·内部教材·

高等代数教程

（上　册）

中国人民解放军工程技术学院

1977年8月

目　录

准备知识

学习高等代数除需要初等代数、初等几何、解析几何等知识外，还需要“集合”、“数域”及“反馈移位寄存器”等概念。现补充如下：

一、集合：我们在研究和处理事物中，总要面对一些事物或数据，我们把这些事物的总体叫做**集合**或叫**集**。例如我们研究军队工作，把军人的全体叫做集合。集合是处理事物的最基本最简单的概念，很容易理解和掌握。不过，在用这个概念时要注意以下两点：

1°称为集合的这些事物都具有某一方面的共同性质，即一个集合中的事物在某一种意义下有共性。

2°任何事物对于某一集合而言，或是属于该集合，或是不属，二者必居其一。

例如：自然数全体1、2、3、……称为一集合，某一个六边形的六个顶点是一个集合，由已给定的15个元素任取4个的所有组合也是一个集合等等。

我们用大写英文字母A、B、C、……表示集合；集合中的事物称为**元素**，用小写英文字母a、b、c、……表示。若元素a属于集合A，简记为：

$$a \in A$$

若元素a不属于集合A，则简记为：

$$a \overline{\in} A$$

一个集合的元素如果是有限多个，叫做**有限集**。如果是

无限多个，叫做**无限集**。不含任何元素的集合，叫做**空集合**，用 0 表示。例如方程式$x^2+1=0$的实根全体就是空集合。

给出一个集合可以有两种方式。一种是列出该集合的全部元素，例如集合A共有三个元素a、b、c，记为：

$$A=\{a,\ b,\ c\}$$

显然，这种给出方式不适合于无限集。另一种方式是写出一般元素，例如所有偶数的集合：

$$A=\{2n\ (n\text{为整数})\}$$

定义：假若集合B的所有元素都是集合A的元素，则叫集合B是集合A的**子集合**，简称**子集**；也可以叫做**集合B包含在集合A中**。记做：

$$B\subseteq A$$

根据这一定义，**一个集合本身也是它自己的子集。**

为了方便起见，**我们规定空集合是任一集合的子集。**

定义：如果两个集合A与B含有完全相同的元素，即满足：

1）若元素$a\in A$，则有$a\in B$。

2）若元素$b\in B$，则有$b\in A$。

那么，就叫做集合A与B**相等**。

这一定义也可以换一个说法：

如果有两个集合A与B满足：

1）$A\subseteq B$

2）$B\subseteq A$

则叫做这两个集合**相等**。

定义：如果集合B是集合A的一个子集，但并不等于A，

则叫集合B是集合A的**真子集**。记做$B \subset A$。

例1．设集合 $A=\{a, b, c\}$，则A的子集共有八个：

$\{a, b, c\}$；$\{a, b\}$；$\{a, c\}$；$\{b, c\}$；

$\{a\}$；$\{b\}$；$\{c\}$；0．

其中除第一个子集$\{a, b, c\}$不是真子集外，其余全是真子集。

例2．设集合N代表自然数集，集合Q代表有理数集，则N是Q的真子集。

二、数域：在初等数学里我们学过多项式的因式分解，例如分解多项式x^2-4的因式，显然有$x^2-4=(x+2)(x-2)$；但分解多项式x^2-2的因式时，在学习无理数前认为它是不可分解的，而学过无理数后，便有$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$；再如分解多项式$x^2+1$的因式时，在学习复数前也认为不可分解，但学过复数后，又有$x^2+1=(x+i)(x-i)$（其中i是虚数单位，$i=\sqrt{-1}$）。所以一个多项式能不能分解，牵涉到因式的系数范围问题，因此，讨论因式分解时必须先明确在哪个范围内来讨论。不仅因式分解如此，研究其它问题也是这样，这是一个基本问题。对于讨论问题的范围，一般要求能够在这一范围内作加、减、乘、除等四则运算，因此我们规定：

定义：如果数集P满足：

1°包含0与1两个元素。

2°P中任意两个元素的和、差、积、商（除数不为0）仍

然是P中的元素。即如果$a \in P$，$b \in P$，则$a \pm b \in P$，$ab \in P$，$a/b \in P(b \neq 0)$，则叫P是一个**数域**。

