

北京航空学院

科学报告会论文集

庆祝建校三十周年

第三分册 自动控制类(續)

1982.10

前 言

建校三十年来,我院科研工作遵循党的方针政策,密切结合教学,取得不少成果,在此基础上,总结出了一批有一定理论价值与实践意义的学术论文。

战斗在祖国各地的校友们,在为实现我国四个现代化这一伟大历史任务的过程中,同样做出了可喜的成绩,此次他们热情响应母校三十周年校庆征稿的号召,把自己多年来从事教学、科研与工程技术实际工作中所积累起来的宝贵经验,进行理论总结,书写成文,投寄我院。

为隆重纪念我院三十周年校庆日,加强院内外的学术交流与联系,我处特编辑这套校庆论文集。文集刊载本院与校友近期科研成果或技术总结的详细文摘。为节省篇幅,在编辑时将作者原列参考文献删去。

论文按专题分类出版:

1. 材料科学与工程类
2. 无线电电子学类
3. 自动控制类
4. 发动机类
5. 飞行器与力学类
6. 计算机类、管理工程类、情报学类
7. 制造工程类
8. 数理类
9. 机械设计类
10. 医疗类、体育类
11. 社会科学类
12. 大学生论文集

由于编辑出版力量有限,时间也较仓促,难免有遗漏和不妥之处,欢迎批评指正。

北京航空学院 科研处

1982年10月

第三分册 自动控制类目录续

42. 关于高空无人机纵向控制方案电压设计问题
无人驾驶飞机器设计研究所 田 仲..... 2
43. $K(F)$ 矩阵谱范数最小化的最优输出反馈设计
自动控制系 毛剑琴..... 12
44. 绕加速度计的权函数辨识
自动控制系 张启栋、徐大华..... 21
45. 干式调谐陀螺仪的设计 自动控制系 邵吉臣..... 29
46. 在伺服系统设计过程中模型辨识的几种方法的程序设计与比较
自动控制系 王文杰..... 35
47. 某机 T_4 温度控制系统理论分析与外场大闭环试验经验
北京航空学院 李培滋
庆安公司 刘辉航 周维新
航空工业部某所 杨增福..... 47
48. 应用分离叠加法求静态工作点
自动控制系 陈元炎..... 61
49. 航空仪表伺服放大器的小型化设计
自动控制系 张国华..... 72

关于高空无人机纵向控制方案电压设计问题

无人驾驶飞行器设计研究所 田仲

系统组成及其控制规律

某种高空无人驾驶飞机的纵向控制系统组成如图一所示。上半部分包括速度传感器、高度传感器及其有关电路、积分装置和下滑信号电路。其功用是形成控制信号，用以控制无人机爬高、平飞和下滑飞行。图中下半部分，包括垂直陀螺，角速率陀螺、综合装置、放大器、舵机以及用于反馈的测速机和同位器。它们构成稳定回路，主要用来稳定飞机姿态角。

