衍射光栅明暗纹公式答疑

黄 钟 德

沈阳机电学院物理教研室

衍射光栅明暗纹公式答疑

物理教研室 黄 钟 德

提 要

本文试图在工科普通物理范围内回答学生在光栅教学中常常提出的二个问题。

随着各种光栅及光栅仪器在科研与工程技术中的应用日益广泛，工科普通物理中衍射光栅的教学引起了重视。原工科普通物理教材对这部分内容的处理虽在避繁就简上取得了一些成功，但在正确反映光栅的衍射光谱的强度分布方面是不足的，因而引起学生产生各种问题。现在祇得仍然避开光谱的强度公式的冗长数学推导，仅仅引述它的一些结论与惠更斯　　　菲涅耳原理，来回答学生常常提出来的下面二个问题。

一、光栅明纹为什么是由公式 $(a+b)\mathrm{Sin}\phi=\pm 2k\frac{\lambda}{2}$ 决定，而不是由 $a\cdot\mathrm{Sin}\phi=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 决定？

一束平行单色光，波长为λ，垂直入射于透射光栅上，除了通过每一狭缝的光线本身要产生衍射现象外，还有各条狭缝间的光线也要产生干涉现象，在屏上呈现的光栅明、暗条纹是光的干涉和衍射现象的总效果，称为光栅的衍射光谱。其中，明条纹亮而细，暗条纹暗而宽形成一片暗区。

高工教材指出，由各缝的干涉，光栅的明暗条纹由下二式决定：

亮条 $(a+b)\mathrm{Sin}\phi=\pm 2k\frac{\lambda}{2}$ $(k=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots)$ （1）

暗条 $N(a+b)\mathrm{Sin}\phi=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ $(k=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots)$ （2）

由光的衍射，光栅上之每一狭缝由自身衍射而产生的明、暗条纹由下二式决定：

亮条 $a\mathrm{Sin}\phi=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ $(k=1,\ 2\cdots\cdots)$ （3）

暗条 $a\mathrm{Sin}\phi=\pm 2k\frac{\lambda}{2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ （4）

既然说光栅光谱是干涉和衍射的总效果，为什么明纹公式是式（1）而不是式（3）？这是学完单缝衍射进入光栅衍射时，任何一个比较认真的学员必然会提出来的一个问题。

设有相邻的二个方向ϕ_1和ϕ_2。设ϕ_1满足式（1），ϕ_2满足式（3）；在ϕ_1角方向因光栅各缝相干而得的亮度设为E_1，在ϕ_2角方向因每个单缝衍射而得的明纹的亮度设为E_2，则可用惠更斯——菲涅耳原理令人信服地说明，在ϕ_1、ϕ_2不为零的情况下，E_1祇少要比E_2大9倍，（或由较严密理论是22.2倍）。

这是因为光亮度正比于振幅的平方，而振幅决定于波源的"波带"面积，即与$\triangle S$成正比（其他因素，如振幅与$\triangle S$到屏上P点的距离r成反比，也和夹角α有关等等，这都由于ϕ_1和ϕ_2是相邻二角而可略去不计），于是，光亮度与波源的面积有平方正比的关系。那末，当光栅各缝因干涉而加强时，按干涉理论，从栅上各缝以ϕ_1方向射来的光互相加强，因此对光栅亮纹产生贡献的面积是光栅的全部透光面积，即全部狭缝面积。而以ϕ_2角从每缝中射出之光，虽也加强，但由惠更斯——菲涅耳原理，当$\phi_2 \neq 0$时，从每缝来的光，祇有波源上一部分面积上来的光，才是加强的，按菲涅耳波带法，对衍射亮纹产生贡献的面积仅是单缝透光面积的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$、……，于是，也就是光栅全部透光面积的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$、……，于是由式（3）得ϕ_2角之亮线之亮度E_2仅为E_1的$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{25}$、$\frac{1}{49}$、……。由较严密的理论可推出，E_2应为E_1的$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{9}$、$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{25}$、$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{49}$、……，或$\frac{1}{22.2}$、$\frac{1}{61.7}$、$\frac{1}{121}$、……。

一般的在光学仪器中，亮度相差10倍时，就相对地认为是明暗分明了，亮度小10倍处是暗区了。加上单缝衍射的明纹太宽，光能量分散，更不能与光栅干涉明纹相较量，故ϕ_2角之光线虽使每缝满足式（3）而加强，但在光栅光谱中与式（1）所得的干涉亮条相比祇能算作暗区了。

至此，式（1）作为光栅明条公式就令人信服地接收了。

二、光栅衍射中的暗条公式 $N(a+b)Sin\phi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$，其中N取任意数，对吗？这时，确是暗条纹的地方吗？