显然，有理数集、实数集、复数集等都是数域。我们分别用字母Q、R、K来代表。整数集、自然数集等都不是数域。

上述定义中的第二点也可以简述为：数集P对加、减、乘、除(除数不为零)等运算是**封闭的**。对某一运算封闭的意义即指集P中任意两个元素经该运算后，其结果仍在集P中。

例1．试判断一切形如

$a+b\sqrt{2}$ (a、$b \in Q$；Q表有理数域)的数是否构成数域。

解：设一切形如$a+b\sqrt{2}$ (a、$b \in Q$)的数集为P。

1°首先判断0、1是否在数集P内，因为a、b可以是任意有理数，当$a=0$，$b=0$时，$a+b\sqrt{2}=0$；当$a=1$，$b=0$时，$a+b\sqrt{2}=1$，故$0, 1 \in P$。

2°对加、减、乘、除(除数不为零)是否封闭。

设 $a_1+b_1\sqrt{2} \in P$，$a_2+b_2\sqrt{2} \in P$ (a_1、b_1、a_2、$b_2 \in Q$)

1）对加、减法：

$c_1=(a_1+b_1\sqrt{2}) \pm (a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1 \pm a_2)+(b_1 \pm b_2)\sqrt{2}$，因$a_1 \pm a_2$、$b_1 \pm b_2 \in Q$，故 $c_1 \in P$

2）对乘法：

$c_2=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$，因$a_1a_2+2b_1b_2$、$a_1b_2+a_2b_1 \in Q$故$c_2 \in P$。

3）对除法：设$a_2+b_2\sqrt{2} \neq 0$，显然此时$a_2-b_2\sqrt{2}$

$\neq 0$。

$$c_3=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

因为 $\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$、$\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\in Q$

故 $c_3\in P$

综上即知，数集P为一数域。

例 2．所有奇数组成的数集能否构成数域？

解：由于 0 元素不是奇数，不在集内。所以奇数集不构成数域。

必须指出：**有理数集是最小的数域**。换句话说，即**所有的数域都包含有理数域**。因为任何数域都包含元素 1，于是 $1+1=2$，$1+2=3$，……$1-1=0$，$0-1=-1$ ……都在此数域内。即此数域必包含全体整数。而任何有理数都可以表示成两个整数的商，所以这个数域必包含所有有理数。故有理数集是最小的数域。

数域的概念固然重要，但在我们工作中经常还要用到下述的“模 2 域”：

设数集P中只包含两个元素：0，1；规定它们的运算如下：

加法：加法用符号⊕来表示，简称**模 2 加**。由于集P中只有两个元素，所以加法不外乎四种情况：$0\oplus 0$，$0\oplus 1$，$1\oplus 0$，$1\oplus 1$。我们规定：$0\oplus 0=0$，$0\oplus 1=1$，1

$\oplus 0=1$，$1\oplus 1=0$。列表如下：

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

乘法：乘法用符号$\otimes$或$\odot$来表示，简称**模2乘**。具体运算也只有四种，规定如下：

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

减法：我们规定减法为加法的逆运算，用符号$\ominus$来表示。如求$0\ominus 1$，即求1加上什么数为零。根据加法表即知：$1\oplus 1=0$，所以$0\ominus 1=1$，其余类推。实际上，减法和加法是完全等同的，如$0\ominus 1=0\oplus 1=1$，$1\ominus 1=1\oplus 1=0$。

除法：我们规定除法（除数不能为0）是乘法的逆运算，用符号$\oplus$表示。除法不外乎两种情况：$0\oplus 1$，$1\ominus 1$。显然有$0\ominus 1=0$，$1\oplus 1=1$。实际上乘、除法也完全等同，即$0\ominus 1=0\otimes 1=0$，$1\oplus 1=1\otimes 1=1$。所以此集合中只有加乘法就可以了，减法、除法分别等同于加法、乘法。

