

重力勘探讲义

北京地质学院
物探教研室

1959

目 录

第一章 绪 论

- § 1.1 课程的内容 1
- § 1.2 重力勘探法发展的简史 1
- § 1.3 重力勘探在我国应用和发展的概况 5

第二章 重力勘探的理论基础 7~27

- § 2.1 重力和重力异常 7
- § 2.2 重力位和重力等位面
- § 2.3 正常重力公式 15
- § 2.4 重力等位面的形状和不平行性与重力位二次微商的关系
- § 2.5 重力位二次微商的正常值和异常值

第三章 重力和重力位二次微商测量方法的原理 32~37

- § 3.1 重力测量方法的分类 32
- § 3.2 重力测量的动力法 32
- § 3.3 重力测量的静力法 36
- § 3.4 重力位二次微商的测定 31

第四章 重力仪 41~10

- § 4.1 重力仪的基本理论 41
- § 4.2 影响重力仪测量精确度的各种因素和消除这些影响的方法 50
- § 4.3 ГКА-НННГРР 重力仪 59
- § 4.4 ГКА 重力仪常数的测定 69
- § 4.5 ГКА 重力仪的观测和观测结果的初步整理 75
- § 4.6 ГВ—52型重力高度计 78

§ 4.7	GS—9型重力仪	82
§ 4.8	诺伽(Nörgaard) 重力仪	84
§ 4.9	诺伽重力仪的观测和观测结果的初步整理	104
§ 4.10	ГAK—3M重力仪	107
第五章	重力仪的野外测量	121~128
§ 5.1	重力仪测量的任务和采用重力仪测量的一些有利条件	121
§ 5.2	基点网的布立	122
§ 5.3	测网的选择和测点的佈置	123
§ 5.4	对基点和普通点观测精度的要求	124
§ 5.5	在基点上观测的方法	125
§ 5.6	在普通点上观测的方法和观测质量的检查	125
§ 5.7	辅助点和连接点	126
§ 5.8	补充测点的佈置	127
§ 5.9	重力仪测量工作的设计	128
第六章	重力仪观测结果的整理	132~152
§ 6.1	在基点上观测结果的初步整理	132
§ 6.2	基点网的平差和基点网精度的衡量	133
§ 6.3	重力仪测量结果的高度校正	143
§ 6.4	重力仪测量结果的中间层引力校正	144
§ 6.5	重力仪测量结果的地形校正	145
§ 6.6	重力仪测量结果的正常场校正或纬度校正	149
§ 6.7	重力异常的图示法	152
第七章	扭秤	155~174
§ 7.1	扭秤的平衡方程式	155
§ 7.2	悬摆系统的振动	160
§ 7.3	对扭秤设计上的几点要求	169

§7.4	§-40型扭秤的秤臂最佳位置的选定	173
§7.5	扭秤常数的测定	174
第八章	扭秤的野外测量	181~188
§8.1	扭秤测量的任务和採用扭秤测量的一些有利条件	181
§8.2	测网的选择和测点的布置以及相应的地形测量工作	183
§8.3	在测点上的观测和观测质量的检查	184
§8.4	扭秤测量工作的设计	188
第九章	扭秤测量结果的整理	189~221
§9.1	扭秤测量结果的整理	189
§9.2	努恩洛夫的地形校正法	195
§9.3	计算地形校正值的芬姆索诺夫量板	206
§9.4	地形影响的制图校正	211
§9.5	扭秤测量结果的正常场校正	217
§9.6	重力位二次微商异常的图示法	218
§9.7	用于重力梯度积分的量板	221

