初等代数函授讲义

（第二分册）

哈尔滨市教师进修学院数学组编

目　　录

第三章　不等式和极大极小

在我们日常生活和生产劳动中经常会遇到和不等式有关的问题，这些问题可以利用不等式的知识来解决。另外，在以后学习高等数学时更要经常用到不等式，所以不等式是掌握好中学教材内容和进一学习不可缺少的重要基础知识。

第一节　不等式的基本性质

不等式的问题，主要分为绝对不等式的证明和含未知数的不等式的求解两大类。但是，不论解决哪一类不等式的问题，所根据的都是不等式的基本性质。因此，不等式的基本性质是我们必须很好地理解和加以掌握的。这些基本性质是：

（1）如果 $a>b$，那么 $b<a$。

（2）如果 $a>c$，$b>c$，那么 $a>c$。

（3）如果 $a>b$，那么$a+c>b+c$，这里 c是任何实数。

（4）如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c<b+d$。

（5）如果 $a>b$，$c<d$，那么 $a-c>b-d$。

（6）如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b,c<0$，那 $ac<bc$。

（7）如果 $a>b$，a、b 都是正数（就是$a>b>0$），那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

(8) 如果 $a>b$，$c>d$，a、b、c、d 都是正数，那么 $ac>bd$。

(9) 如果 $a>b$，$c<d$，a、b、c、d 都是正数，那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$。

(10) 如果 $a>b>0$，n 是任何正整数，那么$a^n>b^n$。

(11) 如果 $a>b>0$，n 是大于1的整数，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

怎样来证明这些基本性质呢？我们知道，要比较两个实数 a、b 的大小，只要考察它们的差就可以了。也就是说，“$a>b$”或者“$a<b$”，可以根据 $a-b>0$ 或者 $a-b<0$ 来确定。利用这一点，基本性质（1）——（7）都可以得到证明。例如证明性质(6)，就是已知 $a>b$，$c>0$，求证$ac>bc$。根据上面所说的，就是要证明 $ac-bc>0$。但是

$$ac-bc=(a-b)c$$

从 $a>b$，可以知道， $a-b>0$。

所以，当 $c>0$ 的时候，$(a-b)c>0$，

就是 $$ac>bc。$$

同样，当 $c<0$ 的时候，$(ac-bc)=(a-b)c<0$，就是 $ac<bc$。

证明了几个基本性质后，就可以利用它们来证明其他的基本性质。例如证明性质(8)，就是已知 $a>b$，$c>d$，a、b、c、d 都是正数，求证 $ac>bd$。如果要从证明$ac-bd>0$而得到$ac>bd$是很困难的。我们利用性质（2）和（6）来

证明它。因为 $a>b$，$c>0$ 所以根据（6）$ac>bc$， 又因为 $c>d$，$b>0$，$bc>bd$。因此根据（2），$ac>bd$。 这就证明了性质（8）。

性质（9）可以利用性质（7）和性质（8）证得。性质（10）利用性质（3）来证明，在证明了性质(10)以后、可以应用反证法来证明性质（11），这些证明请读者自己来完成。下面我们利用这些性质来看一看不等式的证明。

第二节　不等式的证明

我们利用不等式的性质来证明一些不等式。

例 1　已知 a 和 b 是不相等的正数，求证：

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

证明　因为 a 和 b 是不相等的正数，所以 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 是不相等的正数，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是不等零的实数。

