数 学 分 析

第一卷　　第二分册

2004 年 8 月

数 学 分 析

第一卷　　第二分册

2004 年 8 月

目　录

第 六 章

积 分

§1. 积分定义和可积函数集的描述

1. 问题和启发性想法 设有一点沿数轴运动，它在时刻 t 的坐标是 $s(t)$，而 $v(t)=s'(t)$ 是它在同一时刻 t 的速度. 假定我们知道这个点在时刻 t_0 的位置是 $s(t_0)$，而且还给我们提供了它的速度的数据. 我们想用这些资料，对任意确定的时刻 $t>t_0$，计算 $s(t)$.

如果认为速度 $v(t)$ 是连续变化的，那末点在一小段时间内的位移将近似地等于该时间间隔内任一时刻 τ 的速度 $v(\tau)$ 与这一小段时间间隔的值 Δt 的乘积 $v(\tau)\Delta t$. 这提示我们，指定一些时刻 $t_i(i=0,\cdots,n)$，$t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，以分割区间 $[t_0,t]$. 设间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 都取得很小. 记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$. 则有近似等式

$$s(t)-s(t_0)\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

可以想象，如果对区间 $[t_0,t]$ 所做的分割越细，这个近似等式就越准确. 这样一来，可以设想，当分划的最大间隔长 λ 趋于零的极限情形下，我们将得到精确等式

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i=s(t)-s(t_0).\tag{1}$$

这个等式不是别的，正是全部分析学的基本公式——牛顿-莱布尼茨公式．一方面，它使我们能够根据导数 $v(t)$ 求出它的原函数数值；另一方面，又可根据已经用某种方法得到的函数 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$，求出位于等式左边的和式 $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$ 的极限．

在许多极其不同的场合都会遇到这种和式，我们称它为积分和．

譬如，我们试图仿效阿基米德方法求位于抛物线 $y=x^2$ 下边、闭区间[0,1]上边的图形的面积（图 47）．这里不详细讨论图形的面积概念，以后会论述它．像阿基米德一样，我们将利用已经会计算其面积的最简单的图形——矩形，对上述图形施行穷尽法．取点 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，把区间[0,1]分成一些小区间$[x_{i-1},x_i]$．显然，我们可以把图上画出的那些矩形的面积的和作为要求的面积 σ 的近似值：

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \Delta x_i;$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$．设 $f(x)=x^2$ 以及 $\xi_i = x_{i-1}$．我们把所得的公式改写成如下形式：

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

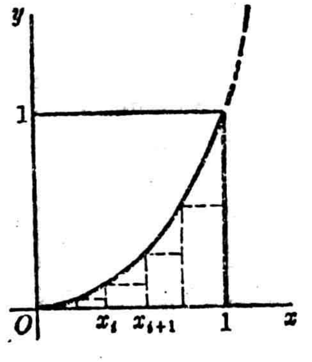

图 47

使用这些记号，当过渡到极限时就得到

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma. \tag{2}$$

同上边一样，这里的 λ 是分划的最大区间长．

公式(2)只在记号上与公式(1)不同．暂时不管 $f(\xi_i)$ 和 Δx_i 的几何意义，而把 x 看成时间，$f(x)$ 看成速度，来求 $f(x)$ 的原函数

$F(x)$. 然后，根据公式(1)将得到 $\sigma=F(1)-F(0)$.

在我们的情形，$f(x)=x^2$，因此

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+c,\ \sigma=F(1)-F(0)=1/3.$$

这正是阿基米德的结果，而他是用直接计算(2)中的极限得到的.

积分和的极限叫做积分. 这样，牛顿-莱布尼茨公式(1)就把积分与原函数联系起来了.

现在我们来精确地叙述并检验上边那些在一般想象的启发式叙述中得到的东西.

2. 黎曼积分的定义

a. 分划

定义 1 闭区间$[a,b]$ $(a<b)$ 的分划P指的是由这个区间的有限多个点 $x_0,\cdots,x_n$ 做成的点组，其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 叫做分划P的区间.