第一章 緒 论

§1.1 课程的内容

我们知道，在地面上的任何物体都有重量。物体之所以有重量，是因为它受到重力的作用。物体受重力的作用而产生的加速度称为重力加速度。在地面上重力加速度的大小随着地点的不同而有微小的变化。这种变化与地球的运转、地球的形状以及不同密度的物质在地壳内（特别是在地表附近）的分布有关。因此，如果我们测出了重力加速度随着地点而变化的情形，并且把这些变化加以研究，就有可能得到有关地球形状和构成地壳的物质分佈的资料。前者对于解决大地测量的基本问题有很大的帮助，后者对于研究地质构造和有用矿产的分佈有着重要的意义。重力勘探法就是根据重力加速度在地面上变化的情形来解决有关地质构造和找矿等问题的一种勘查方法。因此，在重力勘探这门课程中将着重研究精确测定重力变化的仪器和方法，并且研究如何根据所得到的重力变化的资料来解决有关地质构造和找矿方面的问题。

§1.2 重力勘探法发展的简史

重力勘探法是由重力测量学发展而来的。重力测量学是研究重力加速度在地面上的分布和重力场的其他要素的科学。根据历史的记载，第一个研究和测定重力加速度的人是伽里略（G. Galilei, 1564—1642）。他根据他所发现的自由落体定律，测定了起初静止的物体在开始的一个单位时间内自由降落的路程。这个路程，在数值上等于重力加速度的一半。因为当时的测定技术不高，又没有精确测定时间的钟表，而他所采用的方法却要求测定很短的时间间隔。所以，他所测定的结

果必然是很不精确的。

在此以后，比较精确地测定重力加速度的方法，主要是根据摆的原理。从所见到的历史资料看来，第一个知道摆具有一定周期的人也是伽里略。后来由于天文学上的需要，惠更斯（Ch. Huygens）仔细地研究了摆，并在1655年左右制造了钟。这就为以后的重力加速度的精确测定奠定了基础。

最初由于重力加速度的测定不精确，人们都认为，在地球上重力加速度到处都相同，后来法国的天文学家里歇（J. Richer）在1672年发现，他原来在巴黎对得很准的有摆的天文钟，带到南美后，每昼夜慢了两分多。等到把钟又带回巴黎时，它又不慢了。如果根据重力加速度是常数的看法来解释这个现象，那就只能是摆的长度在搬运的过程中发生了变化，这显然是不可能的。同样的现象也被其他许多旅行家所觉察。但是，直到牛顿（I. Newton, 1643—1727）对这一问题注意之前，这些现象一直都没得到应有的重视和正确的解释。牛顿在他发表于1687年的“自然哲学的数理原理”一书中根据力学理论的推论指出，由于离心力从赤道到两极逐渐减小，在地面上的重力加速度应随纬度而变，而且地球在赤道处应向外扩大，也就是地球的形状应是扁的。从这时起，研究地球形状的问题便和研究重力加速度在地面上的变化连系起来了。

大约在和牛顿发表上述著作的同一时期，当卡辛尼斯（Cassins）在巴黎以南和以北测量纬度一度相当于子午线的长度时，发现在北纬 $45^{\circ}41'$ 附近纬度一度所相当的子午线长度较北纬 $49^{\circ}56'$ 附近的大一些。从这些测量结果看来，地球的形状应该是长的。这和牛顿的推论恰好相反。因此，关于地球形状的问题在当时引起了很大的争论。

为了解决上述争论，法国的科学院在1735年前后派出了

两个测量队，一个向北去瑞典，另一个向南去秘鲁。去瑞典的一队工作了约十六个月，测量的结果是，在北纬 $66^{\circ}20'$ 附近，纬度一度的子午线长度，相当于57,437托斯（1托斯等于1.949米）。去秘鲁的一队，因为当地的地形很坏，工作困难，所以工作了将近十年之久，得到的结果是，在南纬 $1^{\circ}30'$ 附近，纬度一度的子午线长度相当于56,746—56,768托斯。综合两队的测量结果可以看出，地球的形状应该是扁的。卡辛尼斯之所以得到了不正确的结果，是由于他所测量的两段子午线，其纬度相差很小，而测量的误差又比较大。

