2}$.

10.(1991 数学二)　$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ $\underline{-1}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{e^{1/x}}-1\right)\Big/\left(\dfrac{x}{e^{1/x}}+1\right)=-1$.

11.(1992 数学二)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ $\underline{0}$.

$(1+\alpha)^{\alpha}-1\sim\alpha$　e^x-1

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$.　$\left[\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2\right]$

12.(1993 数学二)　$\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$ $\underline{0}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$.

13.(1994 数学一)　$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\frac{1}{6}}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

14.(1994 数学二)　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ $\underline{-2}$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

【解】　由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}=2+2a$，再由连续性，$2+2a=a$，解得 $a=-2$.

15.(1995 数学一)　$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ $\underline{e^6}$.

【解】　原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}3x\cdot\dfrac{2}{\sin x}\right\}=e^6$.

16.(1995 数学二)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

【解】　根据夹逼定理，有

$$\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

对 i 从 1 至 n 求和，得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+n+i} \leqslant \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

令 $n \to \infty$，两端数学式的极限均为$\frac{1}{2}$，故所求极限为$\frac{1}{2}$. $e^{\lim x\ln(1+\frac{3a}{x-a})} =$

17.(1996 数学一) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$，则 $a =$ $\underline{\quad \ln 2 \quad}$.

【解】 左边 $= \exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}-1\right)\cdot x\right\} = e^{3a} = 8$，故 $a = \ln 2$.

18.(1996 数学二) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x}) - \sin\ln(1+\frac{1}{x})\right] =$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

【解】 原式$\xlongequal{t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t} - \cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right] = 2.$$

19.(1997 数学一) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} =$ $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$.

$2\cos^2\frac{x}{2}$

【解】 原式 $= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x} + \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$.

20.(1997 数学二) 已知 $f(x) = \begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, & x \neq 0,\\ a, & x = 0\end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ $\underline{\quad e^{-\frac{1}{2}} \quad}$.

【解】 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.［是 1^∞ 型极限.］

21.(1998 数学一、二) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} =$ $\underline{\quad -\frac{1}{4} \quad}$.

【解】 原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-(1+x)}{4x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4}.$$

22.(1999 数学一) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right) =$ $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$.

【解】 原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

23.(2000 数学二) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ $\underline{\quad -\frac{1}{6} \quad}$.

$(1+x^2)^{-1}-1$

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2} = -\frac{1}{6}$.

24.（2001 数学二） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ $\underline{-\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

25.（2002 年数学二） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$

$\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}}$.

【解】 原式 $=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x}\,dx=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

26.（2002 数学二） 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{-2}$.

【解】 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2.$

27.（2003 年数学一） $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$,

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$,

故 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

28.（2003 年数学二） 若 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ $\underline{-4}$.

【解】 当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\dfrac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$.

于是，根据题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}a=1$，故 $a=-4$.

29.（2004 年数学二） 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ $\underline{0}$.

【解】 显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$，

所以 $$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases},$$

因为 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\neq f(0)$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

二、选择题

1.(1987 数学二) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数. 【D】

【解】 $|x\sin x|$,$e^{\cos x}$ 均为偶函数,其乘积仍为偶函数.故选 D.

2.(1987 数学二) 函数 $f(x)=x\sin x$

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大. (B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. (D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限. 【C】

【解】 当取 $x_n=n\pi$ 时,$f(n\pi)=0$;当取 $x_n=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f(x_n)\to\infty$.故选 C.

3.(1988 年数学一、二) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

$f(\varphi(x))=e^{\varphi(x)}=1-x>0$ $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

【解】 由 $e^{\varphi(x)^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$.因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,$x\leqslant 0$.

4.(1990 数学二) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq 0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点. (B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点. (D) 连续点或间断点不能由此确定. 【B】

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)\neq 0=f(0)=F(0)$,故选 B.

5.(1990 数学二) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则

$\dfrac{x^2-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$ $1-a=0$

(A) $a=1,b=1$. (B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=1,b=-1$. (D) $a=-1,b=-1$. 【C】

【解】 由题设,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$,必有 $1-a=0$,$a+b=0$,得 $a=1,b=-1$.故选 C.

6.(1992 年数一、二) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0.

(C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞. 【D】

【解】 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1-0}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\times0=0$，

而 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1+0}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$. 故选 D.

7. (1992 数学二) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$ 【D】

【解】 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0.\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$ 故选 D.

8. (1992 数学二) 当 $x\to0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小. 【B】

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x}{2x}=\dfrac{\sin x}{2x}\neq0$

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$，故选 B.

