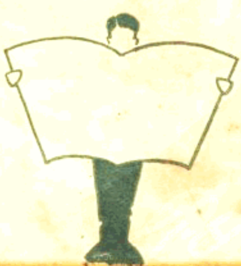
大學投考指南

于澄主編

上海新生書局印行



數學試題及詳解

國立中央大學

代數，平面幾何，三角

1. 解下列諸方程式：

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{\dfrac{3}{y+1}}=\dfrac{7}{4}$

$x+y-\sqrt{5(x+y)}=10$

(b) $\log_{10}(\sqrt{7x+4}+25)-\log_{10}x=1$

2. 甲乙二地，東西相距若干里，今有汽車於上午十時由甲地向乙地而行，至中途，折而南行，行十里後，復向乙地前進，至下午二時達乙地，停留一小時後，由乙地向甲地駛返，每小時之速度，較前增三里，至下午五時返甲地，求甲乙二地之距離。

3. 求作下列諸直線：

(a) 過一已知點，分已知等腰梯形為兩等積形。

(b) 垂直於一已知線，與已知圓相切。

4. 於正東正南甲乙兩地，測得某山之仰角為45^0及30^0，今甲乙之距離為2400尺，求山高。

5. 答下列各則：（其不通或不可解者，請註明不通或不可解。）

(a) 323與221之最大公約數為 (　　)。

(b) $x^2+8x+9=0$之兩根為 (　　)，(　　)。

(c) $(x+y)^6=$ (　　)。

(d) x^4+4之有理因子為 (　　)。

(e) $\log_{10}0=$ (　　)，$\log_{10}(-4)=$ (　　)。

(f) $\sqrt[3]{17}$ 與 $\sqrt[4]{21}$ 之兩數孰大？(　　)

(g) n 多邊形諸角之和＝(　　)。

(h) 何謂圓？(　　)。

(i) $\sqrt{\sin x-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$之根為 (　　)。

(j) $\tan 30^0=$ (　　)，$\tan 45^0=$ (　　)，$\tan 60^0=$ (

【解】

1. (a) 解：$\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{\dfrac{3}{y+1}}=\dfrac{7}{4}$ ……(1)

$x+y-\sqrt{5(x+y)}=10$ ……(2)

設 $\sqrt{x-1}=u$　　$\sqrt{y+1}=v$

由(1)　$\dfrac{2}{u}+\dfrac{3}{v}=\dfrac{7}{4}$

$8v+12u=7uv$

$\therefore\ v=\dfrac{12u}{7u-8}$ ………………(3)

由(2)　$v^2+u^2-\sqrt{5(u^2+v^2)}=10$

$v^2+u^2=20$ ……………(4)

或　$v^2+u^2=5$ ……………(5)

代(3)入(4)：$\left(\frac{12u}{7u-8}\right)^2+u^2=20$

$144u^2+49u^4-112u^3+64u^2=980u^2-2240u+1280$

$49u^4-112u^3-772u^2+2240u-1280=0$

$(u-2)(49u^3-14u^2-800u+64)=0$

∴ $u=2$，$v=4$，∴ $x=5, y=15$。

或 $49u^3-14u^2-800u+64=0$，本式不可解。

再代(3)入(5)$\left(\frac{12u}{7u-8}\right)^2+u^2=5$

$144u^2+49u^4-112u^3+64u^2=245u^2-560u+320$

$49u^4-112u^3-37u^2+560u-320=0$

但此式通常亦不可解，

故僅知 $x=5, y=15$ 爲一組所求之解。

(b) 解　$\log_{10}(\sqrt{7x+4}+25)-\log_{10}x=1$

$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{7x+4}+25}{x}\right)=1$

∴ $\frac{\sqrt{7x+4}+25}{x}=10$

或 $\sqrt{7x+4}=10x-25$ …………(1)

兩端自乘　$7x+4=100x^2-500x+625$

$100x^2-507x+621=0$

$(x-3)(100x-207)=0$

∴ $x=3$ 或 $\frac{207}{100}$

將 $x=3$ 代入(1)式：

$\sqrt{7x+4}=\sqrt{7\times3+4}=5$

$10x-25=10\times3-25=$ [illegible]