自此以后，许多科学家根据牛顿的理论，在对地球的形状、地面上重力的变化以及地壳内物质密度的分布等方面的研究都作出了很大的贡献。如克雷若（M. Clairaut）在1743年所发表的关于利用重力测量来确定地球扁度的论文。他在论文中，从牛顿的引力理论出发，得到了一个称为克雷若定理的公式，根据这个公式就可以利用在地面上测得的重力加速度把地球的扁度计算出来。在同一时期，俄国的科学家罗蒙诺索夫（M. B. Ломоносов）对重力随时间的变化进行了研究。在克雷若发表了上述论文以后约一百年，即在1849年左右，斯托克斯（G. Stokes）在理论上证明了，如果在地球表面上的重力场为已知，就可以确定出大地水准面（平静的海面）的形状，并且导出了相应的公式，根据这个公式可以利用地面上重力加速度的变化值来确定地面上各点大地水准面和理论椭球面的高度差。在1854—1855年普蔡特（F. Pratt）和爱里（G. Airy）所提出的地壳均衡学说也是值得注意的地壳均衡学说的出现，第一个指出了重力加速度的测定对研究地壳构造的意义。但是，这个假说在二十世纪才得到了应用。

从上述在理论方面所得到的结果看来，必需发明精确的仪器和方法来测定地面上各处的重力加速度。很多科学家在这方面尽了很大的努力，作出了很大的成绩。1818年卡特尔(H. Kater)设计出了可倒摆。1826年左右贝塞尔(F. W. Bessel)充实了可倒摆的理论，并对许多影响所产生的误差作了校正，如空气的阻力和刃口的运动等。可倒摆的发明为以后精确地测定重力加速度创造了条件。在1881年斯台尔迪克(R. V. Sterneek)发明了轻便而又精确的测定重力加速度相对值的振摆仪，这一仪器很快地就得到了广泛的使用。大约在1896年，厄缶(V. Eötvös)发明了测定重力位二次微商值的仪器，称为扭秤：等到1908年他又指出了应用扭秤在研究地壳上层地质构造方面的可能性，并且根据物质分布的某些理论情况的计算证实了扭秤在这方面应用的可能性。以后到1923年曼茨(F. A. Vening Meinesz)又发明了在海面上测定重力加速度的方法。

随着新仪器的发明和新的测定方法的出现，重力加速度的测定也就越来越精确。这就使得有可能测出由于地表附近不同密度的物质分布所引起重力加速度的微小变化。加之在第一次世界大战期间和以后近代工业对地下资源的需要，于是便开始利用对重力加速度微小变化的测定来探寻有用矿产。

等到重力勘探得到了较为广泛的应用之后，原有的仪器就显得不能满足需要了。当时用于重力勘探的主要仪器是振摆仪和扭秤。用这两种仪器来进行一次观测就需要几个小时，这显然是很不经济的。于是便又有通时的新型仪器制造出来了，这就是目前在重力勘探中使用得极其广泛的重力仪。重力仪是根据静力平衡的原理来测定重力加速度变化的仪器。重力仪的出现大大地提高了重力勘探的生产效率，这就为重力勘探的迅速

发展开辟了道路。利用现代的重力仪不但使测定的时间大为缩短，而且测定的精确度也远远超过了摆仪。目前最好的重力仪测定的精确度可以达到重力加速度绝对单位（C, G, S 单位）的十万分之一，测定一个点的时间只需几分钟。重力仪虽然具有很多优点，但也还有它的缺点，所以在某些方面，仍还使用摆仪来测定重力加速度。

随着仪器和测定方法的改进，测量结果的整理方法和解释方法也在不断地充实起来。例如，为了去掉非研究对象所引起的重力变化，对测量结果进行各种校正的方法；为了根据测量结果来推断地质情况而对各种形状的物体所产生的引力加速度进行计称的方法；以及直接利用测得的重力加速度变化的资料来计称矿体的深度和产状的方法等。直到目前为止，不论在仪器的改进方面和解释的方法方面都还在继续不断地发展。

