广播师大教材

初等代数

下册

新疆广播师范大学

一九七八年七月

目　录

第六章　二次方程

整式方程是实践中应用最多的方程，而二次方程在科学技术中更是有广泛的应用的。一元二次方程的解法和根的讨论对高次方程有着普遍的意义。二次方程的研究也为进一步学习二次曲线打下基础，在解分式方程和无理方程及应用问题中，也多要藉二次方程解法来解决。所以在这一章的学习中，要掌握方法，善于分析思考，并能灵活运用。

I　一元二次方程

一元二次方程的一般形式（也称标准形式）是：
$ax^2+bx+c=0$，其中 b、c 可以是任何实数，而 $a\neq 0$，否则就不是二次方程。

一元二次方程还可以从标准形式化为简化形式：
$x^2+px+q=0$，简化的方法是用 a 遍除方程各项。

研究一元二次方程的解法仍是本着从已知到未知，从特殊到一般的原则，利用以前学过的知识找出解一元二次方程的一般规律。

首先研究两个特殊典型的一元二次方程：

1．解 $3x^2-6x=0$，这是一元二次方程，当 $c=0$ 时的情况。我们利用因式分解的知识把 $3x^2-6x$ 分解为 $3x(x-2)$，那么原方程就化为 $3x(x-2)=0$.

根据："若因式相乘的积等于零，则至少有一个因式为

零”的道理，$3x(x-2)=0$ 的因式 $x=0$ 或 $(x-2)=0$ 即 $x=2$.

$x_1=0$　$x_2=2$ 都能满足 $3x(x-2)=0$，所以 $x_1=0$　$x_2=2$ 都是原方程的根。

一般的说：$ax^2+bx=0$ 可化为$x(ax+b)=0$ 它的根是：$x_1=0$　$x_2=\frac{-b}{a}$.

2．再看 $c\neq0$　$b=0$ 的情况：

解：$4x^2=9$　$x^2=\frac{9}{4}$

利用开方和方根的知识，两边开平方得 $x=\pm\frac{3}{2}$

即　$x_1=\frac{3}{2}$，　$x_2=-\frac{3}{2}$ 都是方程 $4x^2=9$的根。

一般的说：$ax^2+c=0\rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$，

$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$　$c<0$（不能只取算术根）

$x_1=\sqrt{\frac{-c}{a}}$，　$x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ 是方程 $ax^2+c=0$ 的根。

由以上两种不完全二次方程的解法，我们得到一些启发：对完全二次方程是不是也可以转化为可以用因式分解法或开方法来解的呢？

1．**解**：$2x^2-5x-12=0$

我们曾学过用叉乘试算法把二次三项式因式分解，方程左边的二次三项式 $2x^2-5x-12$ 可以分解为$(2x+3)(x-4)$.

所以原方程化为 $(2x+3)(x-4)=0$

那么由 $2x+3=0 \quad x_1=-\dfrac{3}{2}$

由 $x-4=0 \quad x_2=4$

$x_1=-\dfrac{3}{2}, \quad x_2=4$ 都是方程的解

一般的说：$ax^2+bx+c=0$ 左边二次三项式如果能因式分解，那么它的根可以从各因式直接求出。

2. 一个二次三项式不一定都能用叉乘试算法或其它方法因式分解。在乘法公式中还有一种完全平方的二次三项式，如$x^2-6x+9=(x-3)^2$. 若是一元二次方程的左边是一

个完全平方的二次三项式，右端为非负的数，方程还是可解。如 $(x-3)^2=4$

$x-3=\pm 2 \quad x_1=5 \quad x_2=1$

方程左边不是完全平方的可以配成完全平方，配方的根据是两数和与差的平方公式。如：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$$\begin{tikzcd} 2ax \arrow[d] & a^2 \\ \frac{2a}{2} \arrow[r] & a \arrow[u, "平方"'] \end{tikzcd}$$

