第五章　线性系统理论引论

第六章　最佳滤波原理

§5－4　线性系统的不变量及其规范形式

线性系统的不变量的讨论，是线性系统理论的一个重要方面．线性系统的不变量描述，使线性系统的表示"参数化"了，也就是说，线性系统的特性可以被一组参数唯一地确定，这就为解决系统的识别和参数估计提供了方便．

在线性系统不变量研究的基础上，可以得到系统描述的规范形式。线性系统描述的规范形式，相当于矩阵理论中的法式（例如若唐法式和自然法式）．线性系统的规范形式的研究，不仅进一步弄清楚了线性系统的代数结构，而且也为模型识别等提供了手段．

这小节只讨论常系数、线性系统的情况．

5－4－1　状态矢量的线性变换及系统的不变量

设常系数、线性系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \qquad (5\text{—}4\text{—}1)$$

如果对状态矢量作线性变换，即设

$$X(t) = TZ(t) \qquad (5\text{—}4\text{—}2)$$

当T是非奇异方阵时，则得：

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1}ATZ(t) + T^{-1}Bu(t) \\ Y(t) = CTZ(t) + Du(t) \end{cases}$$

上式可简化成

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=A_2Z(t)+B_2u(t)\\ Y(t)=C_2Z(t)+D_2u(t)\end{cases}\qquad (5\text{—}4\text{—}3)$$

式中

$A_2=T^{-1}AT$ ； $B_2=T^{-1}B$ ； $C_2=CT$ ； $D_2=D$

因此可以说，系统S：（A，B，C，D）经过线性变换（5—4—2）变换成系统S：（A_2，B_2，C_2；D_2），并且当T是非奇异矩阵时，A_2与A相似，$D_2=D$。

由于T是非奇异的，因此也可设$S=T^{-1}$则$A_2=SAS^{-1}$，$B_2=SB$，$C_2=CS^{-1}$，$D_2=D$。

系统（5—4—3）的特征方程为

$$|SI-A_2|=0$$

也就是

$$|SI-T^{-1}AT|=0$$

即

$$|T^{-1}(SI-A)T|=0$$

由于T是非奇异的，因此得：

$$|SI-A|=0\qquad (5\text{—}4\text{—}4)$$

显然上式与系统（5—4—1）的特征方程具有相同形式。

如果系统（5—4—1）的特征方程为

$$|SI-A|=a_0+a_1S+a_2S^2+\cdots+a_{n-1}S^{n-1}+S^n=0$$

也就是说，系统（5—4—1）的特征根完全由系数a_0，a_1…，a_{n-1}唯一地确定，那末，系统（5—4—3）的特征根也完全由系数a_0，a_1，…a_{n-1}唯一地确定。因此系统的状态矢量经过非奇

异线性变换T后，其确定系数特征根的参数a_0，a_1，…a_{n-1}没有变化。故称这些参数a_0，a_1，…，a_{n-1}为线性系统的不变量，并且还称系统（5－4－3）是与系统（5－4－1）等阶的。

5－4－2 线性系统的若唐规范形式

如果变换矩阵T能将系统矩阵A变换成若唐法式，即有

$$T^{-1}AT=J \qquad (5\text{—}4\text{—}5)$$

式中J是若唐法式，则这时有

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=JZ(t)+T^{-1}Bu(t)\\ Y(t)=CTZ(t)+D_2u(t)\end{cases} \qquad (5\text{—}4\text{—}6)$$

系统（5－4－6）就称为是系统（5－4－1）的若唐规范形式。

上述将系统矩阵A变换成若唐法式的变换矩阵T的求法很多，下面介绍几种。

〔方法一〕 (1)设系统矩阵A的特征方程为

$$|SI-A|=0$$

设λ_i是系统的一个特征根，则

$$|\lambda_iI-A|=0$$

即

$$\begin{vmatrix}\lambda_i-a_{11} & -a_{12} & \cdots -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda_i-a_{22} & \cdots -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\lambda_i-a_{nn}\end{vmatrix}=0 \qquad (5\text{—}4\text{—}7)$$

令上述行列式第一行的余因子为F_{i11}，F_{i12}，…，F_{i1n}因此，当$\lambda_j=\lambda_1$时得

$$a_{11}F_{111}+a_{12}F_{112}+\cdots+a_{1n}F_{11n}=\lambda_1F_{111}$$

同理还可得到

$$\begin{aligned}
&a_{21}F_{111}+a_{22}F_{112}+\cdots+a_{2n}F_{11n}=\lambda_1F_{112}\\
&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&a_{n1}F_{111}+a_{n2}F_{112}+\cdots+a_{nn}F_{11n}=\lambda_1F_{11n}
\end{aligned}$$

将上各式写成矩阵形式得：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{111} \\ F_{112} \\ \vdots \\ F_{11n} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} F_{111} \\ F_{112} \\ \vdots \\ F_{11n} \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}4\text{—}8)$$

由（5－4－8）式可见，$(F_{111}\ F_{112}\cdots F_{11n})^T$是矩阵A相应于$\lambda=\lambda_1$时的特征矢量。

在一般情况下，对应于特征值$\lambda=\lambda_i$有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}4\text{—}9)$$

如果将n个特征矢量组成矩阵P，即令

$$P=\begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \cdots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \cdots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \cdots & F_{n1n} \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}4\text{—}10)$$