§1.3 重力勘探在我国应用和发展的概况

重力勘探在我国应用于油田的勘查方面开始于1945年，当时全国只有一个重力勘探队，使用的仪器是重力仪。到1949年，全国解放的前夕，虽然相隔已有五年之久，但重力勘探队的数目只增加到两个，工作地区的范围也仅限于我国西北和台湾的个别地区。在金属矿方面，只在湖南的水口山作过扭秤测量，但因当地的地形太坏，没能得到良好的结果。以上所述就是全国解放以前重力勘探在我国应用的情况。由于所有这些工作都是在反动政权的统治下进行的，工作得不到支持，所以在我国，重力勘探也就没能得到应有的发展。

全国解放以后，由于党和人民政府的重视，重力勘探的队伍不断地壮大起来，仪器设备也在不断地增加。仅到1955年，重力勘探队的数目就已增加到将近三十个。到1956年，重力勘探的面积达到一百余万平方公里。现在，除了山区外，全国各地都已进行了重力勘探的普查工作，并且编绘了三百万分之一比例尺的全国重力异常图。解放以来，在我国不论对区域

地质的研究和构造的分区，以及估计泥炭岩的厚度，圈定凹陷带和确定断裂带等方面，重力勘探的应用都获得了很大的成功。此外，重力勘探用于寻找和研究石油构造方面也得到了良好的效果；在新疆的准噶尔和青海的柴达木等盆地所进行的重力勘探工作，就是一个十分明显的例子；在这些地区，根据重力勘探结果所发现的很多构造都被以后的地震勘探和钻探工作所证实。在研究煤田构造方面，重力勘探在我国也得到了越来越广泛的应用。由于过去我们已有的重力仪的精确度还不够高，而扭秤的工作效率又比较低，且对地面条件的要求较为严格，重力勘探在我国金属矿的普查找矿方面的应用，虽然不像在上述其他方面用得那样广泛，但是，与解放以前相比，却有很大的发展；在全国闻名的钢铁基地鞍山和白云鄂博都曾进行过重力勘探工作；在内蒙古的铭铁矿区，重力勘探队的规模正在不断地扩大。由于金属矿和它的围岩间一般都有着明显的密度差，所以，重力勘探在金属矿的普查找矿方面的应用必然有着远大的发展前景。

全国解放以后，我国在重力勘探仪器的制造方面，也取得了很大的成就。石油工业部西安地球物理仪器制造厂仿照苏联的CH-3重力仪，在1957年制成了ZS 571型石英丝重力仪。在全国大跃进的1958年，该厂又制成了ZS 581型石英弹簧重力仪和ZT 581型金属弹簧重力仪；前一种是仿照苏联的TAK-3M重力仪制造的，后一种是根据零长式重力仪的原理制成的。这些重力仪都经过了野外测量的试验，它们的测量精确度达到0.3或0.15毫伽。此外，新疆石油管理局科学研究所地球物理研究室还制成了用于重、磁力勘探结果定量解释中的某些计算的仪器——重磁力近似微分积分仪。

从全国解放以后重力勘探在我国应用和发展的情况中可以看出，在我们优越的社会制度下，重力勘探在我国有着光明的发展前景，它在今后的社会主义工业建设中，必将起着越来越重要的作用。

第二章 重力勘探的理论基础

§2.1 重力和重力异常

地面上任何一个物体都受到重力作用。某一物体所受到的重力就是：整个地球对它的引力和由地球自转所产生的离心力的合力。引力的大小根据牛顿的万有引力定律来确定。离心力的大小根据下式来确定。

$$C = m\omega^2 r \quad (2.1)$$

式中的 C 是离心力， m 是物体的质量， ω 是地球自转的角速度， r 是物体与地球自转轴间的距离，力的方向沿着 r 。

根据牛顿的万有引力定律，相距为 ρ ，质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点，其相互间的引力 F 可以用下式来表示。力的方向在两个质点的联线上。