$$\therefore \qquad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$$

就是

$$a-2\sqrt{ab}+b>0$$

移项，得

$$a+b>2\sqrt{ab}$$

两边都除以正数 2，得

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

如果 $a=b$，那么很明显，$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

例 2　求证 $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ ·a、b、c、d 都是

正数。

证明 我们先分析一下要求证的不等式，把两边平方得

$$(a+c)(b+d)\geqq ab+cd+2\sqrt{ab}\sqrt{cd}$$

就是 $$ab+cd+bc+ad\geqslant ab+cd+2\sqrt{abcd}$$

不等式的两边都有 $ab+cd$，要想证明上式成立，只要证明 $bc-ad\geqq\sqrt{abcd}$ 行了。利用例 1 已经证明了的不等式可以得出

$$bc+ad\geqq 2\sqrt{abcd}，\text{也就是}$$

$$\frac{bc+ad}{2}\geqq\sqrt{bc\cdot ad}$$

把上式反推回去，就得到所要证明的结果。

例 3 已知 a、b、c 是互不相等的实数，

求证： $$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$$

证明 因为 a、b、c 是互不相等的实数，

所以 $$(a-b)^2>0，(a-c)^2>0，(b-c)^2>0。$$

因此 $$a^2+b^2>2ab，a^2+c^2>2ac，b^2+c^2>2bc.$$

把三个同向不等式的两边分别相加，得

$$2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2ac+2bc.$$

两边都除以正数 2，得

$$a^2+b^2+c>ab+ac+bc.$$

另法

$$a^2+b^2+c^2-(ab+acbc)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2a^2+2b^2+2c^4-2(ab+ac+bc)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)\right\}$$

因a、b、c是互不相等的实数所以上式大于0，也就是$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)>0$，由此得

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$$

例4　a、b、c 是互不相等的三个正数，求证：

$$a^3+b^3+c^3>3abc。$$

证明　要证明 $a^3+b^3+c^3>3abc$，只要证明 $a^3+b^3+c^3-3abc>0$就行了。因为

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-$$
$$-bc-ca-ab)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right\}>0$$

所以　$$a^2+b^2+c^2>3abc$$

例5　已知x是不等于1的正数，求证$x+\frac{1}{x}>2$

证明　要证明 $x+\frac{1}{x}>2$，只要证明 $x^2+1>2x$ 就行了，也就是要证明　$x^2-2x+1>0$。

由于 $x^2-2x+1=(x-1^2>0$，我们可以把$x^2-2x+1>0$的两边除以正数x，就得到所要证明的结果。

例 6　已知 a，b 是同号而不相等的数，求证

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

证明　设　$$\frac{a}{b}=x>0,$$

则　$$\frac{b}{a}=\frac{1}{x},$$

利用例 5 的结果有　$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2。$$

例 7　设 a、b、c 为互不相等的正数，求证

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$$

证明　$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-3$$

$>2+2+2-3=3$.问题得证。

例 3　已知 $x^2=a^2+b^2$，$y^2=c^2+d^2$，并且所有的字母都表示正数，求证：

（1）$xy\geqq ac+bd$；（2）$xy\geqq ad+bc$；

（3）$xy\geqq\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)}$。

证明　（1）将 $xy\geqq ac+bd$ 两边平方，

$$x^2y^2\geqq(ac+bd)^2,\quad x^2y^2\geqq(ac)^2+2acbd+(bd)^2$$

再把所给条件代入上式得

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac)^2+2acbd+(bd)^2,$$

$$(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2\geqq(ac)^2+2acbd+(bd)^2,$$