分划P的最大区间长$\lambda(P)$叫做分划P的~~参数~~. 网眼(筛孔) mesh

定义 2 如果P是闭区间$[a,b]$上的一个分划，而且在它的每个区间$[x_{i-1},x_i]$中选定了一个点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$，则说给出了区间$[a,b]$的一个带标志点的分划(P,ξ).

数组$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$用一个符号 ξ 表示.

b. 分划集的基 在给定闭区间$[a,b]$的带标志点的分划的集合$\mathscr{P}$中考察如下的基$\mathscr{B}=\{B_d\}$. 基$\mathscr{B}$的元素 B_d $(d>0)$ 是区间 $[a,b]$的一切满足条件 $\lambda(P)<d$ 的带标志点的分划(P,ξ)的集合.

我们来验证$\{B_d\}$ $(d>0)$确实是$\mathscr{P}$的基.

首先，$B_d\neq\varnothing$. 事实上，对任何数 $d>0$，显然存在区间$[a,b]$的分划P，其参数 $\lambda(P)<d$(例如，分成 n 个全等区间的分划). 由此，也存在带标志点的分划(P,ξ)且 $\lambda(P)<d$.

其次，如果$0<d_1$，$0<d_2$ 以及 $d=\min\{d_1,d_2\}$，则显然有

$B_{d_1} \cap B_{d_2} = B_d \in \mathscr{B}$.

因此，$\mathscr{B}=\{B_d\}$确实是$\mathscr{P}$的基.

c. 积分和

定义 3 如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上定义，而(P,ξ) 是这个区间的一个带标志点的分划，则和

$$\sigma(f;(P,\xi))=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \tag{3}$$

叫做函数 f 对应于区间$[a,b]$的带标志点分划(P,ξ)的积分和，其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

这样，对于确定的函数 f，积分和 $\sigma(f;(P,\xi))$ 是定义在区间$[a,b]$上的带标志点的分划 $p=(P,\xi)$ 的集合$\mathscr{P}$上的函数 $\Phi(p)=\sigma(f;p)$.

由于在$\mathscr{P}$中有基$\mathscr{B}$，所以可以提出函数 $\Phi(p)$ 关于这个基的极限的问题.

d. 黎曼积分 设 f 是给定在闭区间$[a,b]$上的函数.

定义 4 称数$\mathscr{T}$是函数 f 在闭区间$[a,b]$上的黎曼积分，如果对于任何 $\varepsilon>0$ 可以找到 $\delta>0$，使对区间$[a,b]$ 的任何带标志点的分划(P,ξ)，只要其参数 $\lambda(P)<\delta$，就有

$$\left|\mathscr{T}-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|<\varepsilon.$$

因为满足 $\lambda(P)<\delta$ 的那些分划 $p=(P,\xi)$ 组成了上面在带标志点的分划的集合$\mathscr{P}$中引进的基$\mathscr{B}$的元素 B_δ，所以定义 4 等价于

$$\mathscr{T}=\lim_{\mathscr{B}}\Phi(p), \tag{4}$$

亦即：积分$\mathscr{T}$是函数 f 对应于区间$[a,b]$ 的带标志点的分划的积分和的值关于基$\mathscr{B}$的极限.

用符号 $\lambda(P)\to 0$ 表示基 $\mathscr{B}$ 是自然的，从而，积分定义可改写成

$$\mathcal{T}=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

的形式.

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分用符号

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

表示,数 a,b 分别叫做积分的下限和上限; f 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量.

于是,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i} \tag{5}$$

定义 5 说函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积,如果对于它在(5)中指出的积分和,当 $\lambda(P)\to 0$ 时的极限存在(也就是说,它的黎曼积分有定义).

在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数全体所成的集合以 $\mathcal{R}[a,b]$ 表示.