∴ $\sqrt{7x+4}=10x-25$

將 $x=\frac{207}{100}$ 代入(1)式：

$\sqrt{7x+4}=\sqrt{\frac{207}{100}\times7+4}=\frac{43}{10}$

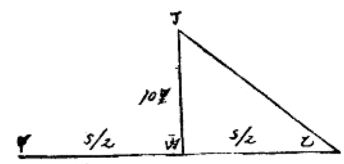
$10x-25=10\times\frac{207}{100}-25=-\frac{43}{10}$

∴ $\sqrt{7x+4}\neq10x-25$

故知　$x=\frac{207}{100}$ 爲增根

∴ x之值爲3

2. 解



設甲乙之距離爲S，車之速度爲V

依此車由甲地至乙地之情形，可得一方程式，如：

$$4=\frac{S}{2V}+\frac{10}{V}+\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}S)^2+10^2}}{V}$$

整理之 $8V=S+20+\sqrt{S^2+400}$ …………(1)

再依此車由乙地至甲地之情形，可得一方程式，如：

$$2=\frac{S}{V+3}$$

或 $V=\frac{S}{2}-3$ ……………………………(2)

代(2)入(1) $8\left(\frac{S}{2}-3\right)=S+20+\sqrt{S^2+400}$

$$2S-44=\sqrt{S^2+400}$$

兩端自乘 $9S^2-264S+1936=S^2+400$

$$8S^2-264S+1536=0$$

化簡 $S^2-33S+192=0$

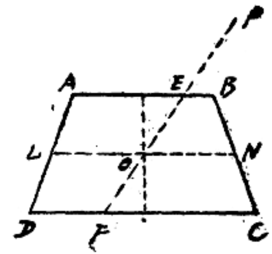
∴ $S=\frac{33\pm\sqrt{321}}{2}$

但 $S=\frac{33-\sqrt{321}}{2}$ 一根與本題不合，

故 甲乙兩地之距離爲 $\frac{33+\sqrt{321}}{2}$ 里(或25.45里)。

3. 設 ABCD爲一等腰梯形，P爲定點。

求作 過P點之直線分ABCD爲二等積形。



作法：作此梯形之中線LN，

取其中點O，連結PO，

則 PO卽爲所求之直線。

證：PO交AB，CD于E，F

AB ∥ LN ∥ CD，

∵ AL＝LD， BN＝NC

故 OE＝OF

故 OL，ON各爲梯形AEFD，BCFE之中線，OL＝ON

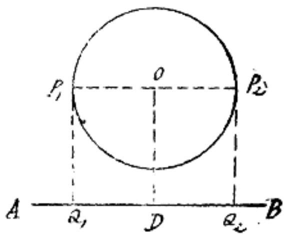
又此二梯形之高相等，

∴ PO爲所求之直線。

推究：本題若PO線不通過此梯形之上下底，則此作法不適用，但本題推究甚多，且無一普遍之作法，考試時間有限，實不能作更精密之研究，故略。

(O) 設　⊙O爲已知圓，AB爲已知直線，

求作　⊙O之切線與AB垂直。



作法：　過O作OD⊥AB於D。

過O作直徑P_1P_2∥AB

過P_1及P_2分別作P_1Q_1及P_2Q_2垂直於AB，

則P_1Q_1及P_2Q_2即爲所求之直線。

證：　∵　$P_1Q_1 \perp AB$，且$OD \perp AB$

∴　$P_1Q_1 \parallel OD$，

∵　$P_1P_2 \parallel AB$

∴　$O_1D_1 \perp P_1P_2$

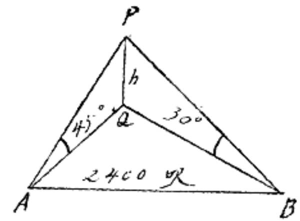
∴　$P_1Q_1 \perp P_1P_2$

∴　P_1Q_1爲⊙O之切線，即爲求作之直線，

同理　P_2Q_2亦爲⊙O之切線，亦爲求作之直線。

4.　設　山高爲h；A，B二地對于山之仰角分別爲45°及30°

AB之距離爲2400尺，　求山高h。



解：設P爲山之最高點，　PQ＝h，垂直於地面。

則　$h = AQ \tan 45^\circ = AQ$，

$h = BQ \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} BQ$

$\therefore AQ = \frac{1}{\sqrt{3}} BQ$ ………………(1)

但　$\overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 = 2400^2$　…………(2)