$$(ad)^2+(bc)^2\geqq 2acbd.$$

根据例 1 的结果，上式是成立的。把上式反推回去就得到求证的结果。

注　如果令 $(ad)^2=A$，$(bc)^2=B$，上式就成为：

$$A+B\geqq 2\sqrt{A}\cdot\sqrt{B},$$

即
$$\frac{A+B}{2}\geqslant\sqrt{AB},$$

这正是例 1 的结果。例 1 的结果也可以写成另一种形式：

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqq ab.$$

（2）和（1）的证法完全相同。

将（1）和（2）结果的两边相乘后再开方就得到

$$xy\geqq\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)}.$$

例 9　试比较 $1+2x^4$ 和 x^2+2x^3 的大小，

解　要比较 $1+2x^4$ 和 x^2+2x^3 的大小，只要考虑它们之差的正负号就行了。

$$1+2x^4-(x^2+2x^3)=2x^4-2x^3-(x^2-1)$$

$$=2x^3(x-1)-(x-1)(x+1)$$

$$=(x-1)\ 2x^3-x-1$$

$$=(x-1)\{(x^3-1)+x(x^2-1)\}$$

$$=(x-1)\{(x-1)(x^2+x+1)x-1)(x+1)\}$$

$$=(x-1)^2\{x^2+x+1+x(x+1)\}$$

$$=(x-1)^2(2x^2+2x+1)$$

$$=2(x-1)^2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2(x-1)^2\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$=2(x-1)^2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

在上式中　$(x-1)^2\geqq 0$，$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$

故　$1+2x^4-(x^2+2x^3)\geqq 0$，

即　$1+2x^4\geqq x^2+2x^3$.

第三节　不等式的解法

我们知道，在含有末知数的不等式中，能够使不等式成

立的未知数的值的范围，就是不等式的解。在解不等式的过程中，由于运算的结果，要使原不等式变形，这就产生了同解不等式的问题。同解不等式就是：如果使第一个不等式成立的未知数的所有的值都能使第二个不等式成立，而使第二个不等式成立的未知数的所有的值都能使第一个不等式成立，那么这两个不等式就是同解不等式。

关于同解不等式有下面一些重要的定理。

定理 1 如果不等式的两边都加上同一个整式，那么所得的同向不等式和原不等式同解。

这就是说，如果$F(x)$是任何一个整式那么不等式

$$f_1(x)>f_2(x) \tag{1}$$

和

$$f_1(x)+F(x)>f_2(x)+F(x) \tag{2}$$

同解。

这个定理可以证明如下：

如果 $x=a$ 是使不等式（1）成立的x的任何一个值，

那么

$$f_1(a)>f_2(a).$$

$$\because \qquad F(a)=F(a).$$

$$\therefore \qquad f_1(a)+F(a)>f_2(a)+F(a).$$

因此，$x=a$ 也使不等式（2），成立。

反过来，如果 $x=b$ 是使不等式（2）成立的 x 的任何一个值，那么

$$f_1(b)+F(b)>f_2(b)+F(b).$$

$$\because \qquad -F(b)=-F(b),$$

$$\therefore\quad f_1(b)+F(b)-F(b)>f_2(b)+F(b)-F(b).$$

就是 $$f_1(b)>f_2(b).$$

因此，$x=b$ 也使不等式（1）成立。

由此可知，不等式（1）和（2）是同解不等式。

推论 把不等式中任何一项的符号改变后，从一边移到另一边，所得的同向不等式和原不等式同解。

定理 2 如果不等式的两边都乘以同一个正数，那么所得的同向不等式和原不等式同解。

这就是说，如果 $m>0$，那么不等式

$$f_1(x)>f_2(x) \tag{1}$$

和

$$m\cdot f_1(x)>m\cdot f_2(x) \tag{2}$$

同解。

定理 3 如果不等式的两边都乘以同一个负数，那么所得的异向不等式和原不等式同解。

这就是说，如果 $m<0$，那么不等式

$$f_1(x)>f_2(x) \tag{1}$$

和

$$m\cdot f_1(x)<m\cdot {}_2(x)$$

同解。

这两个定理可以和定理 1 同样证明。我们运用不等式的基本性质和同解不等式的几个定理来做一些练习。

1. 一元一次不等式

例1 求满足不等式$\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2x-1}{3}>3x-4$ 的x值的范围。

解 先把原不等式的两边同乘以 6，变成和它同解的不等式，得

$$9x-2(2x-1)>6(3x-4),$$

$$9x-4x+2>18x-24,\text{ 再移项得}$$

$$9x-4x-18x>-24-2,$$

$$-13x>-26.\text{ 两边再以}-13\text{除之，得}$$

$$x<2.\quad \text{答 } x<2.$$

在解不等式时，如果不等式的两边以负数除之，则不等式变向，这是要特别注意的。

例 2 求下列各组不等式的解。

（1）$\begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x>-2 \\ x<1 \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x<0 \\ x>2 \end{cases}$