也就是将一次项系数除以 2，平方起来就是配方的常数项。

例：$x^2+4x-1=0$

移项：$x^2+4x=1$

配方：$x^2+4x+(\frac{4}{2})^2=1+(\frac{4}{2})^2$

得：$(x+2)^2=5$

$x+2=\pm\sqrt{5}$

$\therefore \quad x_1=-2+\sqrt{5}, \quad x_2=-2-\sqrt{5}$

一般二次方程的配方：$ax^2+bx+c=0$

首先将一般形式化为简化形式。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

移项配方： $$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=\frac{-c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$

整理： $$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

两边开平方： $$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这就是一元二次方程的求根公式，任何一元二次方程都可以将方程的系数 a、b、c 的值代入公式。得出方程的解。

例 1： 解方程：$x^2-25x+114=0$

解： 方程 $a=1$，$b=-25$，$c=114$ 代入公式：

$$x=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\times114}}{2}$$

$$=\frac{25\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{25\pm13}{2}$$

$\therefore x_1=19$， $x_2=6$

例 2：解方程： $x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$

解： $a=1$， $b=2(\sqrt{3}+1)$， $c=2\sqrt{3}$

$$x=\frac{-2(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{4(\sqrt{3}+1)^2-4\times2\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{-2(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{4[3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}]}}{2}$$

$$=-(\sqrt{3}+1)\pm 2$$

$\therefore\ x_1=1-\sqrt{3}\qquad x_2=-(3+\sqrt{3})$

例 3：解方程：$x^2-(2m+1)x+(m^2+m)=0$

解： $a=1$，$b=-(2m+1)$，$c=m^2+m$

$$x=\frac{(2m+1)\pm\sqrt{(2m+1)^2-4(m^2+m)}}{2}$$

$$=\frac{2m+1\pm\sqrt{4m^2+4m+1-4m^2-4m}}{2}$$

$$=\frac{2m+1\pm 1}{2}$$

$\therefore\ x_1=m+1,\qquad x_2=m$

例 4：解方程：$\frac{3}{2}t^2+4t=1$

解：两边乘以 2　　$3t^2+8t-2=0$

代入公式　　$t=\frac{-8\pm\sqrt{64+4\times3\times2}}{6}$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{6}$$

$$=\frac{-8\pm 2\sqrt{22}}{6}$$

$\therefore\ t_1=\frac{-4+\sqrt{22}}{3}\qquad t_2=\frac{-4-\sqrt{22}}{3}$

Ⅱ　一元二次方程根的讨论

在上节我们推导出一元二次方程的求根公式，并应用公式解出了几个例题的根，它们的根有的是有理数，有的是无理数。现在我们再进一步研究一元二次方程根的各种情况，研究在实数范围内是否任何一元二次方程都有解。

看下面各例：

1.　$x^2-x-3=0$　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$．

$$x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\qquad x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

2.　$4x^2-12x+9=0$　　$x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-4\times4\times9}}{2\times4}$

$$=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{8}=\frac{3}{2}\pm0$$

$$x_1=\frac{3}{2},\qquad x_2=\frac{3}{2}$$

3.　$x^2-5x+8=0$　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\times8}}{2}$

$$=\frac{5\pm\sqrt{-7}}{2}\text{ 无意义。}$$

例1．有不等的两实根；例2．有相等的两实根；例3.没有实数根。产生不同情况的关键在于公式中根号下的式子b^2-4ac的值，式子b^2-4ac叫做一元二次方程根的判断式，用记号“△”表示。

$\triangle > 0$　　b^2-4ac表示一个实数$\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ 是两个不等的实数根

$\triangle = 0$　　$b^2-4ac=0$

$$x=\frac{-b\pm 0}{2a}$$ 是两个相等的实根

$\triangle < 0$　　方程没有实数根

$\triangle < 0$的情况下发生了和实数根的矛盾。为了解决这一矛盾，我们引进虚数的概念，使$\sqrt{-1}=i$ 作为虚数单位。当$\triangle < 0$时 $\sqrt{b^2-4ac}$ 写作 $\sqrt{4ac-b^2}\,i$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$ 称为二次方程的虚数根。