整个纵向控制系统的控制规律可用如下形式表示。

$$(T_B P + 1) \delta_B = K_2 \vartheta + K_3 \dot{\vartheta} + K_0 u_1$$

式中 δ_B ——升降舵转角

ϑ ——俯仰角

$\dot{\vartheta}$ ——俯仰角速度

u_1 ——控制信号

K_2, K_3, K_0 ——对应 $\vartheta, \dot{\vartheta}, u_1$ 的比例系数

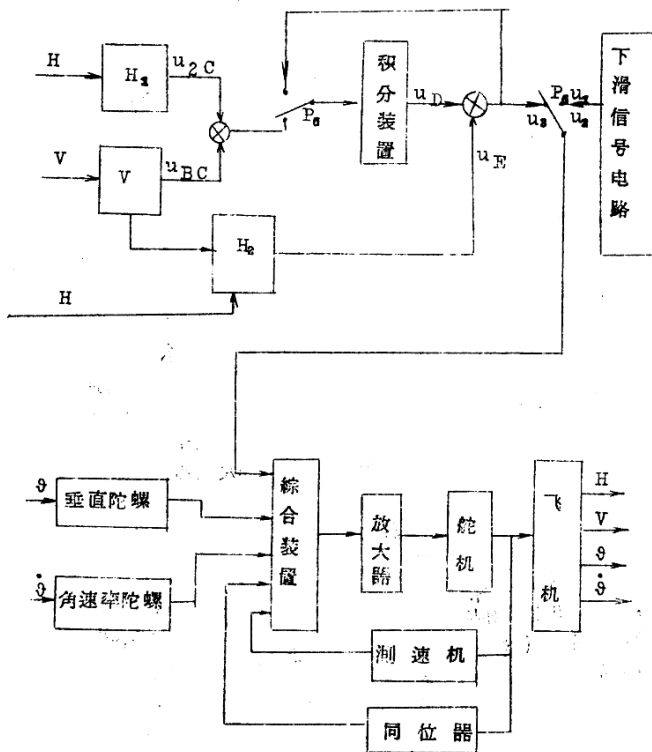
$$u_1 = \begin{cases} u_1 \text{ (常值)} & 0 \leq t < t_1 \\ u_2 \text{ (常值)} & t_1 \leq t < t_2 \\ \begin{aligned} u_2 - u_D - u_D = K_0 u_{BC}(V) K_s(H) - K \int_{t_1}^{t_2} (u_{sc}(H) - u_{BC}(V)) dt - u_{s0} \\ u_E = K_0 u_{BC}(V) K_s(H) \end{aligned} & t_2 \leq t < t_3 \\ u_D = K \int_{t_2}^{t_3} (u_{sc}(H) - u_{BC}(V)) dt & t \geq t_3 \end{cases}$$

其中 $u_{BC}(V)$ 与速度有关的信号

$u_{sc}(H), K_s(H)$ 与高度有关的信号。

u_{s0} 为 $t=t_1$ 时积分装置回零状态 u_D 跟踪 u_E 的误差值。

时间 t 从无人机投放时算起， t_1 可取 10 秒左右， t_2 取 15 秒左右。



图中 $\square$ 和 $\square$ 表示速度和高度传感器及其有关电路

图一 纵向控制系统方框图

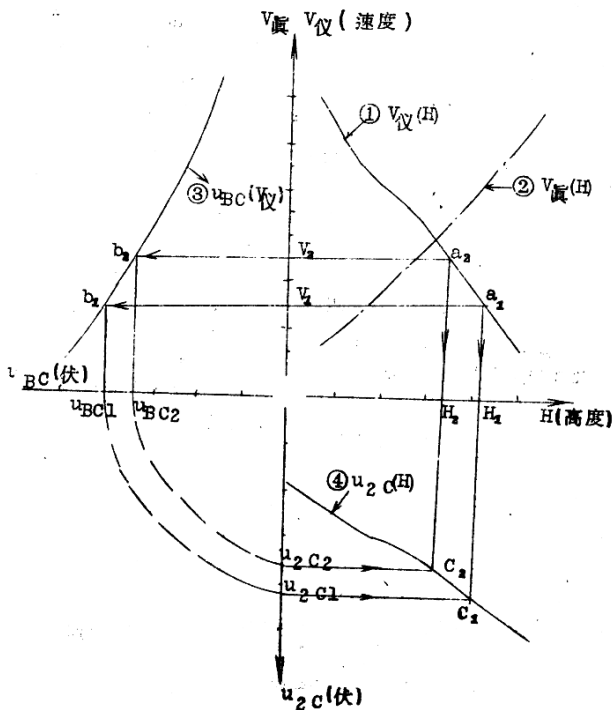
t_3 为完成飞行任务发动机停车时刻。常值下滑电压 $u_1 > u_2$ ，一般可取 $u_2 = \frac{1}{2} u_1$ 左右。設置常值下滑电压的目的在于，无人机空中投放后迅速下滑，很快脱离母机以确保安全。下滑电压用两个值由大变小，目的是减小飞机过载。

当无人机投放后下滑时，继电器 P_2 处于工作状态，下滑电压接入舵回路，而积分装置处于快速回零状态， u_D 跟踪信号 u_E ，使 u_3 近似等于零。当 $t=t_2$ 时，继电器 P_2 断电释放， u_2 接入舵回路。以后飞机就一直在 u_2 的控制下爬高和平飞了。 u_2 中的 u_{BC} ， u_{2c} ， $K_2(H)$ 是如何确定的，它们在飞行中又是如何起作用的，下面就讨论一下这方面的问题。

