三角

《初等数学》

——一九七二年六月——

目　录

前　言

伟大领袖毛主席教导我们："人的正确思想只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来"。

三角知识就是来源于劳动人民长期生产实践。人类在从事工农业生产和研究天文、航海的实践中，提出了解三角形的问题。基于实践的要求，人们就在几何学的基础上，运用唯物辩证法的观点，进一步揭露了三角形边和角的关系，建立了三角函数。

三角学就是研究三角函数及其应用的数学，它是初等数学的一个组成部分。

现在的工农业生产、军事和自然科学中，三角知识仍然经常地应用着，例如，工人师付在进行车、铣、刨、钻、钳的划线和加工时，常用三角计标；农村水库的测量，人民解放军在计标方位角等以及我们学习力学、电学和高等数学时，也都经常用到三角知识。在中学数学的教学中，三角也是重要的一部分内容。

毛主席早在四二年就指出："在现在世界上，一切文化或文学艺术都是属于一定的阶级，属于一定的政治路线的"。

文化大革命以前，在刘少奇一伙的修正主义教育路线统治下，旧三角教材是为培养资产阶级的精神贵族服务的，打着深刻的剥削阶级的烙印。旧三角教材从抽象的定义出发，根本没有回答知识的来源问题，公式一大套就是与实际不对号，严重地脱离三大革命的实际，违背了实践第一的观点。它从定义到定义，从恒等式到恒等式，向学生灌输资产阶级的形而上学唯心主义。对旧三角教材的体系必须彻底地进行批判，肃清其流毒。我们要按照毛主席在《实践论》、《矛盾论》中所阐明的光辉的哲学思想，逐步建立三角教材的新体系。在新教材中，努力贯彻"政治统帅业务"、"理论联系实际"、"便于学生自学"这些原则。但是由于我们马列主义、毛泽东思想水平不高，还缺乏实践，所以难免有不少缺点错误，希望批评指正。

第一章　锐角三角函数及其应用

第一节　锐角三角函数

在几何中我们已经研究了，任意的一个三角形内角与角之间的关系，即三角形的三个内角的和是$180°$；一个直角三角形中，边与边之间的关系，即勾股定理：在直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方。根据这些知识，我们可以解决实践中的一些问题，例如已知直角三角形的任意两条边，就可以根据勾股定理，求出第三边，等，但是还有许多实际问题解决不了。

例1．工人师付要铣一个V型槽，如图1-1-1所示．

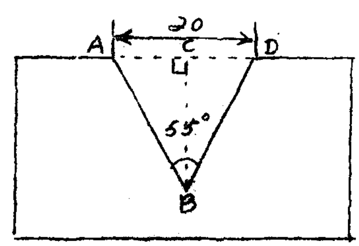
已知$AD=20mm$，$\angle ABD=55°$，

求铣削深度BC是多少？

根据已知条件可以算出，

$$AC=\frac{1}{2}AD=10mm.$$

$$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ABD=27°30'.$$



这个问题就变成在直角△ABC中，

图 1-1-1

已知一条直角边AC和一个锐角$\angle ABC$　求另一个直角边BC．这个问题用三角形内角定理和勾股定理都无法解决。

例2．人民解放军的雷达兵，日夜警惕地守卫着祖国神圣的领空，现在雷达屏上发现了敌机，并测出敌机到雷达站的斜距$AB=70$公里，仰角$\angle A=12°$，需要计算敌机的高度BC和它到雷达站的水平距离AC是多少？

这个问题是在直角△ABC中，已知斜边AB和一锐角$\angle A$　求两条直角边。同样这个问题，利用已有的几何知识解决不了。

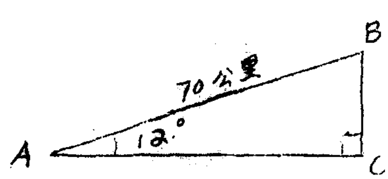


图 1-1-2

在三大革命实践中，类似这样的问题是很多的，因此，我们只

知道一个直角三角形中角与角、边与边之间的关系还不够，实践要求我们进一步研究，在直角三角形中边和角这一对矛盾，找出它们之间的内在联系，从而解决实践中提出的新问题。

一、锐角三角函数

毛主席教导我们："大家明白，不论做什么事，不懂得那件事的情形，它的性质，它和它以外的事情的关联，就不知道那件事的规律，就不知道如何去做，就不能做好那件事。"