將(1)代入(2)　$\overline{AQ}^2 + 3\overline{AQ}^2 = 2400^2$

$\therefore \overline{AQ}^2 = 1440000$，$AQ = 1200$

$\therefore h = AQ = 1200$

故山高爲1200尺。

5.　(a) 32與221之最大公約數爲17。

(b) $x^2+3x+9=0$之二根爲 $\frac{3}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$

(c) $(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

(d) x^4+4無有理因子

(e) $\log_{10}0=-\infty$， $\log_{10}(-4)$不可解。

(f) $\sqrt[3]{17}$大於$\sqrt[4]{21}$。

(g) n多邊形諸內角之和爲2(n−2)rt∠s

(h) 與一定點距離等於一定長之點之軌跡，謂之圓。

(i) $\sqrt{\sin x-\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$之根爲 $\sin^{-1}\frac{48}{88}$

(j) $\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 45^0=1$

$\tan 60^0=\sqrt{3}$

國立中央大學

大代數，解析幾何

1. State Descarte's rules of signs. Prove that the equation

$$x^4+12x^2+6x-1=0$$

has just two imaginary roots.

2. Evalute the determinant.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 \end{vmatrix}$$

3. If four vertices of a quadrilateral are (0,0),(4,0),(6,6),(1,9)。 Find (a) the area of the quadrilateral, (b) the equation of the parabola passing through these vertices.

4. Three circles C_1 C_2 C_3 are such that the chord of intersection of C_1 and C_2 passes through the center of C_3 and the chord of intersection of C_1 and C_3 through the center of C_2. Prove that the chord of intersection of C_2 and C_3 passes through the center of C_1.

【解】

1. Descarte's rule of sign : − A equation f (x) =0 can not have a greater number of positive roots than it has variations. Nor a greater number of negative roots has the equation f (−x) =o has variations.

For the equation $f(x)=x^4+12x^2+6x-1=0$, has one variation, hence the equation f (x) =0 can not have more than one positive root.

And the equation $f(-x)=x^4+12x^2-6x-1 \neq 0$ has one variation, hence the equation $f(-x)=0$ can not have more than one negative root.

Every equation of even degree whose absolute term is negative has at least one positive and one negative root, since otherwise, the imaginary roots occur in pairs, the absolute term will be positive.

Hence $f(x)=o$ has just two real roots.

Now $f(x)=o$ is fourth degree, $\therefore 4-(1+1)=2$, that there can not be less than two imaginary roots, and in the four roots of $f(x)=0$, two of them are real being told above, therefore there can not be more than two imaginary roots.

i. e. $f(x)=0$ has just two imaginary roots.

2.

$$\begin{vmatrix} a, b, c, d \\ a^2, b^2, c^2, d^2 \\ a^3, b^3, c^3, d^3 \\ a^5, b^5, c^5, d^5 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} ab^2-a^2b, & ac^2-a^2c, & ad^2-a^2d \\ ab^3-a^3b & ac^3-a^3c, & ad^3-a^3d \\ ab^5-a^5b, & ac^5-a^5c, & ad^5-a^5d \end{vmatrix}$$

$$= abcd\,(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ (b+a), & (c+a), & (d+a) \\ (b^2+a^2)\,(b+a), & (c^2+a^2)\,(c+a), & (d^2+a^2)(d+a) \end{vmatrix}$$

$$= -abcd\,(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\begin{vmatrix} (b+a), & (c+a), & (d+a), \\ 1, & 1, & 1, \\ (b^2+a^2)\,(b+a), & (c^2+a^2)\,(c+a), & (d^2+a^2)\,(d+a) \end{vmatrix}$$

$$= -abcd\,(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\frac{1}{b+a}\begin{vmatrix} (b-c), & (b-d), \\ (b+a)(c+a)(c^2-b^2), & (b+a)(d+a)(d^2-b^2), \end{vmatrix}$$

$$= -abcd\,(b-a)(c-a)(d-a)\frac{(b-c)(b+a)(b-d)}{(b+a)}\begin{vmatrix} 1, & 1, \\ -(c+a)(c+b), & -(d+a)(d+b), \end{vmatrix}$$

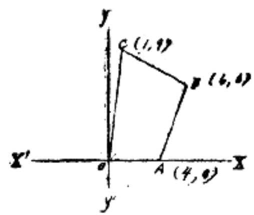
$$= -abcd\,(b-a)(c-a)(d-a)(b-c)(b-d)[(c+a)(c+b)-(d+a)(d+b)]$$

$$= -abcd\,(b-a)(c-a)(d-a)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

$$= abcd\,(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

3. (a) Let the four points $(0,0), (4,0), (6,6), (1,9)$, be O, A, B, C respectively.