9. (1993 数学二) 当 $x\to0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小. (B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小量. (D) 无界的，但不是无穷大. 【D】

【解】 当取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 时，$f(x_n)=0$；当取 $x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ 时，$f(x_n)\to\infty$. 故选 D.

10. (1994 数学一) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则必有

$\dfrac{ax}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}$

(A) $b=4d$. (B) $b=-4d$. (C) $a=4c$. (D) $a=-4c$. 【D】

【解】 根据洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sec^2x+b\sin x}{\dfrac{-2c}{1-2x}+2dxe^{-x^2}}=2$，即 $-\dfrac{a}{2c}=2$，得 $a=-4c$. 故选 D.

11. (1994 数学二) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则

(A) $a=1, b=-\dfrac{5}{2}$. (B) $a=0, b=-2$.

(C) $a=0, b=-\dfrac{5}{2}$. (D) $a=1, b=-2$. 【A】

【解】 根据洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2$. 因为分子的极限为 0，所以得 $a=1$. 再用一次洛必达法则，并取极限得 $\dfrac{-1-2b}{2}=2$，因此 $b=-\dfrac{5}{2}$. 故选 A.

12.(1995 数学二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.　　【D】

【解】 若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 为连续函数，则 $\varphi(x)=f(x)F(x)$ 必连续. 矛盾. 故选 D.

13.(1996 数学二) 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$.　　(B) $a=1,b=1$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.　　(D) $a=-1,b=1$.　　【A】

【解】 由题意，$0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2a}{2}$，于是有 $\dfrac{1}{2}-a=0$，得 $a=\dfrac{1}{2}$. 又由 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-2ax-b)=0$，得 $b=1$，因此选 A.

14.(1997 数学二) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　【D】

【解】 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & x>0,\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0,\end{cases}$ 故选(D).

15.(1997 数学二) 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　【C】

【解】 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^{3-n}.$$

为使此极限等于常数，只能 $n=3$. 故选 C.

16.(1998 数学二) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.　　【D】

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$ 知，y_n 必为无穷小，故选 D.

取 $x_n=(-1)^n$，$y_n=0$，可排除 A. 取 $x_n=1,0,3,0,5,0,\cdots$. 又取 $y_n=0,2,0,4,0,6,\cdots$，可排除 B. 取 $x_n=0$，$y_n=1$，可排除 C.

17.(1999 数学二) “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.　　**【C】**

【解】 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义是:"对任意给定的正数 ε_1,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$."可以证明,这个定义与题中带引号的叙述是等价的.故选 C.

18. **(2000 数学二)**　若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.　　**【C】**

【解】
$$原式 = \lim_{x\to0}\frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\left[\frac{6x - \sin6x}{x^3} + \frac{\sin6x + xf(x)}{x^3}\right]$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{6-6\cos6x}{3x^2} + 0 = \lim_{x\to0}\frac{36\sin6x}{6x} = 36.$$

19. **(2000 数学二)**　设函数 $f(x) = \dfrac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,则常数 a, b 满足

(A)$a < 0, b < 0$.　　(B)$a > 0, b > 0$.

(C)$a \leqslant 0, b > 0$.　　(D)$a \geqslant 0, b < 0$.　　**【D】**

【解】 当 $b > 0$ 且 $x \to -\infty$ 时,$e^{bx} \to 0$,从而 $f(x) \not\to 0$,因此 $b < 0$,排除 B 和 C. 又因为 $e^{bx} > 0$,为使 $f(x) = \dfrac{x}{a + e^{bx}}$ 到处连续,只能 $a \geqslant 0$. 故选 D.

20. **(2001 数学二)**　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0.　　(B)1.

(C)$\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$　　(D)$\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$　　**【B】**

【解】 $f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1$. 故选(B).

21. **(2001 数学二)**　设当 $x \to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　**【B】**

【解】 因为 $(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \dfrac{1}{2}x^4$,$x\sin x^n \sim x^{n+1}$,$e^{x^2} - 1 \sim x^2$,所以 $n+1 = 3$,故选 B.

22. **(2002 数学二、四)**　设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是

(A)$\int_0^x f(t^2)\,dt$.　　(B)$\int_0^x f^2(t)\,dt$.