在直角三角形中，边和角是两个完全不同的概念，它们之间有什么相互关系呢？只孤立的研究一个直角三角形，是不能发现它们之间的内在联系的。劳动人民在实践中，把一个直角三角形同其他图形如与另外的直角三角形联系起来时，逐步的认识了这个联系。

例1. 木工师付根据实践经验，为了保证房屋结实又经济，在作房柁时，柁长和脊高有一定的比例关系。若采用二七脊，则柁长（AD）为1丈时，脊高（BC）为2尺7寸〔如图1-1-3（1）所示〕。柁长（A_1D_1）为2丈时，脊高（B_1C_1）为5尺4寸〔如图1-1-3（2）所示〕

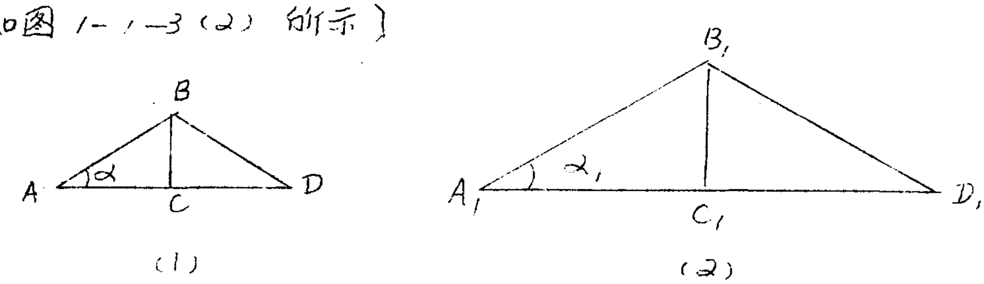


图1-1-3

尽管这两架柁的大小不同，但是它们的坡度相同，坡度就是坡面的高度和其水平距离的比值，在我们这个问题中，

$$坡度=\frac{脊高}{柁长的一半}$$

$$坡度_{(1)}=\frac{BC}{AC}=\frac{2.7}{5}=0.54.$$

$$坡度_{(2)}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\frac{5.4}{10}=0.54$$

$\therefore$ 坡度$_{(1)}$ = 坡度$_{(2)}$

两架梯的倾斜角$\alpha=\alpha_1$，可以用量角器度量这两个度证明这一点。

反之，如果两架梯的倾斜角$\alpha=\alpha_1$，则两架梯的坡度也相等。

证明：$\because \angle ACB=\angle A_1C_1B_1=90°$，

$\alpha=\alpha_1$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$$

即 坡度$_{(1)}$ = 坡度$_{(2)}$

例2．工人师付要在钢板上钻一个孔，这个孔与板面成75°角（如图1－1－4（1）所示），而钻床只能垂直向下打孔，怎样打这个斜孔呢？工人师付把钢板的一端垫高，使钢板与水平面成15°角，这时钻床打出来的孔，就与板面成75°角。（如图1－1－4（2）所示）那么工人师付打这一个斜孔，究竟要把钢板的一端垫多高呢？

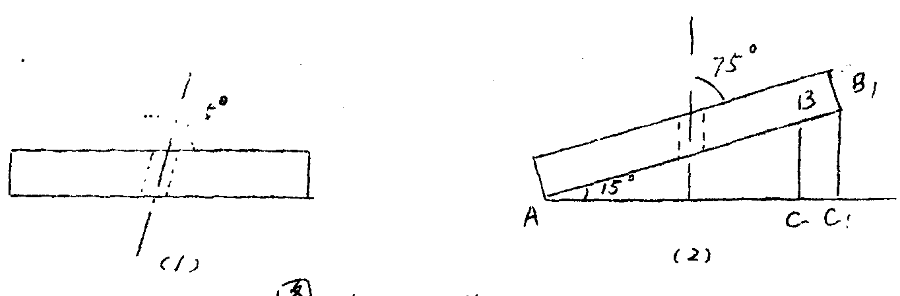


图 1－1－4

要保证打出的斜孔是75°，那么∠A一定得是15°，所以垫高钢板的一端时，距离A点越远，需要垫的越高，如果在C点就需要垫BC这样高，如果在C_1点，就需要垫B_1C_1这样高。虽然它们垫的高度