控制方案电压设计

飞机的飞行高度总是和它的飞行速度密切相关的。对于某一架飞机来说，在每一高度上，有其最小的允许飞行速度值和最大平飞速度值。在两者之间，我们可以选取认为最合适的速度值飞行。我们现在讨论的这种无人机主要是在高空执行任务，要求它飞得高、航程远。在低空时要求它爬升快、耗油少而又不超过允许过载，在高空时速度快能定高平飞。考虑这些因素，根据发动机和飞机本身性能，可提出各个高度上所希望的速度值，此值在爬升段要小于最大平飞速度值，在高空平飞时要等于最大平飞速度值。这样一个速度与高度对应关系，我们称为方案速度 $V_{方}(H)$ 。

有了方案速度，我们就可以设计方案电压了。其步骤如下：首先把 $V_{方}(H)$ 繪制成曲线，它是以真空速给出的，为试验测量方便，我们改为用仪表速度来表示 $V_{仪}(H)$ ，如图二的曲线①和②所示。然后选取 $u_{BC}(V)$ ， $u_{2c}(H)$ 电压范围与相同的比例尺标在同一张图上。在 $V_{仪}(H)$ 曲线上选取一点 a_1 （对应 $V_{仪}=V_1$ ， $H=H_1$ ）向左划水平线，对应 $V_{仪}=V_1$ 选取 $u_{BC}=u_{BC1}$ ，过 u_{BC1} 点向上划垂线，可得交点 b_1 。再取 $u_{2c1}=u_{BC1}$ 和 $H=H_1$ 两点划垂线和水平线得到交点 c_1 。逐次在 $V_{仪}(H)$ 曲线上选点，用同样作图法，可得到 $b_2, b_3, \dots$ 和 $c_2, c_3, \dots$ 。连接相应各点可得到曲线 $u_{BC}(V)$ 和 $u_{2c}(H)$ ，如图二上曲线③、④所示。选点作图时，要保证 $u_{BC}(V)$ 的斜率是负的， $u_{2c}(H)$ 的斜率是正的。如 u_{BC} ， u_{2c} 的电压范围不合适可以按需要调整。设计时保证：方案曲



图二 根据方案速度设计 $u_{BC}(V)$ 和 $u_{2C}(H)$ 曲线

线上的任一点所确定的高度、速度值。对 应到曲线 $u_{Bx}(V)$ 、 $u_{2c}(H)$ 上所给出的电压是相等的。

在具体实现时， $u_{BC}(V)$ 可设计成固定的，而 $u_{2c}(H)$ 设计成可调的。在高度传感器信号电位器上，串并接上相应的电位器即可，电位器用于调整 $u_{2c}(H)$ 的大小和斜率。可以实现不同的方案速度。

速度传感器随时感受飞机的实际速度大小，并给出相应的电压信号 $u_{BC}(V)$ 。高度传感器感受飞机的飞行高度变化，给出电压信号 $u_{2c}(H)$ ，这也就是各高度上方案速度应该对应的电压，所以可以称它方案电压。当无人机实际的飞行速度和高度偏离了方案要求时， $u_{2c} \neq u_{BC}$ ，就有信号 $u_{2B} = u_{2c} - u_{BC}$ 送到积分装置输入端积分后加至舵回路去控制飞机运动，使速度和高度回到方案要求上来。这时 $u_{2c} = u_{BC}$ ， $u_{2B} = 0$ 从而保证飞机始终按要求的方案速度飞行。这里加入积分装置的目的，除了提高控制精度改善性能之外，还起缓冲作用。无人机由下滑爬高时，其飞行速度与方案要求偏差较大，信号 u_{2B} 也就很大如直接加入舵回路中去，飞机过载会太大。所以通过积分装置（其输出有一个由小到大的积分过程）后再输入至舵回路，使飞机的动作缓和。

