

偏微分方程论文丛刊

(УСПЕХ 1940)

II

中国科学院数学研究所偏微分方程组印

СОДЕРЖАНИЕ.

- С. Н. Бернштейн. Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа.
- И. Г. Петровский. Метод перрона решения задачи Дирихле.
- Ганс Оеви. Об аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений. /Перевод с немецкого А. И. Барабанова./.
- И. Г. Петровский. Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей.
- Е. Е. Леви. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. /Перевод с итальянского Н. Д. Азенштат./.
- М. В. Келдыш. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле.

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ
К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА *).

С. Н. Бернштейн.

1. Настоящая работа содержит доказательство и некоторые следствия одной из теорем моей заметки /15/**).

Геометрическая теорема, которую я докажу здесь, следующая:

Поверхность $\mathcal{Z} \equiv f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков, полная кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может оставаться все время между двумя фиксированными плоскостями $\mathcal{Z} = \pm h$.

Из этой теоремы легко получается следующее очень общее предложение относительно уравнений эллиптического типа, которое содержит, как частный случай, основное свойство гармонических функций, известное под именем теоремы Лиувилля:

Если $\mathcal{Z}$ — ограниченная функция, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяющая уравнению вида

$$Ar + Bs + Ct = 0, \quad (1)$$

2.

где, A, B, C — ограниченные функции от x, y, z, p, q, r, s, t , удовлетворяющие неравенству $AC - B^2 > 0$, то функция z есть постоянная.

Наше обобщение теоремы Лиувилля, очевидно, применимо также к минимальным поверхностям; но при помощи искусственного приема, связанного с особым видом уравнения этих поверхностей, я устанавливаю, кроме того, следующее специальное свойство минимальных поверхностей, существенно отличающее их от поверхностей гармонических:

Вещественная минимальная поверхность $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков для всех вещественных конечных значений x и y , является плоскостью. Другими словами, функции z , как известно, являющаяся аналитической, должна, вообще говоря, иметь вещественные особенности на конечном расстоянии; таким образом, хотя существует очень большое разнообразие целых рациональных или трансцендентных гармонических функций, единственной целой функцией, удовлетворяющей уравнению минимальных поверхностей

$$(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t = 0,$$

является линейная функция $z = Ax + By + C$.

2. Начнем с доказательства леммы, которой мы будем неоднократно пользоваться.

Л е м м а. Пусть $z = f(x, y)$ — функция вещест-

венных переменных x и y , имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков, и пусть B — некоторая область, в которой $\chi < 0$, имеющая в качестве границы множество точек, где $\chi = 0$. Область B не может быть ограниченной, если $\gamma t - s^2 \leq 0$ во всех точках, для которых $p^2 + q^2 < N$, где N — сколь угодно малое фиксированное положительное число.

В самом деле, из предположения ограниченности области B следовало бы, что функция χ достигает абсолютного минимума $m < 0$ во внутренней точке области B , где $p = q = 0$. Принимая эту точку O за начало координат и принимая во внимание, что в точке O $\gamma t - s^2 = 0$, можно тогда положить

$$\chi = m + (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2),$$

где α, β — постоянные /которые могут быть равны нулю/, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю при $x^2 + y^2$, стремящемся к нулю. С другой стороны, рассмотрим функцию

$$\chi_1 = m + \frac{h}{2}(x^2 + y^2),$$

где h — фиксированное положительное число, которое можно взять столь малым, чтобы во всех точках области B выполнялись неравенства $\chi_1 < 0$, $h^2(x^2 + y^2) < N$.

При этих условиях во всех точках границы B

$$\delta = \chi - \chi_1 > 0.$$

Но при данном h точку O можно окружить столь малым кругом, чтобы по крайней мере в одной его внутренней точке выполнялось неравенство

4.

$$\delta = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - h)x^2 + \varepsilon_2 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - h)y^2 < 0. \quad (2)$$

Следовательно, функция δ также будет иметь абсолютный минимум внутри B ; при этом в точке A , где достигается этот минимум, будет

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \geq 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \chi^2 - S^2 &= \left(h + \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) \left(h + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 = \\ &= h^2 + h \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \geq h^2 > 0 \end{aligned}$$

и

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} \right)^2 = h^2 (x^2 + y^2) < N.$$

Но эти два неравенства несовместимы с предположением леммы. Следовательно, лемма доказана.

3. Мы можем теперь перейти к доказательству теоремы.

Т е о р е м а. Поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядков, кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может оставаться при всех значениях x и y заключенной между двумя фиксированными плоскостями $z = \pm h$.