不同，但是，由于$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

$$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$$

即 在两个直角三角形中，$\angle A$的对边和邻边的比值相等。

反之，如果有$\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$，则两次垫高钢板，钢板与水平面夹角$\angle A$相同。

以上虽然是两个不同的实例，但是它们都说明了一个问题，两个直角三角形中，如果它们有一锐角相等，则这两个直角三角形的对边与邻边的比值相等。反之，如果一个直角三角形一个锐角的对边与邻边的比值等于另一个直角三角形一个锐角的对边和邻边的比值，这两个直角三角形的这一对锐角相等，从这里我们可以看出，在直角三角形中，边与角之间确实存在着内在联系，类似这样的实例是很多的，劳动人民在长期实践中，引起这种感觉和印象的东西反复多次，于是就产生了认识过程中的突变，产生了概念。

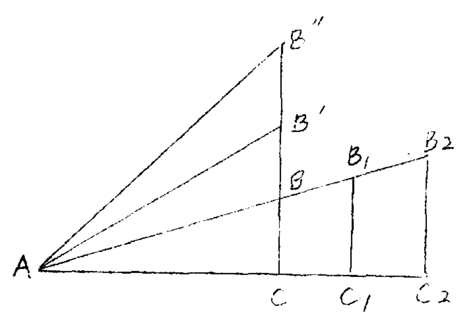
现在我们就一般情况，研究一下直角三角形中边和角的关系，从而建立锐角三角函数的概念。

首先，当直角三角形一个锐角一定时，则角的对边和邻边的比是一个定值。

如图1—1—5所示，

$\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$ $\triangle AB_2C_2$

有公共的$\angle BAC$，即$\angle BAC$是一定。



$\because \triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AB_2C_2$

$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=$定值．

图1—1—5

其次，当直角三角形一锐角的角度变化时，则角的对边和邻边

的比值也变化

如图1-1-5 所示：

在△ABC、△AB′C和△AB″C中，$\angle BAC < \angle B'AC < \angle B''AC$，AC为公共边 $BC < B'C < B''C$，

$$\therefore \frac{BC}{AC} < \frac{B'C}{AC} < \frac{B''C}{AC}$$

（紧接第9页）

二、三角函数间的关系：

毛主席教导我们："一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的。"

1. 同角三角函数的关系。

在直角三角形中，同角的正弦、余弦、正切、余切这些三角函数间不是彼此孤立的，它们之间有以下的关系：

(1) $$tg A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

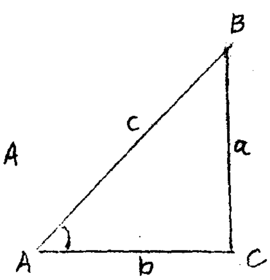


图 1-1-7

证明：$\because \sin A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = tg A$$

即 $$tg A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

(2) $$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

证明：根据勾股定理：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

等式两边同除以c^2，得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

即 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(3) $$tg A = \frac{1}{ctg A}$$

证明：$\because tg A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{ctg A}$

$$\therefore\ tg\,A=\frac{1}{ctg\,A}$$

从这三个关系，可以看出，同角三角函数间是相互联系的。我们知道了一个角的三角函数值，就可以把这个角的其他几个三角函数值推标出来，除了经常用到的四个三角函数外，还有：

$$\angle A\text{的正割}=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}}\qquad sec\,A=\frac{c}{b}$$

$$\angle A\text{的余割}=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}}\qquad csc\,A=\frac{c}{a}$$