(C)$\int_0^x t[f(t) - f(-t)]\,dt$.　　(D)$\int_0^x t[f(t) + f(-t)]\,dt$.　　**【D】**

【解】 取 $f(x) = x$,选项 A、B 的积分为
$$\int_0^x t^2\,dt = \frac{1}{3}x^3(奇函数).$$
选项 C 的积分为
$$\int_0^x 2t^2\,dt = \frac{2}{3}x^3(奇函数).$$

故选 D. 实际上，令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，使用定积分的变量代换 $t=-u$，容易证明 $F(-x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数.

23.(2003 年数学一、二) 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 【D】

【解】 用举反例法，取 $a_n=\dfrac{2}{n},b_n=1,c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A)，(B)，(C)，因此正确选项为(D).

24.(2003 年数学二) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于

(A)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$. (B)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

(C)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$. (D)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$. 【B】

【解】 因为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}(1+x^n)\\&=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left\{\left[1+(\frac{n}{n+1})^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\},\end{aligned}$$

可见 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}na_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+(\frac{n}{n+1})^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}\\&=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.\end{aligned}$$

25.(2004 数学一、二) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$ ，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt$ ，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ (B) α,γ,β (C) β,α,γ (D)β,γ,α 【B】

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x\cos t^2dt}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x\cdot2x}{\cos x^2}=0$，可排除 (C) 、(D) 选项，

又 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}=\infty$$，可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B).

三、计算证明题

1.(1987 数学二) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2.(1989 数学二) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}=e^2$.

3.(1990 数学二) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求常数 a.

【解】 左式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$. 由 $e^{2a}=9$ 得 $a=\ln 3$.

4.(1991 数学二) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

5.(1991 数学一) 求 $\lim\limits_{x\to +0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【解】 原式$=e^{\pi\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to +0}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}}$

$=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

6.(1992 数学一) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{1}=1$.

7.(1992 数学二) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【解】 原式$=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}-1\right)\cdot\dfrac{x-1}{2}\right]$

$=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3(x-1)}{2(6+x)}\right]=e^{-\frac{3}{2}}$.

8.(1993 数学二) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)}=-50$. [注意:$x<0$.]

9.(1993 数学一、二) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

【解】 设 $x=\frac{1}{t}$，原式 $=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{1}}=e^2$.

10.(1994 数学二) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

【解】 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1\right]n\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}\right\}=e^4.$$

11.(1995 数学二) 求 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$$

12.(1996 数学一) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

【证】 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 又显见 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界. 根据极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 因此可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$ 成立. 从而 $a^2-a-6=0$. 解得 $a=3, a=-2$，但因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以 $a\geqslant 0$，舍去 $a=-2$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

13.(1997 数学二) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+x-1}+1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$.

14.(1998 数学一) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【解】 设 $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$. 对 I_n 估计如下：

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},i=1,2,\cdots,n$$

求和 $$\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\leqslant I_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}.$$

取极限 $$\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}I_n\leqslant\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x.$$

故 $$原式=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

15.(1998 数学二) 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

【解】 $f(x)$ 在$(0,2\pi)$内的间断点为 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处，$f(\frac{\pi}{4}+0)=+\infty$，在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 处，$f(\frac{5\pi}{4}+0)=+\infty$，故 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 为第二类(或无穷)间断点.

在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，在 $x=\frac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为第一类(或可去)间断点.

16.(1999 数学二) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【解】
$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

17.(1999 数学二) 设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

【解】 只须证 a_n 是单调有界数列. 由题设，

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k),k=1,2,\cdots.$$

(1) 有界性.
$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant0.\end{aligned}$$

(2) 单调性. 由 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant0$ 知，$\{a_n\}$ 单调减少. 故$\{a_n\}$的极限存在.

18.（2000 **数学一**）　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】　因 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,

$$\lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to-0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故原式 $=1$.

19.（2001 **数学二**）　求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

【解】　根据 1^{∞} 型极限计算公式，有

$$f(x)=\exp\left[\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}\right]=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

间断点为 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，所以 $x=0$ 为第一类（或可去）间断点. 其余间断点属于第二类（或无穷）间断点.

20.（2002 **数学一**）　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

【解】　由题设条件和洛必达法则，有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0).$$

由于 $f(0)\neq 0$ 和 $f'(0)\neq 0$，并注意到上面两个极限中分子的极限必为 0，故可得

$$\begin{cases}af(0)+bf(0)-f(0)=0,\\ af'(0)+2bf'(0)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-1=0,\\ a+2b=0.\end{cases}$$

由此解得 $a=2,b=-1$.

21.（2002 **数学二**）　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，$f''(0)\neq 0$. 证明：存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

【证】　只需证存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由题设和洛必达法则，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)}{2}\end{aligned}$$