控制信号 u_2 中，如只有积分项 $u_0 = \int_{t_2}^{t_1} (u_{2c} - u_{BC}) dt$ 系统是不能很好工作的。因此另外又设置了比例项 $u_E = K_0 u_{BC} K_d(H)$ 。这两个信号号是通过积分装置输出电位器综合后，形成控制信号 $u_2 = u_E - u_D$ 加入舵回路的。 u_E 的极性使升降舵下偏，而 u_D 的极性使升降舵上偏。在某一高度上，当飞行速度增大而偏离了方案速度时， u_E 减小， u_D 增大，它们作用的结果都是使飞机爬高，在新的高度上，使速度回升方案曲线上来。但从信号性质上看， u_E 比 u_D 高一阶， u_E 的变化比 u_D 快得多，它可以起阻尼作用，改善系统品质。试验结果也证明，如没有比例信号，当 $u_{2B} > 0$ 控制飞机爬高，使得 $V = V_{方}$ 时 $u_{2B} = 0$ 但此时积分装置输出并不为零，飞机还要继续爬升，只当 $V < V_{方}$ 时产生了新的偏差， $u_{2B} < 0$ ，积分装置才会反向积分减小其输出值。这样就造成了飞机上下波动。其纵向轨迹如图三所示。

比例项 $u_E = K_0 u_{BC}(V) K_d(H)$ 中的 $u_{BC}(V)$ 取自积分项中的同一个速

度传感器, K_0 为一个可調系数。 $K_0(H)$ 为随高度变化的修正系数, 它取自积分项中高度传感器的第二个信号电位器。其特性曲线斜率可取成与 $u_{2c}(H)$ 相同, 也設計成可調的, 通过試驗最后确定。考虑到在高度 10 公里以上和 10 公里以下大气特性的差别, 以及减小积分装置在回零状态的跟踪誤差(此誤差大亦会造成飞机过载), 所以在 10 公里以下, $K_0(H)$ 取为常值。

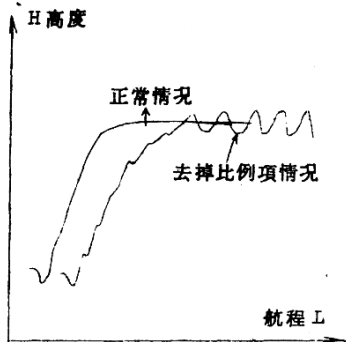
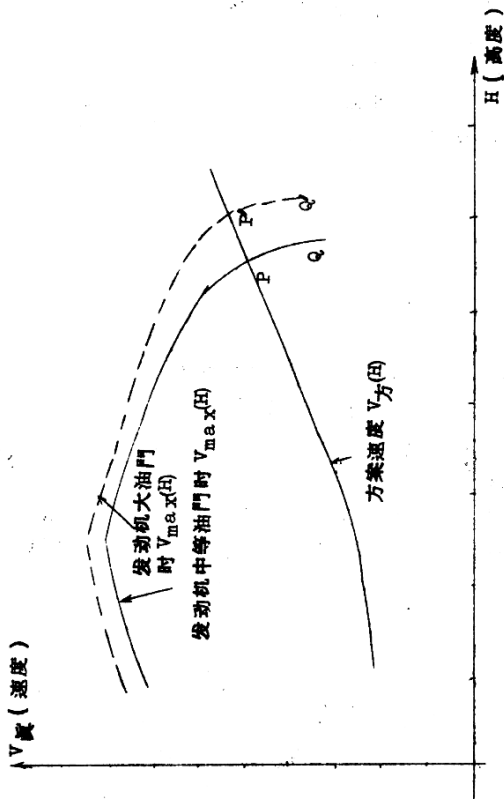