The area of the quadrilateral OABC $=\frac{1}{2}(24+54-6)=36$



(3) Let the equation of parabola be in the form of

$x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Substituting the four points (0,0), (4,0), (6,6), (1,9) into the equation, we obtain four equations:

$F=0$ ……………………(1)

$16+4D=0$ ……………………(2)

$36+36B+36C+6D+6E=0$ ……(3)

and $1+9B+81C+D+9E=0$ ……(4)

or $F=0$ ……………………(1)'

$D=-4$ ……………………(2)'

$6B+6C+E+2=0$ ……………(3)'

$3B+27C+3E-1=0$ …………(4)'

From (3)' and (4)', eliminating E, we get:

$15B-9C+7=0$ ……………(5)

But the equation $x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ is that of a parabola.

$\therefore\quad B^2-4C=0$ ……………………(6)

Solve (5) and (6) we obtain

$$B=\frac{10\pm8\sqrt{2}}{3}$$

$$C=\frac{57\pm40\sqrt{2}}{9}$$

Substituting B, C, in (3)', we get

$$E=\frac{-(180\pm128\sqrt{2})}{3}$$

$\therefore$ The required equation of parabola is

$$9x^2+(30\pm24\sqrt{2})xy+(57\pm40\sqrt{2})y^2-36x-(540\pm384\sqrt{2})y=0$$

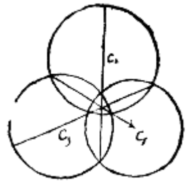
4.) Let the equations of the three circles C_1, C_2, C_3 be

$C_1=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

$C_3=x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$

Whose centers are $\left(-\frac{D_1}{2},-\frac{E_1}{2}\right),\left(-\frac{D_2}{2},-\frac{E_2}{2}\right),\left(-\frac{D_3}{2},-\frac{E_3}{2}\right)$ respectively.



The common chord of C_1 and C_2 is

$$L_1=(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

The common chord of C_3 and C_1 is

$$L_2=(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+(F_3-F_1)=0$$

And the common chord of C_2 and C_3 is

$$L_3=(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+(F_2-F_3)=0$$

Since the center of C_3 lies on L_1 and the center of C_2 lies on L_2

$$\therefore\ (D_1-D_2)\left(-\frac{D_3}{2}\right)+(E_1-E_2)\left(-\frac{E_3}{2}\right)+(F_1-F_2)=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

and $$(D_3-D_1)\left(-\frac{D_2}{2}\right)+(E_3-E_1)\left(-\frac{E_2}{2}\right)+(F_3-F_1)=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)+(2), We get $$\frac{-D_1D_3+D_1D_2}{2}+\frac{-E_1E_3+E_1E_2}{2}+(F_3-F_2)=0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

or $$(D_2-D_3)\left(-\frac{D_1}{2}\right)+(E_2-E_3)\left(-\frac{E_1}{2}\right)+(F_2-F_3)=0$$

This is the condition that L_3 passes through the center of C_1　　　　Q.E.D.

國立中山大學

I. 設三角形ABC之高為2尺，其底邊BC之長為3尺，又一平行於底邊BC之直線交其他二邊於D,E。D,E二點與底邊上任一點F成三角形DEF，今知以DE為邊之正方形及DEF三角形二者之面積之和為$\frac{135}{24}$方尺，求DE與BC之距離。

II. 解方程式 $8x^3-16x^2+12x-3=0$

III. 已與一圓$(x-1)^2+(y-2)^2=9$，試求此圓之切線平行於直線$y=2x+3$者。

IV. 繪畫曲線 $y^2(1-x)=x^3$

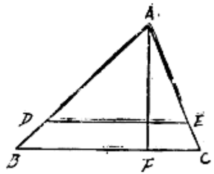
V. 試解聯立方程式：

$$2x-y+z=-12$$
$$y^2+\frac{y^2+z^2}{4}=38$$
$$xyz=-24$$

VI. 求曲線 $3x^2+4xy-4y^2-18x+4y+11=0$ 之漸近線,及作此曲線之圖。

【解】

1.