2. 互为余角的两个角的三角函数间的关系：

在直角△ABC中，$\angle A+\angle B=90^\circ$ ∠A是∠B的余角，∠B也是∠A的余角，所以我们称∠A和∠B是互为余角。

互为余角的两个角的三角函数间有什么关系呢？按照三角函数的定义，我们分别写出∠A，∠B的三角函数：

$$sin\,A=\frac{a}{c},\qquad sin\,B=\frac{b}{c}$$

$$cos\,A=\frac{b}{c}\qquad cos\,B=\frac{a}{c}$$

$$tg\,A=\frac{a}{b}\qquad tg\,B=\frac{b}{a}$$

$$ctg\,A=\frac{b}{a}\qquad ctg\,B=\frac{a}{b}$$

比较∠A和∠B的三角函数可以看出：

$$sin\,A=cos\,B=cos(90^\circ-A)$$

$$cos\,A=sin\,B=sin(90^\circ-A)$$

$$tg\,A=ctg\,B=ctg(90^\circ-A)$$

$$ctg\,A=tg\,B=tg(90^\circ-A)$$

上面的结果归纳为一句话就是：一角的三角函数等于它的余角的余函数。（正弦的余函数是余弦，余弦的余函数是正弦，所以正

综上所述，在直角三角形ABC中，锐角A每 一个值时，∠A的对边和邻边的比是∠A的函数，我们叫做∠A的正切函数，简称正切，

即 $\angle A\text{的正切}=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$

写成 $Tg A=\dfrac{a}{b}$；

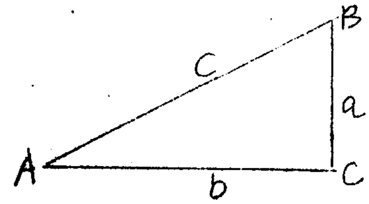


图 1—1—6

除了正切以外，实践中还常用以下一些边角关系.

$\angle A\text{的余切}=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$

写成 $Ctg A=\dfrac{b}{a}$；

$\angle A\text{的正弦}=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$.

写成 $Sin A=\dfrac{a}{c}$；

$\angle A\text{的余弦}=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$

写成 $Cos A=\dfrac{b}{c}$.

∠A的正切、余切、正弦、余弦称作∠A的三角函数，因为∠A属于锐角，所以∠A的三角函数也叫锐角三角函数，注意，不仅有∠A的三角函数，还有∠B的三角函数，定义方法与上面相同。

总之，通过实践，在把直角三角形和另一些直角三角形进行比较中，认识了直角三角形的边与角之间的辩证关系，建立起锐角三角函数的概念。

弦与余弦是互为余函数。同样正切与余切也是互为余函数）

三、特殊角的三角函数值：

在生产、技术和科学实践中，经常遇到30°，45°，60°这些特殊角的三角函数值，现在根据几何关系和锐角三角函数的定义，计称一下特殊角的三角函数值。

1. 30°角的三角函数值：在直角△ABC中，

$\angle A=30^\circ$，则根据几何关系，

$C=2a$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

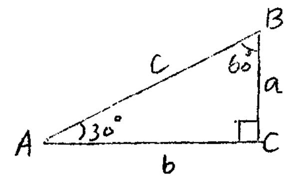


图 1-1-8

所以，

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{b}{c}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30^\circ=\frac{a}{b}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg\ 30^\circ=\frac{b}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$$

2. 60°角的三角函数值.

在直角△ABC中，$\angle B=60^\circ$，所以，

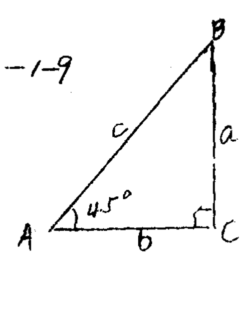
$$\sin 60^\circ=\frac{b}{c}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$tg\ 60^\circ=\frac{b}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$$

$$ctg\ 60^\circ=\frac{a}{b}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

图 1-1-9



3. 45°角的三角函数值：

在直角△ABC中，$\angle A=45^\circ$则

根据几何关系　$a=b$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$$

所以，$\sin 45°=\frac{a}{c}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45°=\frac{b}{c}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 45°=\frac{a}{b}=1$$

$$ctg 45°=\frac{b}{a}=1$$

根据上面的计标，我们可以把特殊角的三角函数值列表如下：

三角函数 \ A	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}=0.500$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$
Cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$	$\frac{1}{2}=0.500$
tg A	$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577$	1.	$\sqrt{3}=1.732$
ctg A	$\sqrt{3}=1.732$	1.	$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577$