$$F = f \frac{m_1 m_2}{\rho^2} \quad (2.2)$$

式中的 f 是一个比例常数，称为万有引力常数，它的数值与所采用的测量单位有关。在“克、厘米、秒”单位制中，由实验得到：

$$f = 6.67 \times 10^{-8} \text{ 厘米}^3 / \text{克} \cdot \text{秒}^2$$

力学证明，在计算密度均匀的球体或由密度均匀的同心层组成的球体其相互间的引力时，可以把它们看成具有同质量的质点，质点的位置在球体的中心。

当物体除重力外不受其他力作用时，就会有一个加速度，这个加速度叫做重力加速度，它与重力之间的关系如下式所示：

$$F_g = mg \quad (2.3)$$

式中的 F_g 是重力， m 是物体的质量， g 是重力加速度。若令式 (2.3) 中的 m 为 1，则 $F_g = g$ 。由此可知，重力加速度 g 在

数值上等于单位质量所受的重力。因而，在重力勘探中，常常把重力加速度简称为“重力”。为了纪念第一个测定重力加速度的伽里略，把重力加速度的绝对单位（克、厘米、秒单位，或C、G、S单位）称为“伽”，把它的千分之一称为“毫伽”。也就是，

$$1 \text{ 伽} = 1 \text{ 厘米/秒}^2, \quad 1 \text{ 毫伽} = \frac{1}{1000} \text{ 伽}.$$

我们已经知道，在地面上，重力加速度并不到处都相同，而是随着地点的不同有所变化。根据地面上重力变化的情况，来研究地质构造和进行找矿勘探工作，是重力勘探的主要内容。要了解为什么根据地面上重力变化的情况可以研究地质构造和达到找矿勘探的目的，首先要知道重力在地面上变化的原因。这个原因主要有以下几点：

1、地球不是一个圆球体，而是一个两极压缩的扁球体，并且地面是起伏不平的。

2、地球绕一定的轴自转。

3、地面附近（即地壳）物质的密度分佈不均匀。这种不均匀是复杂的地质作用造成的。因而，它与地质构造和矿产分佈有着密切的关系。

前两个原因很容易理解。现在只用一个例子来说明第三个原因。根据对牛顿万有引力定律的讨论，我们知道，同一个质点，在一个密度为 σ_1 的均匀球体的表面上任何位置，所受球体引力的大小都相等，并且可以根据式（2.2）计算出来。假若在此球体内，如图2.1中虚线所示的部分包括的物质，其密度 σ_2 和球体的密度 σ_1 不同，那么同一个质点，在球体表面上各个位置，所受球体引力的大小就不相同了。例如，当 $\sigma_2 > \sigma_1$ 时，同一个质点在图中A处所受球体的引力就比在B处来得大；因为球体内密度大的部分离A处较B处为近。

此外，在上述两种情形下，即便同一个质点在同一位置，例如都在A处，所受球体的引力也不相同，两者的差决定于虚线部分内的物质较原来所多余的质量，也就是决定于 $U(\sigma_2 - \sigma_1)$ ， U 是虚线部分的体积。如果虚线部分是球形的，则两者的差可以用式(2.2)直接计算出来，即

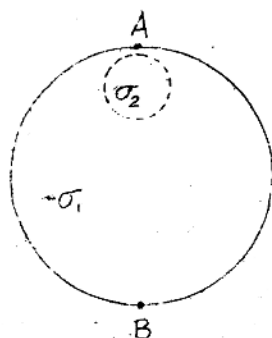


图 2-1

$$\Delta F = f \frac{mU(\sigma_2 - \sigma_1)}{\rho^2}$$

m 是质点的质量， ρ 是质点与虚线部分中心的距离。由此可见，在上述两种情形下，质点所受球体引力的变化，并不单独决定于 σ_1 和 σ_2 本身的大小，而决定于它们的差。我们把这个差叫做虚线部分内的物质相对于球体其余部分物质的剩余密度，把 $U(\sigma_2 - \sigma_1)$ 叫做虚线部分的剩余质量。剩余密度和剩余质量既可以是正值，也可以是负值。从这个例子不难看出，地壳的密度分布不均匀的确会引起地面上重力的变化。而且，要根据地面上的重力变化来推测地壳的密度分布，从而达到研究地质构造和找矿的目的，则必须知道单纯由于地壳密度分布不均匀所引起的重力变化。