（注：所谓虚数是作为实数对立面而提出的，开始的时候并不知道它们有什么实际意义。由于生产和科学技术的发展，人们逐渐认识到虚数的实际背景，它可以定量地描述物体振动的情况，是用作表示和研究物理量（如力、电流强度等）的有效工具，虚数已被确认为真正的数并得到广泛的研究和应用）。

关于虚数的理论将在第十章详细讨论。

Ⅲ　根与系数的关系

在前面我们学习叉乘试算法分解二次三项式的时候，曾用到以下的关系：

若$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$

则 $p=a+b$　　$q=ab$

现在我们把二次三项式和二次方程联系起来看。

设 x_1 x_2 为二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，

那么 $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=0$

但是 $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$

$\therefore$ $p=-(x_1+x_2)$ $\qquad q=x_1x_2$

也就是两根和 $x_1+x_2=-p$，两根的积 $x_1\cdot x_2=q$.这个关系叫做二次方程根与系数的关系（根与系数的关系也称为韦达定理）。

用二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根来验证这个关系：

方程的两根为： $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

而 $ax^2+bx+c=0$ 可简化为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

这就验证了二次项系数为 1 的二次方程，两根和等于它的一次项系数的相反数。两根的积等于常数项。

根据这一关系，我们可以鉴别 x_1x_2 是不是所给二次方程的根，可以作一二次方程使它的根适合某一给定的条件。

例 1：鉴别 $x_1=\dfrac{4+\sqrt{30}}{2}$ $x_2=\dfrac{4-\sqrt{30}}{2}$ 是否 $2x^2-8x-7=0$ 的根。

$$\because \quad x_1+x_2=4=-(\frac{-8}{2}) \quad (\text{即}\ x_1+x_2=-\frac{b}{a})$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{16-30}{4}=\frac{-14}{4}=-\frac{7}{2}(x_1\cdot x_2=\frac{c}{a})$$

$\therefore$ x_1，x_2 是方程 $2x^2-8x-7=o$ 的两根。

例 2：求作一方程使其根为 $2+\sqrt{2}$， $2-\sqrt{2}$

解：设所求方程为 $x^2+px+q=0$

$$\text{则}\ p=-(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2})=-4$$

$$q=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$$

$\therefore$ 所求方程为 $x^2-4x+2=0$

例 3：求作一方程使它的根为已知方程 $x^2+px+q=0$ 的根的倒数。

解：设 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的根为 α,β。

设 所求方程为 $x^2+Px+Q=0$ 它的根为 $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$.

p、q 是已知方程系数，所以 p、q 是已知数。

P、Q 是所求方程的系数，是未知数，题的要求是要用已知数 p、q 表示未知数 P、Q。

根据根与系数的关系 $P=-(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})=-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$$Q=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}$$

但 $\alpha+\beta=-p \qquad \alpha\cdot\beta=q$

$\therefore \quad P=-\frac{-p}{q}=\frac{p}{q} \qquad Q=\frac{1}{q}$

$\therefore$ 所求方程为 $x^2+\frac{p}{q}x+\frac{1}{q}=0$

也就是 $qx^2+px+1=0$

由例 3 可以看出如果两个二次方程对应项系数的顺序颠倒，它们的根互为倒数。

如：方程 $2x^2-7x+6=0$ 的根是 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=2$

方程 $6x^2-7x+2=0$ 的根是 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=\frac{1}{2}$

根与系数的关系对高次方程也有普遍意义：

如：设三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的根为 x_1,x_2,x_3

那么：$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$$

$\therefore \quad x_1+x_2+x_3=-p, \qquad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q,$