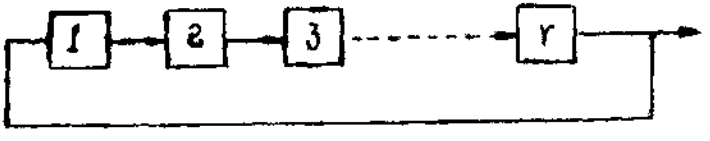
按上面规定的运算法则很容易验证加、乘法符合交换律、结合律、分配律等。

显然，数集P对上述运算都封闭，我们把P叫做**模2域**，或叫**二元域**。简记做$GF(2)$。

模2域是一种很重要的域，它在电子仪器上有广泛的应用。注意：为叙述方便起见，在本书前五章中，统一用"域"代表数域和模2域，需要区别时，再分别加以指出。

三、反馈移位寄存器：本书为了加强理论与实际的联系，将用一定篇幅把代数知识应用到反馈移位寄存器上。反馈移位寄存器简称移存器，是一种比较新的电子设备，近二十年才迅速发展起来，应用的范围也日益广泛，目前它用于电子计算机的自动控制，雷达的测距跟踪，通讯工作中的编译码等方面。由于移存器将来还要专门学习，现在只简单介绍一下它的工作原理。

反馈移存器主要是用于产生0，1两个数字的序列，这样的序列称为**输出序列**，一般简记作a。先看一种比较简单的移存器，它的输出序列是单纯循环的，叫**纯循环移存器**。其示意图如图一



图一

图一中方块1、2、……r由电学上的触发器组成，叫做**级**，共有r级。触发器一般有低电位和高电位两个状态，通常用模2域上0，1两个元素分别表示。每给移存器加上一个移位脉冲时，各级上的数字向右移一位。图中箭头表示移位的方向，最后一级的数字进行输出。同时这一数字也反过来移到左边第一级去，叫做**反馈**。如果一个四级移存器各触发器开始的状态是：

0 1 1 1

这一状态叫做**初始状态**。在加第一次移位脉冲后，移存器的

状态变为：

1 0 1 1

叫做**第一拍状态**。同时输出数字“1”。再加上一个移位脉冲，第二拍状态为：1 1 0 1同时输出“1”，如此继续，则得下表：

状　态	序　列 $\underline{a}$
（初始状态 0 1 1 1）	
1 0 1 1	1
1 1 0 1	1
1 1 1 0	1
0 1 1 1	0
⋮	⋮

第四拍的状态和初始状态相同，以后的输出产生循环。输出的是四个数字1 1 1 0循环的序列。即：

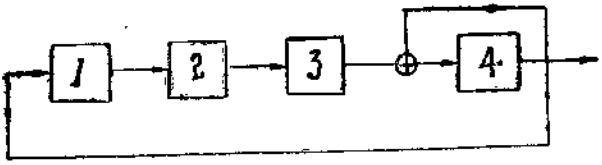
$$\underline{a}=(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\cdots\cdots)$$

一般来说，**循环序列**是指由有限个数字依次不断重复出现的序列，这有限个数字的个数叫做**循环数**。例如序列1 0 1 0 1 0 1 0……的循环数是2，或4，或6，……，或$2n$。最小的循环数叫序列的**周期**，如上序列的周期为2。上述输出序列$\underline{a}$的周期为4。

纯循环移存器不能满足实际工作的需要，因此移存器在反馈上还有多种形式。为说明方便起见，先举两个四级移存器的例子。

例1．四级移存器示意图如图二所示

这种移存器在第四级有抽头，其效果是第四级上的数字用模



图二

2域的加法加到第三级后再移位。设其初始状态为0 1 1 1，则第一拍状态为1 0 1 0，输出数字为“1”。其余各拍列表如下：

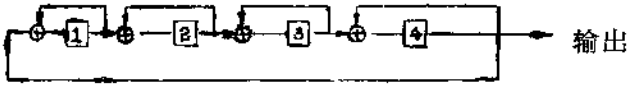
拍	状 态	$\underline{a}$
（初始状态	0 1 1 1）	
1	1 0 1 0	1
2	0 1 0 1	0
3	1 0 1 1	1
4	1 1 0 0	1
5	0 1 1 0	0
6	0 0 1 1	0
7	1 0 0 0	1
8	0 1 0 0	0
9	0 0 1 0	0
10	0 0 0 1	0
11	1 0 0 1	1
12	1 1 0 1	1
13	1 1 1 1	1
14	1 1 1 0	1
15	0 1 1 1	0

刚好第十五拍又回到初始状态，输出序列开始循环，故输出序列周期为15。即：

$$\underline{a}=(1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\cdots\cdots)$$