根据以上的讨论，可以得出这样的结论：要得到单纯由于地壳密度不均匀所引起的重力变化，必须知道地壳密度均匀情形下，重力在地面上的分布。假如地球是一个密度均匀而且光滑的扁球体，或者它是一个密度成层分布的扁球体，而且在同一层内密度是均匀的，各层的界面都是共焦点旋转椭圆面，则地面上各点的重力值便可以根据地球的大小、质量、扁度、自转的角速度以及各点所在的位置等计算出来。这种计算出来的

重力值叫做正常重力值。这种情形下的重力场叫做正常重力场。正常重力值通常用符号 γ_0 来表示。

应该指出，在重力勘探的实际工作中，并不是根据上述关于地球的参数来计算正常重力值，而是根据以这些参数由理论和重力观测所导出的正常重力公式来计算正常重力值。在下一节内将简单地介绍一下导出正常重力公式的方法。

从地面上各点观测到的重力值中减去各该点的正常重力值和地形起伏不平的影响所得到的差，叫做重力异常，通常用符号 Δg 来表示它*。显然，重力异常是由地壳密度不均匀引起的。由观测所得到的重力值称为绝对重力值。

当地下有矿体或地质构造存在时，例如有一背斜构造，而且矿体的密度和围岩的密度不同，或者组成背斜的岩层与其覆盖层的密度不同，则必然造成地壳密度的不均匀，并且产生重力异常。矿体和围岩的密度差叫做矿体的剩余密度，矿体的质量与同体积围岩的质量之差叫做矿体的剩余质量。显然，重力异常的大小与矿体的剩余质量有关。若矿体的密度较围岩的大，则其剩余质量和剩余密度都是正值。反之，则都是负值。

§2.2 重力位和重力等位面

我们既然已经明确了重力异常与地质构造及矿产分佈有着密切的关系，而且也明确了要得到重力异常必须知道正常重力值，那么就简单地介绍一下怎样获得正常重力值的分布规律。为此，我们先来讨论地球对一个单位质量质点的引力。

取地球的重心为坐标的原点，并使 z 轴与地球的自转轴重合。这样， x 和 y 轴便在赤道面内，至于它们的方向，我们这样来选择，使它们与地球的惯性主轴重合。

* 以后也用 Δg 来表示两点间的重力差，或相对重力值。

P 为地球外部的一个单位质量的质点, dm 为地球的一个质量单元, 它们之间的
距离为 ρ (图 2.2); 则
 dm 对质点 P 的引力 dF
应为:

$$dF = f \frac{dm}{\rho^2} \quad (2.4)$$

dF 的方向是由 P 到 dm 。

若 P 的坐标为 (x, y, z) , dm 的坐标为 (ξ, η, ζ) ; 则:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \quad (2.5)$$

在求整个地球对质点 P 的引力之前, 需先求出 dF 在三个坐标轴上的投影; 这是因为 dF 的方向随 dm 的位置而改变, 我们不能对式 (2.4) 直接求积分。把 dF 在 x, y 和 z 三个坐标轴上的投影分别用 dF_x, dF_y 和 dF_z 来表示; 则

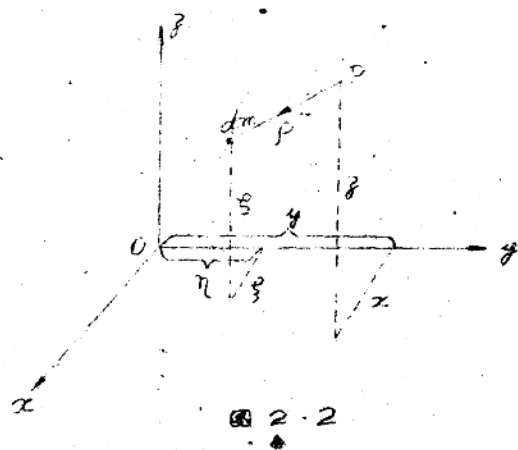
$$dF_x = f \frac{dm}{\rho^2} \cdot \frac{\xi - x}{\rho}$$

$$dF_y = f \frac{dm}{\rho^2} \cdot \frac{\eta - y}{\rho}$$

$$dF_z = f \frac{dm}{\rho^2} \cdot \frac{\zeta - z}{\rho}$$

只要对以上三式求积分就可以得到整个地球对质点 P 的引力在各个坐标轴上的投影, 即

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f \int \frac{\xi - x}{\rho^3} dm \\ F_y &= f \int \frac{\eta - y}{\rho^3} dm \\ F_z &= f \int \frac{\zeta - z}{\rho^3} dm \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$



