

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性	5-3-1
5-3-1 引言	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性	5-3-2
一、系统可观性概念	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则	5-3-2
三、系统一致可观性概念	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性	5-3-29
一、系统可控性概念	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则	5-3-39
四、系统一致可控性概念	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性	5-3-57
一、	系统稳定性概念	5-3-57
1.	系统的描述	5-3-57
2.	平衡状态	5-3-58
3.	稳定性概念	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、	并联可控实现	5-5-9
二、	并联可观文实现	5-5-13

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

6-4-1	模型误差分析	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
	二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法	6-4-16
	一、限定下界法	6-4-16
	二、状态扩充法	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
	四、限定记忆泸波	6-4-31
	五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-4 线性系统的不变量及其规范形式

线性系统的不变量的讨论，是线性系统理论的一个重要方面。线性系统的不变量描述，使线性系统的表示“参数化”了，也就是说，线性系统的特性可以被一组参数唯一地确定，这就为解决系统的识别和参数估计提供了方便。

在线性系统不变量研究的基础上，可以得到系统描述的规范形式。线性系统描述的规范形式，相当于矩阵理论中的法式（例如若唐法式和自然法式）。线性系统的规范形式的研究，不仅进一步弄清楚了线性系统的代数结构，而且也为模型识别等提供了手段。

这小节只讨论常系数、线性系统的情况。

5-4-1 状态矢量的线性变换及系统的不变量

设常系数、线性系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y(t) = C X(t) + D u(t) \end{cases} \quad (5-4-1)$$

如果对状态矢量作线性变换，即设

$$X(t) = T Z(t) \quad (5-4-2)$$

当 T 是非奇异方阵时，则得：

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1} A T Z(t) + T^{-1} B u(t) \\ Y(t) = C T Z(t) + D u(t) \end{cases}$$

上式可简化成

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A_2 Z(t) + B_2 u(t) \\ Y(t) = C_2 Z(t) + D_2 u(t) \end{cases} \quad (5-4-3)$$

式中

$$A_2 = T^{-1}AT ; B_2 = T^{-1}B ; C_2 = CT ; D_2 = D$$

因此可以说，系统 $S : (A, B, C, D)$ 经过线性变换 (5-4-2) 变换成系统 $S : (A_2, B_2, C_2 ; D_2)$ ，并且当 T 是非奇异矩阵时， A_2 与 A 相似， $D_2 = D$ 。

由于 T 是非奇异的，因此也可设 $S = T^{-1}$ 则 $A_2 = SAS^{-1}$ ， $B_2 = SB$ ， $C_2 = CS^{-1}$ ， $D_2 = D$ 。

系统 (5-4-3) 的特征方程为

$$|SI - A_2| = 0$$

也就是

$$|SI - T^{-1}AT| = 0$$

即

$$|T^{-1}(SI - A)T| = 0$$

由于 T 是非奇异的，因此得：

$$|SI - A| = 0 \quad (5-4-4)$$

显然上式与系统 (5-4-1) 的特征方程具有相同形式。

如果系统 (5-4-1) 的特征方程为

$$|SI - A| = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_{n-1} S^{n-1} + S^n = 0$$

也就是说，系统 (5-4-1) 的特征根完全由系数 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 唯一地确定，那末，系统 (5-4-3) 的特征根也完全由系数 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 唯一地确定。因此系统的状态矢量经过非奇

异线性变换 T 后，其确定系数特征根的参数 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 没有变化。故称这些参数 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 为线性系统的不变量，并且还称系统 (5-4-3) 是与系统 (5-4-1) 等阶的。

5-4-2 线性系统的若唐规范形式

如果变换矩阵 T 能将系统矩阵 A 变换成若唐法式，即有

$$T^{-1}AT = J \quad (5-4-5)$$

式中 J 是若唐法式，则这时有

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = JZ(t) + T^{-1}Bu(t) \\ Y(t) = CZ(t) + D_2u(t) \end{cases} \quad (5-4-6)$$