設　DE與BC之距離為d,

則$\triangle DEF=\frac{1}{2}d\cdot DE$

依題意　$\overline{DE}^2+\frac{1}{2}d\cdot DE=\frac{135}{24}$　……(1)

再　$\triangle ABC=3$

梯形 $DECB=\frac{3}{2}DE\cdot d$

∴　$\triangle ADE=\triangle ABC-$梯形$DECB=3-\frac{3}{2}DE\cdot d$

但　$\triangle ADE=\frac{1}{2}DE(2-d)$

∴　$\frac{1}{2}DE(2-d)=3-\frac{3}{2}DE\cdot d$

移項　$DE(1-\frac{1}{2}d+\frac{3}{2}d)=3$

$DE(1+d)=3$

∴　$DE=\frac{3}{1+d}$　………………(2)

將(2)代入(1), $\left(\frac{3}{1+d}\right)^2+\frac{1}{2}d\left(\frac{3}{1+d}\right)=\frac{135}{24}$

或　$\frac{9}{(1+d)^2}+\frac{1}{2}d\left(\frac{3}{1+d}\right)=\frac{135}{24}$

$216+36d(1+d)-135(1+d)^2=0$

化簡　$11d^2+26d-9=0$

∴　$d=\frac{-13\pm\sqrt{169+99}}{11}=\frac{-13\pm2\sqrt{77}}{11}$

但　$d=\frac{-13-2\sqrt{77}}{11}$與題意不合,

故　DE與BC之距離為$\frac{-13+2\sqrt{77}}{11}$

2. 解:　$8x^3-16x^2+12x-3=0$

用綜合除法,以$1,-1,3,-3,\frac{1}{2}$　$-\frac{1}{2}$等數試除之。

因　8,　-16,　12,　-3 $\lfloor\frac{1}{2}$

　　4,　-6,　$+3$

3,	-12;	$+6$	2
4,	-6,	$+3$	

∴ $(2x-1)$必爲此式之一因式。

∴ $8x^3-16x^2+12x-3=(2x-1)(4x^2-6x+3)=0$

∴ $2x-1=0$ 或 $x^2-6x+3=0$

∴ $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{4}$

故 $x=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3+\sqrt{3}\,i}{4}$ 或 $\frac{3-\sqrt{3}\,i}{4}$

3. 解: $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

移軸使新原點O'爲(1,2),則此定圓之方程式變爲:

$$x'^2+y'^2=9$$

設所求切線之斜率爲 m, 則該切線之方程式爲

$$y'=mx'\pm3\sqrt{1+m^2}\quad\cdots\cdots(1)$$

因新軸與舊軸平行,故$y=2x+2$之斜率$m'=2$之值不變。

∴此切線與此直線平行, ∴ $m=m'=2$

代入(1) $y'=2x'\pm3\sqrt{5}$

再將軸移回, 以$(x-1)$代x', $(y-2)$代y'

得: $(y-2)=2(x-1)\pm3\sqrt{5}$

移項化簡,得 $2x-y+(\pm3\sqrt{5})=0$, 即爲所求之切線。

4. $y^2(1-x)=x^3$

討論 1. 此方程式之軌跡通過原點。

2. 該軌跡與X軸對稱。

3. 該軌跡於X及Y軸無截部。

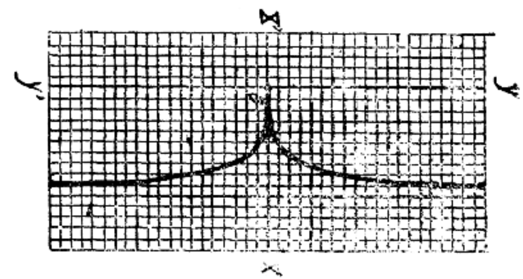
4. 解y, $y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

故x之值不得爲負數,亦不得大於1。

5. 由上式觀之,當$x=1$時,y爲∞,故y當$x=1$時向X軸之上下方趨於無限大。

6. 此軌跡之名爲 Cissoid of Diocles。

作圖:



5. $2x-y+z=-12\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+\frac{y^2+z^2}{4}=38\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$xyz=-24 \cdots\cdots (3)$$