解 （1）这组不等式的解是：x 的值既要大于 -1 又要大于 2 。显然 $x>2$ 是满足这个要求的解。因为 x 大于 2 就必然会大于 -1，这从图形上能够很清楚地表示出来。用下图表示的公共区间就是它们的解。

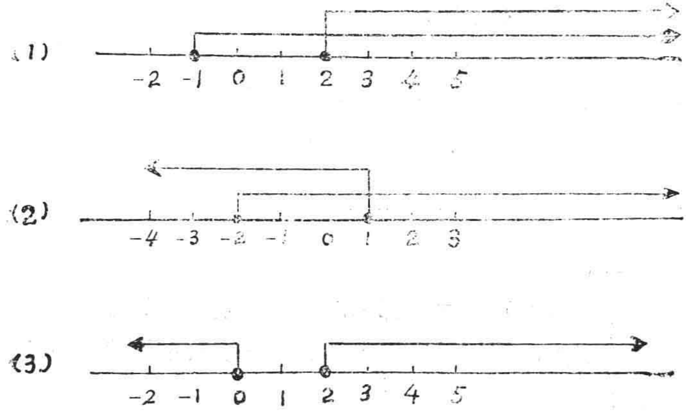

图 3—1

（2）的解是$-2<x<1$

（3）无解

例3　解不等式组：

$$\begin{cases}(x-)^2>(x+1)^2-4, \\ (x-1)(x+2)<(x+3)(x-4)+20\end{cases}$$

解：原不等式组可以化成：

$$\begin{cases}x>1, \\ x<5.\end{cases}$$

因为使$x>1$和 $x>5$ 都能成立的的值的 x 范围是$1<x<5$，所以原不等式组的解是 $1<x<5$（图3—2）。

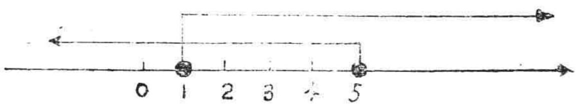

图3—2

2．**一元二次不等式**

含有一个末知数并且末知数的次数最高是二次的不等式叫做一元二次不等式。它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0, \qquad (1)$$

或者

$$ax^2+bx+c<0, \qquad (2)$$

这里 $a\neq 0$。

不等式（2）的两边都乘以-1，就可以化成（1）的形式。因此，解一元二次不等式，只要会解不等式（1）就可以了。

在解一元二次不等式时，首先要注意二次三项式ax^2+

$bx+c$ 是存在实根还是存在虚根，如果存在实根（根据判别式 $b^2-4ac\geqslant 0$ 来判定），就首先求出它的两个实根 x_1 和 x_2，那么 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，解 $ax^2+bx+c>0$ 也就是解 $a(x-x_1)(x-x_2)>0$，这个不等式的解是容易确定的；如果存在虚根（根据 $b^2-4ac<0$ 来判定），则二次三项式 ax^2+bx+c 的符号与 a 的符号相同，这时 $ax^2+bx+c>0$ 的解存在两种情况：

① $a>0$ 时，$ax^2+bx^2+c>0$ 的解是任何实数；

② $a<0$ 时，$ax^2+bx+c>0$ 无解。

注　为什么当 $b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 的符号与 a 的符号相同呢？把二次三项式 ax^2+bx+c 写成另一种形式就清楚了。

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\
&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\
&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

如果 $a>0$，$b^2-4ac<0$（即 $4ac-b^2>0$），上式显然大于 0；

如果 $a<0$，$b^2-4ac<0$（即 $4ac-b^2>0$），上式显然小于 0。

这说明 ax^2+bx+c 的符号与 a 的符号相同。