由于我们暂时不研究黎曼积分以外的其他积分,为简单起见,我们约定,分别以《积分》和《可积函数》代替《黎曼积分》和《黎曼可积函数》这两个术语.

3. 可积函数集 根据积分的定义 4 和它另外的形如(4)、(5)的表述,积分是一个特别函数 $\Phi(p)=\sigma(f;(P,\xi))$ 的极限,这个函数是定义在区间 $[a,b]$ 的带标志点的分划 $p=(P,\xi)$ 的集 $\mathcal{P}$ 上的积分和. 这个极限是关于 $\mathcal{P}$ 的基 $\mathcal{B}$ 取的,我们以 $\lambda(P)\to 0$ 表示它.

这样一来,函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的可积性取决于上述极限的存在.

根据柯西准则,这个极限存在,当且仅当对于任何 $\varepsilon>0$ 可以找到元素 $B_\delta\in\mathcal{B}$,使在其中任何点 p',p'' 都成立关系

$$|\Phi(p')-\Phi(p'')|<\varepsilon.$$

更详细地说，这意味着：对于任何 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta>0$，使对区间 $[a,b]$ 的任何带标志点的分划 (P',ξ')，(P'',ξ'')，只要 $\lambda(P')<\delta$ 和 $\lambda(P'')<\delta$，就成立不等式

$$|\sigma(f;(P',\xi'))-\sigma(f;(P'',\xi''))|<\varepsilon$$

或

$$\left|\sum_{i=1}^{n'} f(\xi'_i)\Delta x'_i-\sum_{i=1}^{n''} f(\xi''_i)\Delta x''_i\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

利用柯西准则，我们首先将得到函数黎曼可积的简单的必要条件，然后得到一些充分条件.

a. 可积性的必要条件

命题 1 为使定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 在这个区间上黎曼可积，它必须在这个区间上有界.

简单地说，即

$$(f\in\mathscr{R}[a,b])\Longrightarrow(f\ 在[a,b]上有界).$$

◀如果 f 在 $[a,b]$ 上无界，则对区间 $[a,b]$ 的任一分划 P，f 至少在它的一个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界. 因此，可以选出点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使 $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ 任意大. 于是，只须改变点 ξ_i 在这个区间中的位置，就能使积分和 $\sigma(f;(P,\xi))=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的绝对值任意大.

在这种情形下，积分和显然没有有限极限，同时，由柯西准则看出，这时关系式(6)甚至对无论多么细的分划都不全成立. ▶

将会看到，这个必要条件距离可积性的必要充分条件还很远. 但是，它告诉我们今后只须研究有界函数.

b. 可积性的充分条件和最重要的可积函数类 首先介绍一些下面用到的记号和知识.

我们约定，当给定了闭区间 $[a,b]$ 的一个分划 P

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=b$$

时，与表示差 x_i-x_{i-1} 的符号 Δx_i 一起，我们还使用记号 Δ_i 表

示区间$[x_{i-1},x_i]$.

如果区间$[a,b]$的分划$\tilde{P}$是由分划P添加一些新的分点得到的,则说分划$\tilde{P}$是分划P的~~开拓~~.加细

当把分划P开拓成$\tilde{P}$时,分划P的某些(可以是其全部)区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$被分割:$x_{i-1}=x_{i0}<\cdots\cdots<x_{in_i}=x_i$.由于这个原因,对$\tilde{P}$的点用两个指标编号比较方便.在$x_{ij}$中的第一个指标表示$x_{ij}\in\Delta_i$,而第二个指标是在区间$\Delta_i$上点的顺序号码.现在,自然地应记

$$\Delta x_{ij}:=x_{ij}-x_{ij-1}\text{ 和 }\Delta_{ij}:=[x_{ij-1},x_{ij}].$$

这样一来,$\Delta x_i=\Delta x_{i1}+\cdots+\Delta x_{in_i}$.