四. 三角函数表：

实践中只知道特殊角的三角函数值还是不够的，实际计标中，时常要求非特殊角的三角函数值。因此制作了0°—90°的三角函数表，为了更好的使用这个表，我们先介绍一下角度变化时，三角函数值的变化情况。

1. 角度以 $0° \longrightarrow 90°$ 时，三角函数值的变化趋势。

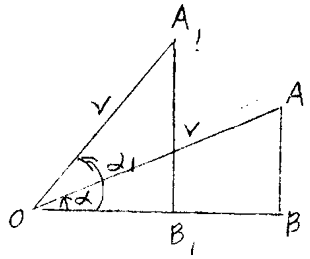
以O为圆心，r为半径，作$\frac{1}{4}$圆周。

在$\frac{1}{4}$圆内，作直角△OAB和直角△OA_1B_1（如图1—1—10所示）因此

$OA=OA_1=r$　　$\angle\alpha<\angle\alpha_1$.

下面我们以∠α和∠α_1为例，研究

图 1—1—10



角度从$\angle\alpha \to \angle\alpha_1$时三角函数值的变化情况。

根据正弦函数的定义：

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{r}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_1B_1}{r}$$

$\because A_1B_1 > AB \quad \therefore \sin\alpha_1 > \sin\alpha.$

即角度从$0^\circ \to 90^\circ$时，正弦函数值逐渐增大。

根据余弦函数定义：

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{r}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_1}{r}$$

$\because OB_1 < OB \quad \therefore \cos\alpha_1 < \cos\alpha.$

即角度从$0^\circ \to 90^\circ$时，余弦函数值逐渐减小。

根据正切函数的定义：

$$tg\,\alpha = \frac{AB}{OB}$$

$$tg\,\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

$\because A_1B_1 > AB$，而$OB_1 < OB \quad \therefore \frac{A_1B_1}{OB_1} > \frac{AB}{OB}$

即 $tg\,\alpha_1 > tg\,\alpha$

即角度从$0^\circ \to 90^\circ$时，正切函数值逐渐增大。

根据余切函数的定义：

$$ctg\,\alpha = \frac{OB}{AB}$$

$$ctg\,\alpha_1 = \frac{OB_1}{A_1B_1}$$

$\because OB_1 < OB$，而$A_1B_1 > AB \quad \therefore \frac{OB_1}{A_1B_1} < \frac{OB}{AB}$

$\therefore ctg\,\alpha_1 < ctg\,\alpha.$

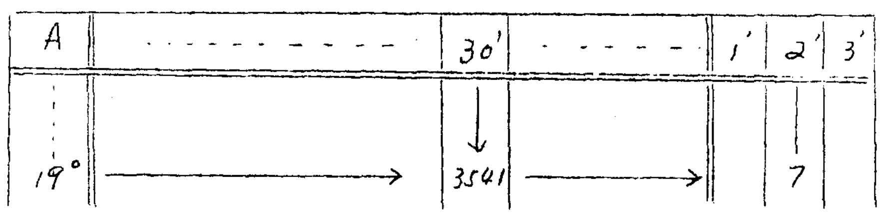
即角度从 $0° \to 90°$ 时，余切函数值逐渐减小。

总之，角度从 $0° \to 90°$ 时，正弦正切函数值增大，余弦余切函数值减小。

2. 举例说明表的用法：

例1. 查 $tg\,19°30'$ 的值

在正切表左边标有A的竖行中查出 $19°$，横着向右查到顶上标有 $30'$ 的竖行得 0.3541，就是要查的正切值，$tg\,19°30' = 0.3541$.



例2. 查 $tg\,19°32'$ 的值.