系统 (5-4-6) 就称为是系统 (5-4-1) 的若唐规范形式。

上述将系统矩阵 A 变换成若唐法式的变换矩阵 T 的求法很多，下面介绍几种。

〔方法一〕 (1) 设系统矩阵 A 的特征方程为

$$|sI - A| = 0$$

设 λ_i 是系统的一个特征根，则

$$|\lambda_i I - A| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda_i - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_i - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda_i - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (5-4-7)$$

5-4-3

令上述行列式第一行的余因子为 $F_{i11}, F_{i12}, \dots, F_{i1n}$ 因此, 当 $\lambda_j = \lambda_i$ 时得

$$a_{11} F_{i11} + a_{12} F_{i12} + \dots + a_{1n} F_{i1n} = \lambda_i F_{i11}$$

同理还可得到

$$a_{21} F_{i11} + a_{22} F_{i12} + \dots + a_{2n} F_{i1n} = \lambda_i F_{i12}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1} F_{i11} + a_{n2} F_{i12} + \dots + a_{nn} F_{i1n} = \lambda_i F_{i1n}$$

将上各式写成矩阵形式得:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} \quad (5-4-8)$$

由 (5-4-8) 式可见, $(F_{i11}, F_{i12}, \dots, F_{i1n})^T$ 是矩阵 A 相应于 $\lambda = \lambda_i$ 时的特征矢量。

在一般情况下, 对应于特征值 $\lambda = \lambda_i$ 有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} F_{i11} \\ F_{i12} \\ \vdots \\ F_{i1n} \end{bmatrix} \quad (5-4-9)$$

如果将 n 个特征矢量组成矩阵 P, 即令

$$P = \begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \dots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \dots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \dots & F_{n1n} \end{bmatrix} \quad (5-4-10)$$

则由于A的特征值各不相同，故P是非奇异的。

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad AP &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \cdots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \cdots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \cdots & F_{n1n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 F_{111} & \lambda_2 F_{211} & \cdots & \lambda_n F_{n11} \\ \lambda_1 F_{112} & \lambda_2 F_{212} & \cdots & \lambda_n F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 F_{11n} & \lambda_2 F_{21n} & \cdots & \lambda_n F_{n1n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & \cdots & F_{n11} \\ F_{112} & F_{212} & \cdots & F_{n12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{11n} & F_{21n} & \cdots & F_{n1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD
 \end{aligned}$$

(5-4-11)

式中

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

因此得：

$$P^{-1}AP = D \tag{5-4-12}$$

也就是说，矩阵P能将系统矩阵A变换成对角线矩阵D，因此，矩阵P=T，就是要求的变换矩阵。

设 C 是一个非奇异对角线矩阵，由于

$$P^{-1}AP = D$$

因此

$$C^{-1}P^{-1}APC = C^{-1}DC = D_2$$

因此 PC 同样也是要求的变换矩阵 T 。因此 T 并不是唯一的。

(2) 设系统矩阵 A 的特征根有重根

以下列系统矩阵为例说明：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5-4-13)$$

如果假定系统矩阵 (5-4-13) 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$ ，也就是说，它有两个相同的特征值。这时我们可将它看成是 $\lambda_1,$

$\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$ ，当 $\Delta\lambda_1 \rightarrow 0$ 时的极限情况。而这时可求得相应的 P 为

$$P = \begin{bmatrix} F_{111} & F_{211} & F_{311} \\ F_{112} & F_{212} & F_{312} \\ F_{113} & F_{213} & F_{313} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{22} - \lambda_1 - \Delta\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 - \Delta\lambda_1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_1 - \Delta\lambda_1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} - \lambda_1 - \Delta\lambda_1 \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_{22} - \lambda_3 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_3 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} - \lambda_3 \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