图 三

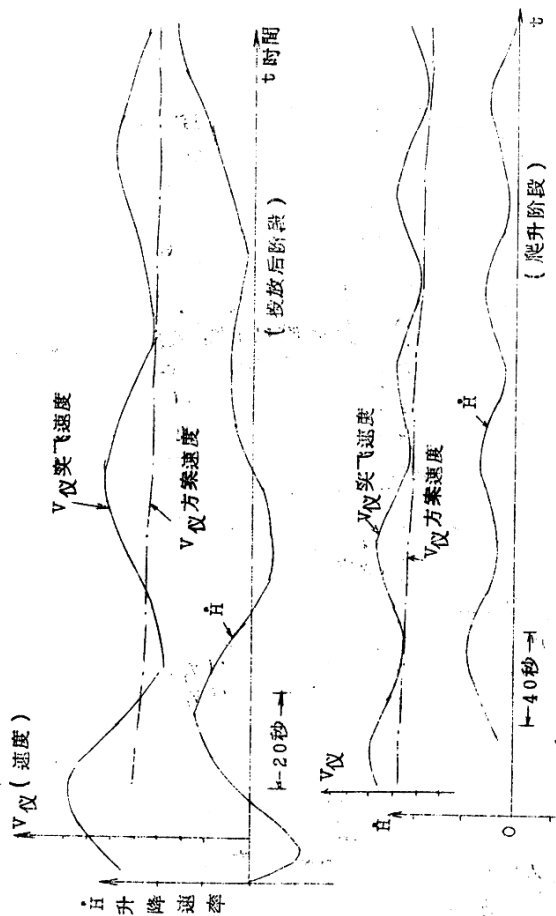
无人机爬高、平飞和下滑

上面談了方案电压的设计问题, 现在来看在此方案控制下飞机是如何工作的?

无人机在空中投放后, 經短时间的下滑轉为爬高以后, 一般要使用一定时间的发动机最大油门, 以便縮短爬高时间。实际飞行速度大于方案规定的速度时, $u_{2B} = u_{2c} - u_{BC} > 0$, 使升降舵上偏, 飞机迅速爬升。随高度的增加, 动压减小, 使飞行速度接近或等于方案速度, 这时 $u_{2c} \approx u_{BC}$, 飞机就会减小爬升率。但在爬高阶段, 方案速度($V_{方}$)小于最大平飞速度(V_{max}), 飞机有剩余推力增速, 所以无人机又会迅速增大其实际飞机速度(V)值, 使得 $V > V_{方}$, 因而爬升率又增大。这样无人机就可以连续爬高。随着高度的增加, $V_{方}$ 与 V_{max} 之差越来越小, 剩余推力也越来越小, 无人机爬升得也就越来越慢。在预定高度上, 方案速度等于最大平飞速度, 于是沒有剩余推力再增加速度了, 这时 $V = V_{方} = V_{max}$, $u_{2c} \approx u_{BC}$, 飞机也就定高平飞了。定高平飞的高度取决于方案速度曲线与最大平飞速度曲线的交点如图四所示; 交点 P 所对应的高度值即为无人机平飞高度。无人机爬高过程中的速度如图五所示。



图四 平飞高度的确定



图五 飞行试验曲线

由于最大平飞速度值在高空时，随高度增加而迅速减小，交点 P 不应选在升限的顶端，如 Q 点（见图四），在 Q 点虽然高度最大，但速度太小了，航程也必然很短。同时也没有留调整余量。所以 P 点一般选在高度损失较小而速度增加较大的地方。另外 P 点还要在最大平飞速度曲线 $V_{\max}^{(H)}$ 的急剧下降段，以便方案电压的误差对平飞高度影响不大。

无人机在高空平飞时，如受到干扰偏离了方案曲线，系统本身会自动控制飞机回到方案要求上来。例如受垂直风干扰，高度增加了 ΔH ，由 H_m 点变到了 H_n 点，见图六所示。这时对应的电压由 $u_{ac}(H_m)$ 增加，空气密度下降，动压将减小，对应的电压信号 $u_{BC}(V_m H_m)$ 也增加为 $u_{BC}(V_m H_n)$ 。这就要讨论哪个电压信号增加得更大。

让我们从方案曲线上来考虑。因为方案曲线 $V_{方}^{(H)}$ 斜率是正的，即 $V_n > V_m$ ，在同一高度 H_n 上， V_n 大对应的动压就大。但 $u_{BC}(V_{仪})$ 曲线斜率是负的，所以 V_n 对应的电压 u_{BC} 就小。而 V_m 小，对应的电压就大。即