例如,由分划P'和分划P''的点的并得到的分划$\tilde{P}=P'\cup P''$同时是分划P'和P''的~~开拓~~.加细

最后,我们提醒注意.如同过去一样,符号$\omega(f,E)$表示函数f在集合E上的振幅,即

$$\omega(f;E):=\sup_{x',x''\in E}|f(x')-f(x'')|.$$

特别地,$\omega(f;\Delta_i)$是函数f在区间Δ_i上的振幅.如果f是有界函数,这个振幅显然是有限的.

现在,我们来陈述并证明

命题 2 (Riemann) 为使闭区间$[a,b]$上的有界函数f在这个区间上可积,只要对于任意的$\varepsilon>0$,能找到$\delta>0$,使对区间$[a,b]$的参数$\lambda(P)<\delta$的分划P总成立关系

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon.$$

◀设P是区间$[a,b]$的一个分划,$\tilde{P}$是分划P的~~开拓~~加细.我们来估计积分和之差$\sigma(f;(\tilde{P},\tilde{\xi}))-\sigma(f;(P,\xi))$.利用上面引进的符号,有

$$|\sigma(f;(\tilde{P},\tilde{\xi}))-\sigma(f;(P,\xi))|=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}f(\xi_{ij})\Delta x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}f(\xi_{ij})\Delta x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}f(\xi_i)\Delta x_{ij}\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(f(\xi_{ij})-f(\xi_i))\Delta x_{ij}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}|f(\xi_{ij})-f(\xi_i)|\Delta x_{ij}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$
在这些计算中，我们利用了
$$\Delta x_i=\sum_{j=1}^{n_i}\Delta x_{ij}\text{ 以及 }|f(\xi_{ij})-f(\xi_i)|\leqslant\omega(f;\ \Delta_i),$$
因为 $\xi_{ij}\in\Delta_{ij}\subset\Delta_i$，$\xi_i\in\Delta_i$.

从得到的积分和之差的估计推出：如果函数 f 满足在命题 2 中说的充分条件，则对每个 $\varepsilon>0$ 都能找到 $\delta>0$ 使得对于区间$[a,b]$的参数 $\lambda(P)<\delta$ 的分划 P 以及 P 的开拓 $\tilde{P}$，关于任意取的标志点 ξ 和 $\tilde{\xi}$，都有
$$|\sigma(f;(\tilde{P},\tilde{\xi}))-\sigma(f;(P,\xi))|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果(P',ξ')和(P'',ξ'')是区间$[a,b]$的任意两个带标志点的分划，且 $\lambda(P')<\delta$，$\lambda(P'')<\delta$，考察分划 $\tilde{P}=P'\cup P''$，它是两个分划 P',P'' 的开拓，那末，根据已经证明的事实，有
$$|\sigma(f;(\tilde{P},\tilde{\xi}))-\sigma(f;(P',\ \xi'))|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$|\sigma(f;(\tilde{P},\tilde{\xi}))-\sigma(f;(P'',\xi''))|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
由此得出
$$|\sigma(f;(P',\xi'))-\sigma(f;(P'',\xi''))|<\varepsilon.$$
这样一来，根据柯西准则，积分和的极限

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，亦即 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. ▶

推论 1 $(f\in C[a,b])\Longrightarrow(f\in\mathscr{R}[a,b])$，亦即闭区间上的任何连续函数在这个区间上可积.

◀如果函数在闭区间上连续，则它在这个区间上有界，从而可积性的必要条件成立. 但是，闭区间上的连续函数也一致连续，因此，对于任何 $\varepsilon>0$ 可以找到 $\delta>0$，使在任何区间 $\Delta\subset[a,b]$ 上，只要 Δ 的长小于 δ，就有 $\omega(f;\Delta)<\frac{\varepsilon}{b-a}$. 于是，对于任何分划 P，只要其参数 $\lambda(P)<\delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

根据命题 2 可以得到 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. ▶

推论 2 如果定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 在该区间上最多除有限多个点外是连续的，则 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

◀设 $\omega(f;[a,b])\leqslant C<\infty$，而 f 在 $[a,b]$ 上有 k 个间断点. 我们来验证函数 f 满足可积性的充分条件.