这时有系统方程

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = P^{-1}AP Z(t) + P^{-1}Bu(t) = A_2 Z(t) + B_2 u(t) \\ Y(t) = CP Z(t) + Du(t) = C_2 Z(t) + D_2 u(t) \end{cases}$$

式中

$$A_2 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \Delta\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (5-4-14)$$

对系统 (5-4-14) 再作线性变换

$$Z(t) = QW(t)$$

式中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta\lambda_1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\Delta\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这时系统的方程就变为

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = Q^{-1}A_2QW(t) + Q^{-1}B_2u(t) = A_3 W(t) + B_3 u(t) \\ Y(t) = C_2QW(t) + D_2u(t) = C_3 W(t) + D_3 u(t) \end{cases}$$

(5-4-15)

由 A_2 、 B_2 和 C_2 表 Q 的表示式得

$$A_3 = Q^{-1} A_2 Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \Delta\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = Q^{-1} B_2 = Q^{-1} P^{-1} B$$

$$C_3 = C_2 Q = C P Q$$

因此当 $\Delta\lambda_1 \rightarrow 0$ 时，得

$$A_3 = Q^{-1} A_2 Q = (PQ)^{-1} A (PQ) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

这时变换矩阵 $R = \lim_{\Delta\lambda_1 \rightarrow 0} P Q$ 为

$$R = \lim_{\Delta\lambda_1 \rightarrow 0} P Q$$

$$= \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc|c} a_{22} - \lambda_1 & a_{23} & 2\lambda_1 - (a_{33} + a_{22}) \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{22} - \lambda_3 & \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|c} a_{21} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 & a_{31} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|c} a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & a_{31} \\ a_{31} & a_{32} & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} - \lambda_3 \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| \end{bmatrix}$$

矩阵 R 就是要求的真正的变换矩阵 T 。由所求得的矩阵 R 的表示式可以看出，其第二列元素是相应的第一列元素对 λ_1 的一次导数。又若 A 有三个重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ，则可令 $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$ ， $\lambda_3 = \lambda_1 + 2\Delta\lambda_1$ ，同样可求得 P ， Q ， R ，这时有

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{22} - \lambda_1 & a_{23} & 2\lambda_1 - (a_{33} - a_{22}) & 1 \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 & & \\ \hline a_{21} & a_{23} & a_{21} & 0 \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_1 & & \\ \hline a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & a_{31} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & & \end{array} \right] \quad (5-4-17)$$

和

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

由(5-4-17)式可以看出，R的第二列元素是相应的第一列元素对 λ_1 的一次导数；第三列元素是相应的第一列元素对 λ_1 的二次导数的 $1/2$ 。

以上结果可推广到一般情况，如特征方程有七个特征根 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1$ ，则此时的矩阵R为

$$R = \begin{bmatrix} F_{11} & F'_{11} & \frac{1}{2}F''_{11} & \frac{1}{6}F'''_{11} & F_{511} & F'_{511} & F_{711} \\ F_{112} & F'_{112} & \frac{1}{2}F''_{112} & \frac{1}{6}F'''_{112} & F_{512} & F'_{512} & F_{712} \\ F_{113} & F'_{113} & \frac{1}{2}F''_{113} & \frac{1}{6}F'''_{113} & F_{513} & F'_{513} & F_{713} \\ F_{114} & F'_{114} & \frac{1}{2}F''_{114} & \frac{1}{6}F'''_{114} & F_{514} & F'_{514} & F_{714} \\ F_{115} & F'_{115} & \frac{1}{2}F''_{115} & \frac{1}{6}F'''_{115} & F_{515} & F'_{515} & F_{715} \\ F_{116} & F'_{116} & \frac{1}{2}F''_{116} & \frac{1}{6}F'''_{116} & F_{516} & F'_{516} & F_{716} \\ F_{117} & F'_{117} & \frac{1}{2}F''_{117} & \frac{1}{6}F'''_{117} & F_{517} & F'_{517} & F_{717} \end{bmatrix} \quad (5-4-18)$$