$$u_{BC}(V_n H_n) < u_{BC}(V_m H_n)$$

在方案电压设计时已保证：

$$u_{BC}(V_n H_n) = u_{ac}(H_n)$$

所以 $u_{ac}(H_n) < u_{BC}(V_m H_n)$

这也就是说，有了 $+\Delta H$ 后，

使得 u_{BC} 和 u_{ac} 都增大，但

u_{BC} 增加得更大，这时

$$u_{\Sigma B} = u_{ac} - u_{BC} < 0$$

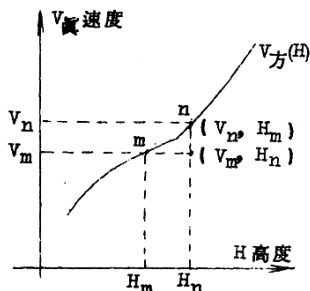


图 六

使舵面下偏，控制无人机下降到原高度上来。同样，当有了 $-\Delta H$ 时，则 $u_{\Sigma B} = u_{ac} - u_{BC} > 0$ ，使升降舵上偏控制无人机上升到原来的高度。从具体数字上看，无人机在高空平飞，如干扰使高度增加了几百公尺，这时 u_{ac} 增加 0.4 伏，而 u_{BC} 增加 0.3 伏，则 $u_{\Sigma B} = -0.4$ 伏，使飞机下滑。可见，此系统在速度不变情况下，对高度是稳定的，其条件是用真空速表示的 $V_{方}^{(H)}$ 和 $u_{ac}(H)$ 曲线的斜率是正的，用仪表速度表示的 $u_{BC}(V_{仪})$ 曲线的斜率是负的。这是在方案设计时要确保的。

在飞机平飞时，如由于某种原因使速度增加了某一数值，破坏了高度对应关系，偏离了方案曲线，则 $u_B = u_c - u_{DC} > 0$ 无人机将爬升来满足速度高度对应关系，重新回到方案曲线上为止，但已不是方案曲线上原来的那一点了。速度变了，高度也跟着变了。所以说，这个系统不是稳定速度而是利用速度来控制高度的。在飞行过程中，随着燃料的消耗，飞机重量逐渐减轻，就是在发动机推力不变的情况下，飞机速度也将有所增加，因而高度也将随之有所增加。所以严格说来此系统是不能保证无人机定高飞行的。

同样道理，我们可以用改变发动机的油门大小来控制无人机平飞高度。如减小发动机油门，推力减小，随之飞行速度减小，无人机就不能再维持平飞了，将下滑到一个较低的高度上平飞。在此高度上，实际飞行速度等于方案速度，也等于减小推力后的最大平飞速度。另外，利用改变方案电压曲线 $u_c(H)$ （它是可调的，通常可以设置两个方案电压）的办法来控制无人机平飞高度也是很方便的。

这种无人机在高空执行完任务后，要下滑到较低的高度上进行回收。需要无人机下滑时，可以通过遙控的办法减小发动机油门或改变方案电压 $u_c(H)$ 来实现。同时还可以配合使用阻力板控制下滑轨迹，阻力板打开角度越大，下滑速度越快，平飞高度也就越低了。

由此可见，此系统对无人机的爬高、定高平飞和下滑的控制还是很方便的。这种控制方案，始终保持无人机按要求的方案速度 $V_f(H)$ 飞行，当速度偏离方案要求时，通过改变高度的办法使其回到方案曲线上来，从而实现了通过速度的控制达到了控制高度的目的。所以我們也可以叫它为速度——高度控制系统。

以上是对高空无人机纵向控制方案设计问题的一些粗浅看法。欠妥之处望批评指正。

K(F)矩阵范数最小化的最优输出反馈设计

自动控制系 毛剑琴

一、考虑具有输出反馈 F 的线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t), \quad X(0) = X_0 \\ y(t) &= CX(t) \\ u(t) &= Fy(t)\end{aligned}\quad (1.1)$$

及二次型代价函数:

$$J(X_0, F) = \int_0^\infty (X(t)' Q X(t) + u(t)' R u(t)) dt \quad (1.2)$$

这里 $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$, $u(t) \in R^m$, $X(t) \in R^n$, $y(t) \in R^r$
最优输出反馈设计问题是要求 F^* ,

$$F^* \in F = \{ F \in R^{m \times r}, A + BFC \text{ 渐近稳定} \},$$

$$\text{使 } J(F^*) \leq J(F) \quad \text{对 } F \in F. \quad (1.3)$$

但由于 J 不仅是 F 的函数也是 X_0 的函数, 所以满足 (1.3) 的 F^* 也是 X_0 的函数. 这在实际应用中是有困难的. 为介决这一问题, Levine-Athans 对均匀地随机分布在单位球面上的初始条件 X_0 进行了统计平均. 即当