按光栅的较严密理论，光栅的暗条公式应为：

$$N'(a+b)Sin\phi' = \pm k'\lambda \tag{5}$$

式中N'为光栅的条缝数。式（5）中的ϕ'，k'为了与高工教材上的暗条公式中的ϕ，k相区别，右上角带撇。式（5）中的k'可取值：

$k' = 1,\ 2,\ \cdots\cdots N'-1;\ N'+1,\ N'+2,\ \cdots\cdots$

$2N'-1;\ 2N'+1,\ 2N'+2,\ \cdots\cdots 3N'-1;\ 3N'+1,\ 3N'+2,\ \cdots$

$4N'-1;\ \cdots\cdots$ （6）

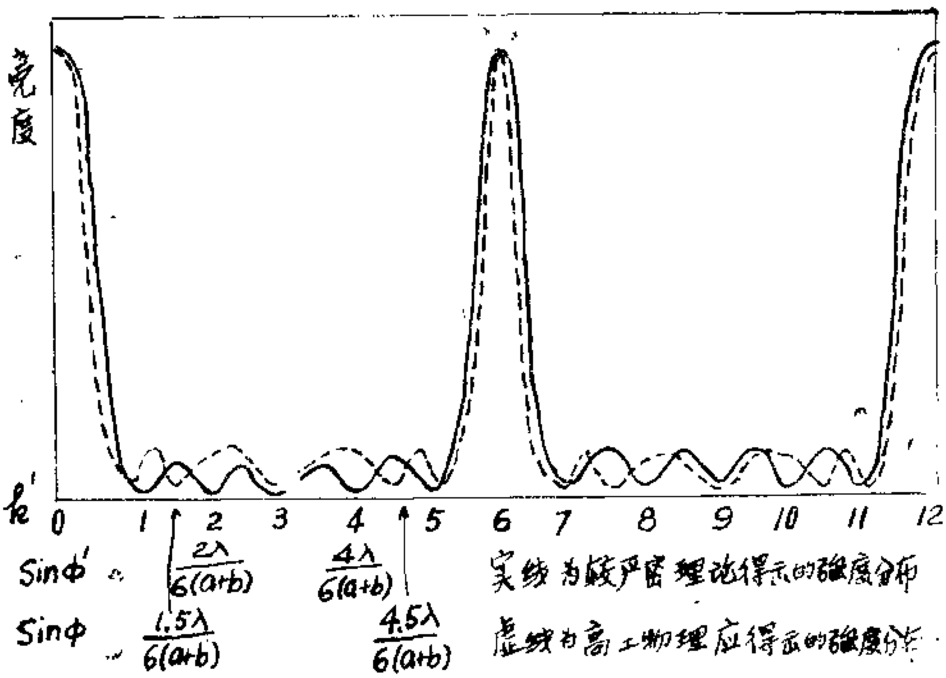
值得注意的是，k'不许取0、N'、$2N'$、$3N'$、$4N'$……，即 kN'（k＝0、1、2、3……）这样一些值。这是由于式（5）中的$k'=kN'$时，就得：

$$N'(a+b)Sin\phi' = \pm kN'\cdot\lambda = (\pm 2k\frac{\lambda}{2})N'$$

或
$$(a+b)Sin\phi' = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

式（7）是光栅的亮条纹公式。由此可见，在$k'=0$到$k'=N'$这二个亮纹之间应有

$k'=1, 2, \cdots\cdots N'-1$个暗纹。则$N'=6$的光栅应得之光栅光谱为下图，每二个亮纹之间有5个暗纹，从图看出，在光栅亮纹（称主极大）间还有一些次极大，由于次极大之亮度比主极大小甚多，于是认为主极大之间为一片"暗区"。



在高工物理中，公式（5）之来源无法介绍，于是尝试用相干法提出一解释暗条之公式 $N(a+b)\mathrm{Sin}\phi=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ （8）

由于采用干涉来解释暗条的产生，式（8）中的N当然应该取1到$\frac{N}{2}$间的任意整数，因N是个很大的数，则N可看成为任意整数。现在来分析，当$N=N'=6$时，式（5）和式（8）得出的暗条位置有何不同？

当$N'=6$，由式（5）得：

$$(a+b)\mathrm{Sin}\phi'=\pm\frac{k'}{N'}\lambda=\pm\frac{k'}{6}\lambda$$

$(k'=1, 2, 3, 4, 5; 7, 8, 9, 10, 11; 13, 14, 15, 16, 17; \cdots\cdots)$

或得暗条应满足之方向ϕ'：

$$\phi'=\pm\frac{1}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{2}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{3}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{4}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{5}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}; \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

当$N=6$，由式（8）得：

$$(a+b)\mathrm{Sin}\phi=\pm\frac{(2k+1)}{N}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$

$(N=1, 2, 3,)$

或得暗条应满足之方向ϕ：

$N=1$时，

$$\phi=\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{3}{2}\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{5}{2}\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{7}{2}\frac{\lambda}{a+b}, \cdots\cdots$$

$N=2$时，

$$\phi=\pm\frac{1}{4}\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{5}{4}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{7}{4}\frac{\lambda}{a+b}\cdots\cdots$$

$N=3$时，

$$\phi=\pm\frac{1}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{3}{6}\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{5}{6}\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{7}{6}\frac{\lambda}{a+b}, \cdots\cdots$$

让ϕ角按大小编排，次序为：

$$\phi=\pm\frac{1}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \pm\frac{1.5\lambda}{6(a+b)}, \pm\frac{3\lambda}{6(a+b)}, \pm\frac{4.5\lambda}{6(a+b)}, \pm\frac{5}{6}\frac{\lambda}{a+b}\cdots\cdots \quad (10)$$

比较（9）和（10），可以看出，ϕ'角有三个值与ϕ角相同，但第二、第四个值不同：

式（9）$\frac{2}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \frac{4}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}$

式（10）$\frac{1.5}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}, \frac{4.5}{6}\cdot\frac{\lambda}{a+b}$

式（9）和（10）画出的主极大、次极大分布图〔式（10）画出的用虚线表示〕也是差别不大的。可见，在高工物理中，用式（8）来解释暗条的位置是可以的，是比较成功的，祇要对式中N取任意整数这句话有本文的了解即可。

至此，本文所提出的问题得到了答复。