В самом деле, предположим, что наша поверхность

остается заключенной между плоскостями $x = \pm h$.

Путем соответствующей замены координат всегда можно добиться того, чтобы в начале координат выполнялись условия $p_0 = 0, q_0 > 0, \gamma_0 t_0 - \beta_0^2 < 0$. При этих условиях касательная плоскость к поверхности

$$x = f(x, y)$$

в точке $x = y = 0$ будет иметь уравнение

$$x_1 = q_0 y$$

и пересечет эту поверхность по четырем различным ветвям, которые определяют в окрестности начала координат четыре различных области $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ плоскости (x, y) , такие, что в Ω_1 и Ω_3 мы будем иметь $\delta = x - x_1 < 0$, а в Ω_2 и Ω_4 будет $\delta > 0$.

Согласно доказанной выше лемме, ни одна из этих областей /продолженных до границы $\delta = 0$ / не может быть ограниченной. С другой стороны, области Ω_1 и Ω_2 должны быть расположены выше прямой $y = -\frac{h}{q_0}$, так как при $y \leq -\frac{h}{q_0}$ из предположения $x > -h$ следует, что $\delta = x - q_0 y > 0$; и точно так же области Ω_3 и Ω_4 должны быть расположены ниже прямой $y = \frac{h}{q_0}$ вследствие неравенства $x < h$.

Я утверждаю, что, кроме того, по меньшей мере одна из областей Ω_1 и Ω_3 остается все время ниже прямой $y = \frac{h}{q_0}$. В самом деле, области Ω_1 и Ω_3 не могут иметь общих точек, так как если бы такая точка M существовала, то ее можно было бы соединить с началом координат двумя различными

6.

линиями, одна из которых принадлежала бы Ω_1 , а другая принадлежала бы Ω_3 ; замкнутый контур, полученный таким образом, содержал бы внутри одну из областей Ω_2 или Ω_4 , что невозможно, так как эти области неограничены. Следовательно, если бы области Ω_1 и Ω_3 содержали точки прямой $y = \frac{h}{q_0}$, то их границы также содержали бы точки этой прямой, но это невозможно, так как на границе имеем $\delta = x - q_0 y = 0$.

Итак, мы приходим к заключению, что по крайней мере одна из областей с четным номером и одна из областей с нечетным номером при неограниченном продолжении остаются постоянно между двумя прямыми $y = \pm \frac{h}{q_0}$. Существенно заметить, что по крайней мере одна из этих областей простирается до бесконечности только в одном направлении. В самом деле, пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, расположенные между нашими прямыми, простирающиеся обе до бесконечности в обоих направлениях; тогда в каждой из этих областей можно провести кривую S_1 /соответственно S_2 /, простирающуюся до бесконечности в обоих направлениях, и так как начало координат является граничной точкой и для Ω_1 , и для Ω_2 , то оно будет расположено между этими двумя кривыми, так что никакая третья область не сможет простираться до бесконечности в обоих направлениях. Так как обе области Ω_1 и Ω_4 должны быть расположены между S_1 и S_2 , то они а *fortiori* будут заключены между прямыми $y = \pm \frac{h}{q_0}$ и, следовательно,

смогут простирается до бесконечности лишь в одном направлении.

Итак, мы можем допустить, что область Ω , заключенная между прямыми $y = \pm \frac{h}{g_0}$ и простирается до бесконечности только в положительном направлении оси x . Рассмотрим в плоскости (x, y) прямую $x = x_0$; для точек этой прямой, принадлежащих Ω , имеем $\delta < 0$. Пусть $u(x_0) = \delta(x_0, y_0) \leq \delta(x_0, y)$ — абсолютный минимум функции δ , достигаемый в одной из рассматриваемых точек.

Изучим эту функцию $u(x)$ определенную для возрастающих значений x . Заметим, что $u(x) < 0$, но для значений x , достаточно близких к нижней грани абсцисс точек, принадлежащих области Ω , $u(x)$ сколько угодно близка к нулю; следовательно, найдутся такие x_0 и x'_0 , что $x_0 > x'_0$ и $u(x_0) - u(x'_0) < 0$.

Докажем, что при этих условиях для $x_1 > x_0 > x'_0$ должно выполняться неравенство

$$|u(x_1)| \geq \frac{x_1 - x'_0}{x_0 - x'_0} [u(x'_0) - u(x_0)]. \quad (3)$$

В самом деле, так как $u(x) < 0$, то неравенство /3/ эквивалентно неравенству

$$-u(x_1) \geq \frac{x_1 - x'_0}{x_0 - x'_0} [u(x'_0) - u(x_0)].$$

Предположим, что это неравенство не выполняется, тогда найдется x_1 такое, что

8.