$(1)^2$ $\quad 4x^2+y^2+z^2-4xy+4xz-2yz=144 \quad \cdots\cdots(4)$

$(2)\times 4,\ 4x^2+y^2+z^2 \qquad =152 \quad \cdots\cdots(5)$

$(4)-(5) \qquad -4xy+4xz-2yz=-8$

$$-2xy+2xz-yz=-4 \quad \cdots\cdots(6)$$

以$2x,-y,z$爲三根，作t之三次方程式如下：

$$(t-2x)(t+y)(t-z)=0$$

展開即得 $t^3-(2x-y+z)t^2+(-2xy+2xz-yz)t+2xyz=0$

由將(6)，(1)及(3)之半倍代入上式，即得：

$$t^3+12t^2-4t-48=0$$

$$(t+12)(t^2-4)=0$$

$\therefore \quad t=-12,2$ 或$-2.$

但 $2x,-y,z$ 亦爲此 t 三次方程式之根，故

(A) $2x=-12,-y=2,z=-2$則得$x=-6,y=-2,z=-2,$

(B) $2x=-12,-y=-2,z=2$，則得$x=-6,y=2,z=2,$

(C) $2x=2,-y=-12,z=-2$，則得 $x=1,y=12,z=-2,$

(D) $2x=2,-y=-2,z=-12$，則得 $x=1,y=2,z=-12,$

(E) $2x=-2,-y=-12,z=2$，則得$x=-1,y=12,z=2,$

(F) $2x=-2,-y=2,z=-12$，則得 $x=-1,y=-2,z=-12.$

6. 解：設此雙曲線之漸近線之方程式爲$y=mx+b$ (1)

代入 $3x^2+4xy-4y^2-18x+4y+11=0$，削去$y$項

$$3x^2+4x(mx+b)-4(mx+b)^2-18x+4(mx+b)+11=0$$

整理 $(3+4m-4m^2)x^2+(4b-8mb-18+4m)x-4b^2+4b+11=0$

因漸近線與雙曲線之兩交點在無限，故須上式x之二根爲無限大，亦即：

$$3+4m-4m^2=0,\ 且\ 4b-8mb-18+4m=0$$

$$\therefore \quad m=-\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2}$$

$$則 \quad b=\frac{5}{4} \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

代入(1)，即得所求之漸近線方程式爲

$$2x+4y-5=0$$

及 $$2x-2y-1=0$$

圖略。

國立中央政治學校

算術

(1) 狐行4步之時，犬行3步，犬5步所行之路，等於狐9 步所行之路，今狐先行602步，犬追之，問犬行若干步始能追及?

(2) 求12.34之立方根至小數二位爲止。

代數

(1) 劈下列各式之因數:

(a) $3a^3+a-6a^2b-2b$

(b) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$

(c) $a^4+a^2b^2+b^4$

(2) 解明 $\frac{6x+5}{8x-15}-\frac{1+8x}{15}=\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}$

平面幾何

(1) 試言已知三角形之兩角及一角之對邊，求作其形之方法。

(2) 兩圓相外切（tangent externally）於A，又有一外公切線（common external tangent）切兩圓於B及C，試証BAC爲直角（right angle）。

三角

(1) 求証下列之恆等式:

$\cos A\,(2\sec A+\tan A)\,(\sec A-2\tan A)=2\cos A-3\tan A$

(2) 求解下列方程式x之值:

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

大代數

(1) 詳論幾何級數之收斂與非收斂。

(2) 設a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 爲方程式

$$x^5+P_1x^4+P_2x^3+P_3x^2+P_4x+P_5=0$$

之根，証明

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)(1+a_3^2)(1+a_4^2)(1+a_5^2)=(1-P_2+P_4)^2+(P_1-P_3+P_5)^2$$

【解】

算術

(1) $602步\div\left(\frac{9}{5}\times\frac{3}{4}-1\right)=602步\times\frac{20}{7}=1720步$

$1720步\times\frac{3}{4}=1290步$

故犬行1290步後，即可及狐。

(2)

```
                      12.340,000 | 2.31
                       8
3×20²=1200          | 4 340
3×20×3=180          |
   3² =  9          |
        1389        | 4 167
3×230²=158700       |   173 000
3×230×1=  690       |
     1² =   1       |
        159391      |   159 391
                    |    13 609
```

$\sqrt[3]{12.3}=2.31$

代數

(1) (a) $3a^3+a-6a^2b-2b=a(3a^2+1)-2b(3a^2+1)$

$=(a-2b)(3a^2+1)$

(b) $(2x+3y)^2-(x-4y)^2=[(2x+3y)+(x-4y)]$
$[(2x+3y)-(x-4y)]$

$=(2x+y+x-4y)(2x+3y-x+4y)=(3x-y)$
$(x+7y)$

(c) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2) 解：$\frac{6x+5}{8x-15}-\frac{1+8x}{15}=\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}$