$x_1x_2x_3=-r$

因为高次方程也有这样的根与系数的关系，在解高次方程的时候，我们常利用“各根的积等于常数项（或常数项的相反数）”的这一关系，从常数项的各因数里试求方程的有理根。

练　习　题

1. 解下列各方程：

（1）$3x^2=27$　　（2）$(2x-5)^2=16$

（3）$(y+1)^2=2$　　（4）$4x^2-2x=0$

（5）$ax^2-4bx=0$

2. 配上适当的数使下列等式成立：

（1）$x^2+3x+\quad=(x+\quad)^2$

（2）$x^2-\frac{1}{2}+\quad=(x-\quad)^2$

（3）$x^2+\frac{b}{a}x+\quad=(x+\quad)^2$

3. 解方程：

（1）$2x^2+3x-1=0$　　（2）$x^2-2.4x-13=0$

（3）$x^2+2mx=n^2$　　（4）$(x+2)(2x-1)=1$

（5）$(2x^2+1)^2+(x-2)^2-(2x+1)(x-2)=43$

（6）$x^2-(2a-b)x+a^2-ab-2b^2=0$

4. 当 x 为何值时　$y=x^2+7x+10$　1）变为 0，2）等于4，3)能否 x 有实数值使它等于 -5？

5. 不解方程判定下列方程根的情况：

（1）$x^2+x-1=0$　　（2）$4x^2+9x=-2$

（3）$x^2-10x+25=0$　　（4）$2x^2-14x+35=0$

6. 不解方程判断方程根的符号：

（1）$x^2-6x+5=0$　　（2）$x^2+4x-5=0$

（3）$2x^2+5x+2=0$

7. a 为何值时下列方程有等根：

（1） $9x^2+6x+a=0$　　　（2） $4x^2+ax+9=0$

（3） $(2+a)x^2+6ax+4a+1=o$

8. 因为$ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)=0$。$x_1$、$x_2$是这二次方程的两根，所以我们可以用求根方法分解以下不易直接分解的二次三项式。

（1） x^2+x-1　　　（2） $2x^2-\sqrt{2}x-1$

（3） $3x^2-4x-2$

9. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 3 和 -5：

（1） 求p、q的值，

（2） 求 $x^2+px+q=0$ 的分解式。

10. 已知 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三根是 1，$1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$ 求 p、q、r 的值。

11. 已知二次方程的两根是 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ 求这二次方程。

12. 求作一二次方程使它的根适合以下条件：

（1） 是已知方程 $x^2+px+q=0$ 的根的 n 倍。

（2） 比已知方程 $x^2+px+q=0$ 的根都大$\frac{1}{2}$。

13. 解下列二次方程：

（1） $(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$

（2） $ax(a-x)-ab^2=b(b^2-x^2)$　$(a\neq b)$

Ⅳ　可化为一元二次方程的方程

分式方程：

在第四章中解分式方程时需要化为整式方程方能求解，

但在化为整式方程时，可能化成二次方程，须用二次方程解法来解决。

例 1：$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}=1+\dfrac{2}{x-2}$

解：方程两边同乘以 x^2-4。方程转化为：

$$x-2+4x=x^2-4+2(x+2)$$

整理得 $x^2-3x+2=0$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x_1=1 \qquad x_2=2$$

x_1, x_2 是整式方程式的解，是否是原分式方程的解，还须经过检验。

检验：$x_1=1$不使所乘之式为0

x_1 是原分式方程的解。

$x_2=2$ 使所乘的 $x^2-4=0$

x_2 不是原分式方程的解。

x_2 是分式方程的增根。

例 2：$\dfrac{5-x}{2x-1}=\dfrac{15-4x}{3x+1}$

解：利用比例性质。$(5-x)(3x+1)=(2x-1)(15-4x)$

整理得：$x^2-4x+4=0$

$$(x-2)^2=0 \qquad x=2$$

检验：$x=2$ 不使所乘因式得 0。 $x=2$ 是原方程的根。

注："n次方程有n个根"这是关于方程的一个基本定理，二次方程一定有两个根。$(x-2)^2=0$ x 有两相等的值 2，能满足整式方程 $x^2-4x+4=0$。但是对分式方程来