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

Таким образом, в этом случае функция

$$V(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0') \quad (4)$$

будет отрицательной при $x = x_0$ и $y = y_0$; следовательно, найдется область B , в которой $V < 0$. Эта область должна быть ограниченной, так как $V \geq 0$, когда $x = x_0'$, когда одновременно $x_0' < x < x_1$ и когда $x = x_1$. Но это противоречит лемме предыдущего параграфа, так как

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 = \gamma + \varepsilon^2 \geq 0.$$

Следовательно, неравенство /3/ должно выполняться.

Но для достаточно больших x , это неравенство несовместимо с предположением $|x| < h$. Теорема, таким образом, доказана.

Используя лемму § 2 в ее общем виде, мы можем обобщить нашу теорему следующим образом.

4. О б о б щ е н и е. Поверхность, заданная уравнением $x = f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков, кривизна которой отрицательна в некоторой определенной точке, где наклон касательной плоскости

$$p^2 + q^2 = q_0^2 > 0, \text{ не может для всех значений } x \text{ и } y$$

остаться заключенной между двумя фиксированными

плоскостями $z = \pm h$, если ее кривизна может быть положительной ^{1/} только в тех точках где $p^2 + q^2 > N > q_0^2$.

В самом деле, все рассуждения предыдущего доказательства, до исследования функции $V(x, y)$, заданной формулой /4/, остаются без изменения. Однако мы не можем утверждать невозможность ограниченности области B , где $V < 0$. Эта область могла бы быть ограниченной, лишь если бы она содержала точки, где при произвольно малом $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| = \left| -\frac{1}{x-x_0} u(x_1) + p \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| = |q - q_0| < \varepsilon$$

$yt - s^2 > 0$. Но в этих точках по предположению

$$p^2 + q^2 > N,$$

следовательно,

$$|u(x_1)| > (x_1 - x_0) \{ \sqrt{N - (q_0^2 + \varepsilon)} - \varepsilon \} \quad (5)$$

при произвольно малом ε .

Итак, вместо неравенства /3/ мы получаем неравенство
; но это последнее также несовместимо с неравенством
 $|x| < h$. Следовательно, наше обобщение доказано.

З а м е ч а н и е. Необходимо заметить, что функции, которые нами рассматривались и для которых мы доказали невозможность неравенства $|x| < h$, могут тем не менее удовлетворять условию $z < h$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть поверхность, определенную уравнением

$$z = h - \varepsilon x - y^2.$$

10.

Непосредственно видно, что

$$rt - s^2 = -2e^{x-2y^2} < 0$$

для всех значений x и y и в то же время

$$x < h.$$

Заметим также, что наша теорема перестает быть верной для поверхностей, кривизна которых тождественно равна нулю, так как цилиндрическая поверхность $x = e^{-x^2}$ удовлетворяет условию $|x| \leq 1$.

5. Т е о р е м а. Если функция χ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению

$$A\gamma + \alpha B\gamma + Ct = 0 \quad (Ac - B^2 > 0),$$

где A, B, C —какие-либо конечные функции от x, y, z, γ, s, t , и если она ограничена, то она является постоянной ж/.

В самом деле, положим $rt - s^2 = \lambda$. Наше уравнение примет вид

$$A\gamma + \alpha Bs + C \frac{s^2 + \lambda}{\gamma} = 0;$$

отсюда следует, что $\lambda \leq 0$ и кроме того равенство $\lambda = 0$, влечет за собой $\gamma = s = t = 0$. Следовательно, если нигде не имеет места неравенство $\lambda < 0$, то это означает, что ρ и ψ постоянные, которые должны быть равны нулю, если χ , приводящаяся к плоскости, остается ограниченной; следовательно, χ должна быть постоянной. Но в силу предыдущей теоремы, если неравенство $\lambda < 0$ имеет место хотя бы в одной точке, то функция χ не может быть

ограниченной.

Доказанная нами теорема является обобщением теоремы Лиувилля, сформулированным мною четыре года назад.

Мы выведем теперь из этой теоремы одно предложение относительно минимальных поверхностей.

6. Т е о р е м а. Если минимальная поверхность S задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

где f имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков при всех вещественных значениях x ,

y , то S является плоскостью.