移項 $\frac{6x+5}{8x-15}=\frac{1-x}{3}+\frac{3-x}{5}+\frac{1+8x}{15}$

$\frac{6x+5}{8x-15}=\frac{5-5x+9-3x+1+8x}{15}$

$\frac{6x+5}{8x-15}=1,$

$6x+5=8x-15$

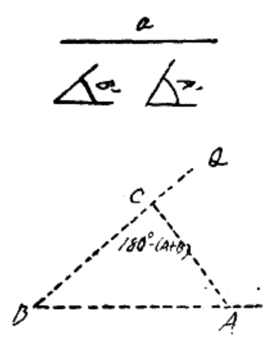
移項 $2x=20$

$\therefore x=10$

平面幾何

(1) 設 ∠A′,∠B′,線段a′爲已知

求作 △ABC，令∠A＝∠A′，∠B＝∠B′，∠A之對邊 a＝a′，



作法 作∠ABQ＝∠B′ 於BQ虛線上取BC＝a′ 以C爲端點，作虛?象 CA 交BA於A，

令∠C＝180°－(∠A′＋∠B′)

則△ ABC 即爲求作之三角形

証 ∠A＋∠B＋∠C＝180°

∠B＝∠B′，∠C＝180°－(∠A′＋∠B′)

∴ ∠A＝∠A′且a＝a′

∴ △ ABC 爲求作之三角形

(2) 設 ⓢ0，0′外切於A，BC爲ⓢ0，0′之外公切線，

求証 ∠BAC＝90°

証 作ⓢ0，0′之內公切線AN，與BC相遇於N，

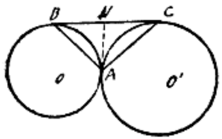
則 ∴ AN＝BN（自圓外一點所作圓之二切線相等）

∴ △NAB爲等腰三角形，

$\angle CBA = \angle BAN$

同理 $\angle BCA = \angle CAN$

$\therefore \angle CBA + \angle BCA = \angle BAN + \angle CAN$



即 $\angle CBA + \angle BCA = \angle BAC$

但 $\angle CBA + \angle BCA + \angle BAC$

$= 2rt\angle s$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$

三角

(1) $\cos A\,(2\sec A + \tan A)(\sec A - 2\tan A)$

$= \cos A \left(\frac{2+\sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1-2\sin A}{\cos A}\right)$

$= \frac{(2+\sin A)\ (1-2\sin A)}{\cos\ A}$

$2\cos A - 3\tan A = 2\cos A - \frac{3\sin A}{\cos A}$

$= \frac{2\cos^2 A - 3\sin A}{\cos A} = \frac{2-2\sin^2 A - 3\sin A}{\cos A}$

$= \frac{(2+\sin A)(1-2\sin A)}{\cos A}$

$\therefore \cos A(2\sec A + \tan A)(\sec A - 2\tan A) = 2\cos A - 3\tan A$

(2) $\because \sin 2x = 2\sin x\ \cos x$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\therefore \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

$= \sin x + 2\sin x\ \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x$

$= 2\sin x(2 + \cos x - 2\sin^2 x)$

$= 2\sin x[2 + \cos x - 2(1 - \cos^2 x)]$

$= 2\sin x\ [\cos x + 2\cos^2 x] = 2\sin x\ \cos x\ (1 + 2\cos x)$

令 $2\sin x\ \cos x(1 + 2\cos x) = 0$

$\therefore \sin x = 0,\quad x = n\pi$

或 $\cos x = 0\quad x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

或 $\cos x = -\frac{1}{2},\quad x = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