积分是伸延到地球所有的质量之上。

现在再来讨论由于地球的自转在P点所产生的离心力C在各坐标轴上的投影 C_x 、 C_y 和 C_z 。我们已经知道 $C = \omega^2 r$ ，所以

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \omega^2 r \cdot \frac{x}{r} = \omega^2 x \\ C_y &= \omega^2 r \cdot \frac{y}{r} = \omega^2 y \\ C_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (2.7)}$$

把(2.6)中的各个式子分别和(2.7)中的相应式子加起来就得到重力 g 在各坐标轴上的投影如下：

$$\left. \begin{aligned} g_x &= f \int \frac{g \cdot x}{\rho^3} dm + \omega^2 x \\ g_y &= f \int \frac{g \cdot y}{\rho^3} dm + \omega^2 y \\ g_z &= f \int \frac{g \cdot z}{\rho^3} dm \end{aligned} \right\} \text{----- (2.8)}$$

不难看出，表示 g_x 、 g_y 和 g_z 的三个式子，是在已选定的坐标系内，一个有限函数。

$$W = f \int \frac{dm}{\rho} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \text{----- (2.9)}$$

分别对 x 、 y 和 z 的偏微商，也就是

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = g_y, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = g_z \text{----- (2.10)}$$

函数 W 称为重力场的位函数或重力位。式(2.9)右端的第一项是引力场的位函数或引力位、第二项是离心力场的位函数或离心力位；通常前者用符号 V 来表示，后者用符号 U 来表示。由此可见，某一点的重力位是该点的引力位和离心力位之和。重力位的引入，对研究重力场在计算上有很多方便的地方，这在以后将要讨论的问题中可以明显地看出。

现在再来讨论一下重力位 W 对任一方面 S 的偏微商。设 $P(x,$

y, z 点沿着 S 方向移动到无限近的邻点 $P' (x+dx, y+dy, z+dz)$ 时, W 的增量为 dW ; 则

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

以 $\cos(S, x)$ 表示 S 方向与 x 轴间夹角的余弦, ds 表示 P 与 P' 间的距离, 则得:

$$dx = ds \cdot \cos(S, x)$$

同样可得

$$dy = ds \cdot \cos(S, y) \text{ 和 } dz = ds \cdot \cos(S, z)$$

利用式 (2.10) 可以把重力位的增量 dW 写成下面的形式:

$$dW = [g_x \cos(S, x) + g_y \cos(S, y) + g_z \cos(S, z)] ds$$

以 $g \cos(g, x)$, $g \cos(g, y)$ 和 $g \cos(g, z)$ 分别代替上式中的 g_x , g_y 和 g_z 我们得到:

$$dW = [\cos(g, x) \cdot \cos(S, x) + \cos(g, y) \cdot \cos(S, y) + \cos(g, z) \cdot \cos(S, z)] g ds$$

由解析几何可知, 上式右端方括号内各项的和是 S 的方向与 g 的方向间夹角的余弦。因此,

$$dW = g \cos(g, S) \cdot ds$$

所以 $\frac{\partial W}{\partial S} = g \cos(g, S) \text{-----} (2.11)$

或 $\frac{\partial W}{\partial S} = g_S \text{-----} (2.12)$

g_S 表示重力 g 沿 S 方向的分量。

由此可见, 重力位对任何一方向的偏微商都等于重力 g 在这个方向上的投影。不难证明, 引力位和离心力位也都具有这样的性质。

当 S 的方向垂直于重力 g 的方向时, 在式 (2.11) 中

毕