В самом деле, образуем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u = xys + y^2p$, предполагая, что

$$(1+q^2)y - 2pqz + (1+p^2)t = 0. \quad (6)$$

дифференцируя ^{2/} по x уравнение /6/, получим

$$(1+q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1+p^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2p(xt - z^2) = 0$$

или, исключая t ,

$$(1+q^2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pqy^2}{1+p^2} \right) - 2pq \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 yz}{1+p^2} \right) + (1+p^2) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2pzs^2}{1+p^2} \right) = 0.$$

Но, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1+p^2} - \frac{2pqy^2}{(1+p^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}{1+p^2} - \frac{2pys}{(1+p^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1+p^2} - \frac{2pzs^2}{(1+p^2)^2}. \end{aligned}$$

12.

Следовательно, и удовлетворяет уравнению

$$(1+q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+p^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

и, таким образом, $u = \arctan p$ не может быть ограниченным во всей плоскости, не сводясь к постоянной. Но, по нашему предположению, p не должно обращаться в бесконечность ни при каких конечных значениях x, y ; следовательно, для всех конечных значений x и y имеем $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, откуда заключаем, что u есть постоянная. Итак, p и q являются постоянными, а следовательно, поверхность z является плоскостью.

** / Sur un théorème de géométrie et son applications, aux dérivées partielles du type elliptique, équations aux*

Собрания Харьковского математического общества, т. XV, № 1 /1915/, стр. 38—45. Имеется также немецкий перевод этой работы /сделанный Т. Радо/, напечатанный в *Mathematische Zeitschrift*, т. 26 /1927/, стр. 551—558.

**** /** Цифры в квадратных скобках указывают номер работы автора по списку литературы на стр. 27—28.

1/ Достаточно, например, чтобы кривизна не была положительной в окрестности тех точек, где $\rho = q = 0$, и чтобы в окрестности хотя бы одной из этих точек она была отрицательна.

*** /** Теорема 5 может быть формулирована иначе:

Если $F(x, y, z, \rho, q, r, s, t) = 0$, есть уравнение эллиптического типа /при любых значениях входящих в него восьми переменных, т. е. $4F_1'F_4' - F_5'^2 > 0$ / и ему удовлетворяет любая линейная функция $z = ax + by + c$, то всякое его решение, ограниченное на всей плоскости, есть постоянная.

Действительно, условие, что функция $z = ax + by + c$ при любых значениях постоянных удовлетворяет уравнению $F(x, y, z, \rho, q, r, s, t) = 0$, означает, что $F(x, y, z, \rho, q, 0, 0, 0) = 0$ при всех значениях пяти независимых величин x, y, z, ρ, q , а потому

$$F(x, y, z, \rho, q, r, s, t) = Ar + Bs + Ct,$$

14.

где

$$A = F_r'(x, y, z, p, q, \theta_r, \theta_z, \theta_t), \quad \partial B = F_s'(x, y, z, p, q, \theta_r, \theta_z, \theta_t),$$

$$C = F_t'(x, y, z, p, q, \theta_r, \theta_z, \theta_t).$$

($0 < \theta < 1$).

2/ Мы допускаем здесь существование третьих производных; но оно следует из того факта, что существование вторых производных влечет за собой аналитичность функции [см. по этому вопросу мои работы по задаче Дирихле: /13/, стр. 132 и /17/, стр. 462].

МЕТОД ПЕРРОНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ^ж).

И. Г. Петровский.

§ 1. Постановка задачи.

Пусть на границе R некоторой конечной n -мерной области G задана ограниченная функция f . Требуется найти внутри G такую гармоническую функцию u которая на границе G удовлетворяла бы условию

$$f \leq u \leq \bar{u} \leq \bar{f},$$

где $\underline{f}$ и $\bar{f}$ обозначают соответственно нижнюю и верхнюю предельные функции для f . Значение $\underline{f}$ (соотв. $\bar{f}$) в точке P , принадлежащей $G+R$, определяется как предел нижней (соотв. верхней) грани значений f в круге радиуса ϵ с центром в точке P , при условии, что $\epsilon \rightarrow 0$.

Если функция f разрывна, то поставленная задача может иметь много решений. Так будет, например, в случае, когда область G является круг, а функция f принимает только значения 0 и 1, причем как те точки, где $f=0$, так и те точки, где $f=1$, расположены всюду плотно на окружности. Очевидно, что в этом случае решением поставленной задачи будет всякая константа, заключенная между 0 и 1. Если же функция f непрерывна, то поставленная задача не может иметь больше одного решения¹⁾.