$$E(X_0) = 0, \quad E\{X_0 X_0'\} = X_0 \text{ 时}$$

得到改进后的代价函数:

$$J(F) = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \int_0^\infty e^{(A+BFC)t} (Q + C' F' R F C) e^{(A+BFC)t} dt X_0 \right\} \quad (1.4)$$

$$\text{令 } K(F) = \int_0^\infty e^{(A+BFC)t} (Q + C' F' R F C) e^{(A+BFC)t} dt$$

根据 Levine-Athans 定理有: $K(F) = K'(F) \geq 0$ 并满足下列方程:
程:

$$(A + BFC)' K(F) + K(F)(A + BFC) = -(Q + C' F' R F C) \quad (1.5)$$

不妨设 $X_0 = I$, (1.4) 成为:

$$J(F) = \frac{1}{2} \text{tr}(K(F)) \quad (1.6)$$

(1.2) 成为

$$J(X_0, F) = X_0' K(F) X_0 \quad (1.7)$$

在实际问题中, 有时不仅要求代价函数 $J(X_0, F)$ 对 X_0 的平均值 $J(F)$ 尽可能地小, 还要求 $J(X_0, F)$ 对 X_0 分布的最大值尽可能地小。代价函数的最大值也就是初始条件最坏情况下的代价函数值。

可以用一个简单的图来直观地说明平均值和最坏情况的关系。

设 $\|x_0\| = 1$, $x \in R^2$, 于是当 x_0 均匀地随机分布在单位圆周上时 (图 1), 其代价函数的平均值与最坏情况值如图 2 所示。

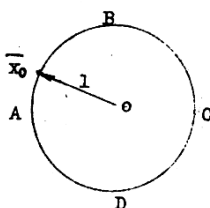


图 1

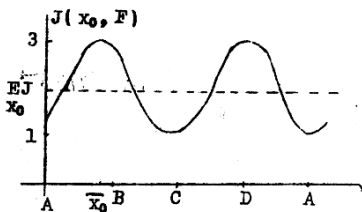


图 2

从 (1.7) 可以看出, 当 $\|x_0\| = x$ 时最坏情况值是 $x^2 \|K(F)\|$ 的最大值。所以要使对初始条件分布最坏情况代价函数值最小, 也就是要设计 F 使 $\|K(F)\|$ 尽可能地小。这就是所谓对初始条件分布最坏情况的設計。

按定义 $K(F)$ 矩阵的谱范数 $\|K(F)\|$ 就是它的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 即

$$\|K(F)\| \triangleq \lambda_{\max} \quad (1.8)$$

但一般地 $\lambda_{\max}$ 是 F 的不可微函数，所以用通常的取极值的方法将 $\|K(F)\|_2$ 直接地最小化是不可能的。为此，下面将证明一个定理用一系列可微函数的无约束最小化使 $\|K(F)\|_2$ 最小化。

二、定理及证明：

定理：对任一实数 $\theta \geq 0$ ，若存在 $\{F_p\} \in F$ 使

$$\text{tr}(K(F_p)^P) \leq (1+\theta) \{ \inf(\text{tr}(K(F)^P) : F \in F) \} \quad (2.1)$$

则当 $p \rightarrow \infty$ 时

$$\|K(F_p)\|_2 \rightarrow \hat{\lambda}$$

这里 $\hat{\lambda} \triangleq \inf \{ \|K(F)\|_2 : F \in F \}$, $K(F) = K(F)^T \geq 0$ 。

证明：

$$\because K(F) = K'(F) \geq 0$$

$$\therefore K(F) = V \Lambda V^{-1}$$

$$\text{这里 } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1(F), \dots, \lambda_n(F)\} \quad \lambda_1(F) \geq 0$$