例1的移存器是从第四级抽头的，显然从任何一级抽头都可以，并且也可以同时从两级、三级……抽头。例如级间模2加移存器便是从各级同时抽头的。见例2。

例2．级间模2加移存器如图三所示



图三

设其初始状态为：0 1 1 1，第一拍状态为：1 1 0 0，即第二级数字模2加到第一级上再移位到第二级，第三级数字模2加到第二级上再移位到第三级，……第一级数字模2加到第四级上再移位到第一级，如此继续，可得下表：

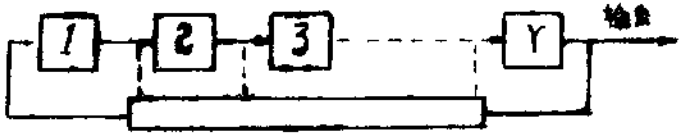
拍	状 态	$\underline{a}$
（初始状态	0 1 1 1）	
1	1 1 0 0	1
2	1 0 1 0	0
3	1 1 1 1	0
4	0 0 0 0	1
5	0 0 0 0	0
⋮	⋮	⋮

输出序列

$$\underline{a} = (1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\cdots\cdots)$$

从第五个数字以后便永远是零了，这种输出序列是断头的，实用上无意义。

由上述两个例题可以看出：反馈移存器主要是由两部分组成，一部分是“触发器”，用高低电位来表示状态。另一部分是为实现反馈运算的电路，叫做**反馈逻辑电路**（因为移存器内部所进行的运算都是逻辑运算，如模2加即为逻辑运算，其它如非门等也是逻辑运算）。故一般反馈移位寄存器可用图四来表示。



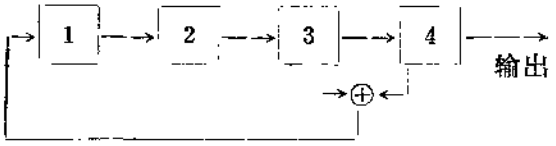
图四

图四所示移存器是广义的，狭义的移存器可以专指各级只反馈到第一级的情况。但因为应用上没有什么本质区别，故本书讲的广泛些。严格的移存器定义等到专门讲解移存器时再研究。

根据反馈逻辑运算的不同，移存器又分为两种：一种叫做**线性的**，一种叫做**非线性的**。怎样区分线性的和非线性的，也等到将来再研究。

第一章　行列式

设四级线性移存器示意图如图一所示，



图一

如果已知某拍的状态为$S_1S_2S_3S_4$，求前一拍状态。

设前一拍状态为$x_1x_2x_3x_4$，显然有：

$$\begin{cases} x_3 \oplus x_4 = S_1 \\ x_1 = S_2 \\ x_2 = S_3 \\ x_3 = S_4 \end{cases}$$

上式是一个简单的四元一次方程组，它的结果非常容易求出：

$$\begin{cases} x_1 = S_2 \\ x_2 = S_3 \\ x_3 = S_4 \\ x_4 = S_1 \ominus S_4 \end{cases}$$

即前一拍状态为：$S_2S_3S_4\ (S_1 \ominus S_4)$

如果线性移存器的级数比较多，如五级、六级……，甚至

几十级，并且反馈逻辑电路也比较复杂，那么，列出的方程组就不会这样简单，解起来也就不很容易。因此，我们必须学会解含任意多个未知数和任意多个方程的一次方程组，这种方程组叫做**线性方程组**。

线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

其中x_1，x_2，$\cdots x_n$表示未知数。$a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$为已知数，称为方程组的**系数**。$b_i(i=1,2,\cdots m)$为已知数，叫**常数项**。这些数假设都是在某一域P内。

我们准备介绍两种解线性方程组的方法，一种是消元法，另一种是利用行列式解。先讲利用行列式解。

在初等数学里已经学过利用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组，具体解法是：

设三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \quad (2)$$

其系数行列式D为：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

当$D\neq 0$时，其解为：

$$x=\frac{D_x}{D}\quad,\qquad y=\frac{D_y}{D}\quad,\qquad z=\frac{D_z}{D}$$

其中：

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$

这一方法能否推广到解多元的线性方程组呢？答案是肯定的，但必须对行列式的问题加以深入的研究才可能具体解决，本章便对行列式的概念，性质，计算等进行系统的学习，下一章再专门解决线性方程组的问题。

§1. 行列式定义

回忆初等代数里二阶行列式的定义是：设域P中有四个数a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}排成一个表：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

这个表叫做**二阶方阵**，代数式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$叫做这个方阵