大代數

(1) 詳論幾何級數之收歛與非收歛。

解：在幾何級數$a + ar + ar^2 + \cdots\cdots$中，

其前 n 項之和爲 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

當n爲無窮大時：

(A) 若r之絕對值小於1，則 $\lim r^n = 0$

$\lim S_n = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

故此級數收歛。

(B) 若r之絕對值爲1，則此級數如

(a) 當 $r = 1$，　$a + a + a + a \cdots\cdots$

(b) 當 $r = -1$，　$a - a + a - a \cdots\cdots$

在(a)其和以無窮為極限，在(b)其和不定，故此級數皆非收歛，

(C) 若r之絕對值大於1，則 $\lim r^n = \infty$

$$\lim S_n = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \lim a(1+r+r^2+\cdots)$$

$$= \infty$$

故此級數非收歛，

(2) 設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為方程式，

$$x^5 + P_1x^4 + P_2x^3 + P_3x^2 + P_4x + P_5 = 0$$

之根，証明，

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)(1+a_3^2)(1+a_4^2)(1+a_5^2) = (1-P_2+P_4)^2+(P_1-P_3+P_5)^2$$

証：今求一方程式，令其根為

$$f(x) = x^5 + P_1x^4 + P_2x^3 + P_3x^2 + P_4x + P = 0$$

之根之平方加以1，其求法為於

$$y = x^2+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$f(x) = 0$$

間消去x，從(A)，$x = \pm\sqrt{y-1}$，代入 $f(x)=0$，得

$$\pm(y-1)^2\sqrt{y-1} + P_1(y-1)^2 \pm P_2(y-1)\sqrt{y-1} + P_3(y-1) \pm P_4\sqrt{y-1} + P_5 = 0$$

$$\pm\sqrt{y-1}\,[y^2+(P_2-2)y+(1-P_2+P_4)] = -P_1y^2 + (2P-P_3)y-(P_1-P_3+P_5)$$

兩端平方，右端之結果全移往左端，得一五次方程式(只注意首末二項)

$$\phi(y) = y^5 + \cdots\cdots - [(1-P_2+P_4)^2+(P_1-P_3+P_5)^2] = 0$$

即為所求者，於是 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為 $f(x)=0$ 之根，而 $1+a_1^2, 1+a_2^2, 1+a_3^2, 1+a_4^2, 1+a_5^2$，遂為 $\phi y=0$ 之根，故 $(1+a_1^2)(1+a_2^2)(1+a_3^2)(1+a_4^2)(1+a_5^2)$ 為 $\phi(y)=0$ 之常數項，加以變號，故

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)(1+a_3^2)(1+a_4^2)(1+a_5^2) = (1-P_2+P_4)^2+(P_1-P_3+P_5)^2$$

國立交通大學(大代數)

1. Resolve $\dfrac{5x+12}{x^2(x^2+4)}$ into partial fractions.

2. If a, b, c, denote unequal positive numbers, prove that

$$a^3+b^3+c^3 > 3abc$$

3. Find the nth term and sum of n terms of the series 8, 16, 0, −64, −200, −432, by the method of differences.

4 A boy is able to solve on the average three out of five

of the problems set him. If eight problems are given in an examination and five are required for passing, what is the chance of his passing?

5. Solve the following pair of equations by finding the resultant:

$$x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0$$
$$x^2-xy-2y^2-5x-5y=0$$

6. Find the simplest fraction which will express:

$$\pi=3.14159265\cdots\cdots$$

with an error which is lest than 0.000001

7. Find the value of the determinant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

8. Form the equations of which the roots are $2, 4, -3; 3, -2, -4$.

【解】

1. Put $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\equiv\frac{5x+12}{x^2(x^2+4)}$

then $\frac{Ax^2+4A+Bx^3+4Bx+Cx^3+Dx^2}{x^2\ (x^2+4)}$

$$\equiv\frac{5x+12}{x^2(x^2+4)}$$

$(B+C)x^3+(A+D)x^2+4Bx+4A\equiv5x+12$

$\therefore\ B+C=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$A+D=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$4B=5\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$4A=12\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

From (4), We get $A=3$, and from (3), $C=\frac{5}{4}$.

Substitute these into (2) and (1) respectively, we have

$$C=-\frac{5}{4}, \text{and } D=-3$$

Hence $\frac{5x+12}{x^2(x^2+4)}\equiv\frac{3}{x^2}+\frac{5}{4x}-\frac{5x+12}{4(x^2+4)}$

2. Proof:

Since $a\neq b$, $a-b\neq0$,

$\therefore\ (a-b)^2>0$

or $a^2-2ab+b^2>0$

or $a^2-ab+b^2>ab$

Since a, b are positive $(a+b)\ (a^2-ab+b^2)>(a+b)ab$

or $a^3+b^3>a^2b+ab^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

Similarly $b^3+c^3>b^2c+bc^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$