$\lambda_1(F)$ 是 $K(F)$ 的特征值

$$\text{同时有 } K(F)^P = V \Lambda^P V^{-1}$$

$$\text{及 } \text{tr}(K(F)^P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^P(F)$$

$$\text{令向量 } \lambda(F) \triangleq (\lambda_1(F), \dots, \lambda_n(F))^T \in R^n$$

$$\text{于是有: } \text{tr}(K(F)^P) = \|\lambda(F)\|_P^P$$

$$\text{这里 } \|\lambda(F)\|_P \triangleq (\sum_{i=1}^n |\lambda_i(F)|^P)^{1/P}$$

于是从 (2.1) 有：

$$\|\lambda(F_p)\|_P^P \leq (1+\theta) \inf \{ \|\lambda(F)\|_P^P : F \in F \} \quad (2.2)$$

要证明 $\|K(F_p)\|_2$ 收敛到 $\hat{\lambda}$ ，只须证明，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在一个整数 $\bar{p}(\varepsilon)$ 使

$$|\|K(F_p)\|_2 - \hat{\lambda}| < \varepsilon \quad \forall p > \bar{p}(\varepsilon)$$

由 $\inf$ 的定义，对任意 $\varepsilon > 0$ ，一定存在一个 $\bar{F} \in F$ 使

$$\begin{aligned} \|\lambda(\bar{F})\|_\infty &\leq \inf \{ \|\lambda(F)\|_\infty : F \in F \} + \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon \\ &= \hat{\lambda} + \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里: $\|\lambda(F)\|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \max_1 \lambda_1(F) = \|K(F)\|_2$

由 Jensen 不等式有:

$$\|\lambda(F_p)\|_\infty^p \leq \|\lambda(F_p)\|_p^p$$

所以从 (2.2) 和 inf 的定义有:

$$\begin{aligned} \|\lambda(F_p)\|_\infty^p &\leq (1+\theta) \inf\{\|\lambda(F)\|_p^p: F \in \mathcal{F}\} \\ &\leq (1+\theta) \|\lambda(\bar{F})\|_p^p \end{aligned}$$

$$\text{即 } \|\lambda(F_p)\|_\infty \leq (1+\theta)^{1/p} \|\lambda(\bar{F})\|_p \quad (2.4)$$

$$\text{明显地: } \|\lambda(F_p)\|_\infty \geq \inf\{\|\lambda(F)\|_\infty: F \in \mathcal{F}\} = \hat{\lambda} \geq 0 \quad (2.5)$$

再由 Jensen 不等式有 当 $p \rightarrow \infty$ 时

$$\|\lambda(\bar{F})\|_p \downarrow \|\lambda(\bar{F})\|_\infty$$

于是存在一个整数 $\bar{p}(\varepsilon)$ 使

$$|\|\lambda(\bar{F})\|_p - \|\lambda(\bar{F})\|_\infty| < (\frac{1}{4})\varepsilon \quad \forall p > \bar{p}(\varepsilon)$$

从 (2.3) 有

$$\begin{aligned} \|\lambda(\bar{F})\|_p &< \|\lambda(\bar{F})\|_\infty + (\frac{1}{4})\varepsilon \\ &< \hat{\lambda} + (\frac{1}{4})\varepsilon \end{aligned} \quad p > \bar{p}(\varepsilon) \quad (2.6)$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda(F_p)\|_\infty - \hat{\lambda} \quad (\text{从 } 2.5) \\ &\leq (1+\theta)^{1/p} \|\lambda(\bar{F})\|_p - \hat{\lambda} \quad (\text{从 } 2.4) \\ &\leq (1+\theta)^{1/p} (\hat{\lambda} + (\frac{1}{4})\varepsilon) - \hat{\lambda} \quad (\text{从 } 2.6) \\ &\leq ((1+\theta)^{1/p} - 1) \hat{\lambda} + (\frac{1}{4})(1+\theta)^{1/p} \varepsilon \quad \forall p > \bar{p}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\therefore (1+\theta)^{1/p} \rightarrow 1 \quad \text{当 } p \rightarrow \infty \text{ 时}$$

$\therefore$ 存在一个 $p(\varepsilon) > \bar{p}(\varepsilon)$ 使当 $p > p(\varepsilon)$ 时有:

$$(a) \quad (1+\theta)^{1/p} < 4/3$$

$$(b) \quad ((1+\theta)^{1/p} - 1) \hat{\lambda} < (\frac{1}{3})\varepsilon$$