对于给定的 $\varepsilon>0$，取数 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{8C\cdot k}$ 并做函数 f 的每个间断点的 δ_1-邻域. 这些邻域的并关于区间 $[a,b]$ 的补集是由有限个区间组成的，在每个这样的区间上 f 都是连续的，从而是一致连续的. 由于这种区间只有有限多个，对 $\varepsilon>0$ 可以指定 $\delta_2>0$，使在任何区间 Δ 上，只要它的长小于 δ_2 且全部被包含在上面所说的使 f 连续的一个区间内，就有 $\omega(f;\Delta)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

设 P 是闭区间 $[a,b]$ 的任意一个分划且 $\lambda(P)<\delta$. 与分划 P 相应的和 $\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$ 分成两部分:

$$\Sigma\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\Sigma'\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\Sigma''\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

在和 Σ' 中包含了那样的项．与它相应的分划 P 的区间 Δ_i 与所做的间断点的 δ_1-邻域没有公共点．对于这样的区间 Δ_i，有 $\omega(f;\Delta_i)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，因此

$$\Sigma'\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Sigma'\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易看出，剩下来的分划 P 的区间的长度和不超过 $(\delta+2\delta_1+\delta)k<4\frac{\varepsilon}{8C\cdot k}\cdot k=\frac{\varepsilon}{2C}$．因此

$$\Sigma''\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<C\Sigma''\Delta x_i<C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $\lambda(P)<\delta$ 时，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此，f 满足可积性的充分条件，从而 $f\in\mathscr{R}[a,b]$．▶

推论 3 闭区间上的单调函数在该区间上可积．

◀从函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的单调性推出

$$\omega(f;[a,b])=|f(b)-f(a)|.$$

设给定了 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|f(b)-f(a)|}$．我们假定 $f(b)-f(a)\neq0$，因为在相反的情形 f 是常数，从而无疑是可积的．设 P 是区间 $[a,b]$ 的任意分划，且其参数 $\lambda(P)<\delta$．

注意到 f 的单调性，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)=\delta\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$
$$=\delta\left|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right|=\delta|f(b)-f(a)|=\varepsilon.$$

这样，f 满足可积性的充分条件，即 $f\in\mathscr{R}[a,b]$．▶

单调函数可能是有无穷多个（可数多个）间断点的函数，例如，在闭区间$[0,1]$上由关系

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^n}, & \text{当} 1-\dfrac{1}{2^n}\leqslant x<1-\dfrac{1}{2^{n+1}}, n\in\mathbb{N},\\ 1, & \text{当} x=1\end{cases}$$

定义的函数是不减的，而且在每个形如$\frac{1}{2^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 的点处间断.

注 我们指出，虽然我们讨论的是在闭区间上定义的实函数，但是无论是在积分的定义中，还是在上述那些断言的证明中，除去推论 3，并没用到函数是实值而不是复值或向量值这样的假设条件.

相反地，我们将要讨论的上积分和与下积分和的概念，则是专对实值函数而言的.

定义 6 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$是定义在闭区间$[a,b]$上的有界实值函数；P 是区间$[a,b]$的一个分划；Δ_i $(i=1,\cdots,n)$ 是分划P的区间. 设

$$m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x),\ M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x)\quad (i=1,\cdots,n).$$

和式

$$s(f;P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

以及

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

分别叫做函数 f 在区间$[a,b]$ 上对应于分划P的下积分和与上积分和. 和式 $s(f;P)$，$S(f;P)$ 也叫做关于区间$[a,b]$ 的分划P的下达布和与上达布和.

如果(P,ξ)是闭区间$[a,b]$的任一带标志点的分划，显然有

$$s(f;P)\leqslant\sigma(f;(P,\xi))\leqslant S(f;P). \tag{7}$$