则由于A的特征值各不相同，故P是非奇异的。

因为

$$AP=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \cdots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \cdots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \cdots & F_{n1n} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1 F_{111} & \lambda_2 F_{211} & \cdots & \lambda_n F_{n11} \\ \lambda_1 F_{112} & \lambda_2 F_{212} & \cdots & \lambda_n F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 F_{11n} & \lambda_2 F_{21n} & \cdots & \lambda_n F_{n1n} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \cdots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \cdots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \cdots & F_{n1n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}=PD \tag{5-4-11}$$

式中

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

因此得：

$$P^{-1}AP=D \tag{5-4-12}$$

也就是说，矩阵P能将系统矩阵A变换成对角线矩阵D，因此，矩阵P＝T，就是要求的变换矩阵。

设C是一个非奇异对角线矩阵，由于

$$P^{-1}AP = D$$

因此

$$C^{-1}P^{-1}APC = C^{-1}DC = D_2$$

因此PC同样也是要求的变换矩阵T。因此T并不是唯一的。

(2)设系统矩阵A的特征根有重根

以下列系统矩阵为例说明：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (5-4-13)$$

如果假定系统矩阵（5－4－13）的特征值是λ_1，λ_1，λ_3，也就是说，它有两个相同的特征值。这时我们可将它看成是λ_1，$\lambda_1+\Delta\lambda_1$，$\lambda_3$当$\Delta\lambda_1 \to 0$时的极限情况。而这时可求得相应的P为

$$P = \begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & F_{311} \\ F_{112} & F_{212} & F_{312} \\ F_{113} & F_{212} & F_{313} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1-\Delta\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1-\Delta\lambda_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda_1-\Delta\lambda_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_1-\Delta\lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_3 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_3 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{array}\right)$$

这时有系统方程

$$\begin{cases} \dot{Z}(t)=P^{-1}APZ(t)+P^{-1}Bu(t)=A_2Z(t)+B_2u(t) \\ Y(t)=CPZ(t)+Du(t)=C_2Z(t)+D_2u(t) \end{cases} \tag{5-4-14}$$

式中

$$A_2=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1+\Delta\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

对系统（5－4－14）再作线性变换

$$Z(t)=QW(t)$$

式中

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\Delta\lambda_1} & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{\Delta\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这时系统的方程就变为

$$\begin{cases} \dot{W}(t)=Q^{-1}A_2QW(t)+Q^{-1}B_2u(t)=A_3W(t)+B_3u(t) \\ Y(t)=C_2QW(t)+D_2u(t)=C_3W(t)+D_3u(t) \end{cases} \tag{5-4-15}$$

由A_2、B_2和C_2表Q的表示式得

$$A_3 = Q^{-1}A_2Q$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1+\Delta\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = Q^{-1}B_2 = Q^{-1}P^{-1}B$$

$$C_3 = C_2Q = CPQ$$

因此当$\Delta\lambda_1 \to 0$时，得

$$A_3 = Q^{-1}A_2Q = (PQ)^{-1}A(PQ) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

这时变换矩阵$R = \lim\limits_{\Delta\lambda_1 \to 0} PQ$为

$$R = \lim_{\Delta\lambda \to 0} PQ$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & 2\lambda_1-(a_{33}+a_{22}) & \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_3 & \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & a_{21} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & a_{31} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_3 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

矩阵R就是要求的真正的变换矩阵T。由所求得的矩阵R的表示式可以看出，其第二列元素是相应的第一列元素对λ_1的一次导数。又若A有三个重根$\lambda_1=\lambda_1=\lambda_1$，则可令$\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda_1$，$\lambda_3=\lambda_1+2\Delta\lambda_1$，同样可求得P，Q，R，这时有

$$
R=\begin{bmatrix}
\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & 2\lambda_1-(a_{33}-a_{22}) & 1 \\
-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} & a_{21} & 0 \\
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & a_{31} & 0
\end{bmatrix} \qquad (5-4-17)
$$

和

$$
R^{-1}AR=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}
$$

由（5－4－17）式可以看出，R的第二列元素是相应的第一列元素对λ_1的一次导数；第三列元素是相应的第一列元素对λ_1的二次导数的1／2。

以上结果可推广到一般情况，如特征方程有七个特征根λ_1，，λ_1，λ_1，λ_1，λ_5，λ_6，λ_7，则此时的矩阵R为

$$
R=\begin{bmatrix}
F_{111} & F'_{111} & \frac{1}{2!}F''_{111} & \frac{1}{3!}F'''_{111} & F_{511} & F'_{511} & F_{711} \\
F_{112} & F'_{112} & \frac{1}{2!}F''_{112} & \frac{1}{3!}F'''_{112} & F_{512} & F'_{512} & F_{712} \\
F_{113} & F'_{113} & \frac{1}{2!}F''_{113} & \frac{1}{3!}F'''_{113} & F_{513} & F'_{513} & F_{713} \\
F_{114} & F'_{114} & \frac{1}{2!}F''_{114} & \frac{1}{3!}F'''_{114} & F_{514} & F'_{514} & F_{714} \\
F_{115} & F'_{115} & \frac{1}{2!}F''_{115} & \frac{1}{3!}F'''_{115} & F_{515} & F'_{515} & F_{715} \\
F_{116} & F'_{116} & \frac{1}{2!}F''_{116} & \frac{1}{3!}F'''_{116} & F_{516} & F'_{516} & F_{716} \\
F_{117} & F'_{117} & \frac{1}{2!}F''_{117} & \frac{1}{3!}F'''_{117} & F_{517} & F'_{517} & F_{717}
\end{bmatrix} \qquad (5-4-18)
$$