先在正切表中，查出 $tg\,19°30'$ 的值 0.3541，再继续沿着 $19°$ 横着查到修正值栏 $2'$ 那一竖行得数值 7，因为正切值在 $0° \to 90°$ 范围内，随着角度增大，正切值也增大，所以把修正值 0.0007 加在 0.3541 上即得 $tg\,19°32$ 的值. $tg\,19°32' = 0.3541 + 0.0007$
$= 0.3548$

例3，查 $ctg\,39°37'$ 的值.

余切表与正切表是同一张表。原因是 $tg(90° - A) = ctg\,A$

在余切表中，首先查出 $ctg\,39°36' = 1.2088$. 再从修正值栏查出 $1'$ 的修正值 0.0007. 因为余切值在 $0° \to 90°$ 范围内，随角度增大而减小，$\therefore ctg\,39°37' = 1.2088 - 0.0007 = 1.2081$.

例4，已知 $tg\,A = 0.4774$ 求锐角 $\angle A$

先在正切表内，查出与 0.4774 最接近的数值 0.4770，它所对应的角是 $25°30'$。因为 0.4774 比 0.4770 大 0.0004. 我们再从修正值栏中找 0.0004 所最接近的修正值，表中查到正好对应 $1'$，又

因正切值越大，角越大，所以正切值 0.4774 对应的角为 $25°31'$

$\therefore \angle A = 25°31'$

正弦，余弦表的查法，与正切，余切表的查法相同。

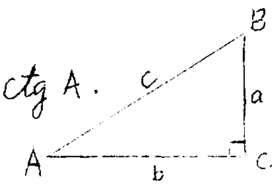
在解三角形中，经常要利用三角函数表进行计算，查表查错了，运算结果必然错误，加工的另件就要报废，给国家造成浪费，因此，我们必须以白求恩同志对工作的极端的负责任"的精神，认真查表，使之正确，迅速，这样才能很好的完成党和人民交给我们的任务。

习 题

1. 在直角△ABC中，已知：(1) $a=9$，$b=40$；

(2) $a=5$，$c=13$

求∠B的正弦值，余弦值，余切值．



2. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\cos A$、$\operatorname{tg} A$，$\operatorname{ctg} A$．

3. 已知 $\cos A=\frac{1}{4}$；求 $\sin A$、$\operatorname{tg} A$、$\operatorname{ctg} A$．

4. 已知 $\operatorname{tg} A=2$　求 $\operatorname{tg}(90^\circ-A)$．

5. 下列各式中如有错误，请把它改过来：

(1) $\sin^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ=1$

(2) $\sin 10^\circ+\cos 10^\circ=1$

(3) $\operatorname{tg} 30^\circ=\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 31^\circ}$

(4) $\operatorname{ctg} 40^\circ=\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}$

6. 化简下列各式：

(1) $\dfrac{1-\sin^2 A}{\cos A}$，　(2) $\dfrac{\sin A}{\operatorname{tg} A}$．

(3) $\dfrac{\cos(90^\circ-A)}{\sin(90^\circ-A)}$，　(4) $\operatorname{tg} A\cos A-\sin A$，

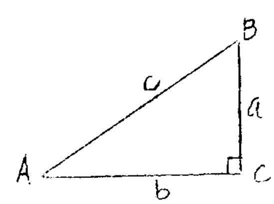
(5) $\operatorname{tg} A\cdot\sin A+\cos A$．

(6) $\sin^2 A(1+\operatorname{ctg} A)+\cos^2 A(1-\operatorname{tg} A)$．

7. 在直角△ABC中

(1) 已知：$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$a=27$

求 b和c．



(2) 已知 $\angle A=\frac{\pi}{6}$， $b=45$

求 a 和 c，

(3) 已知 $\angle A=\frac{\pi}{4}$， $c=120$，

求 $\angle B$ 和 a

(4) 已知 $\angle B=\frac{\pi}{3}$， $a=65$，

求 b 和 c

8. 计算：

(1) $1-\sin^2 60^\circ-\cos^2 60^\circ$；

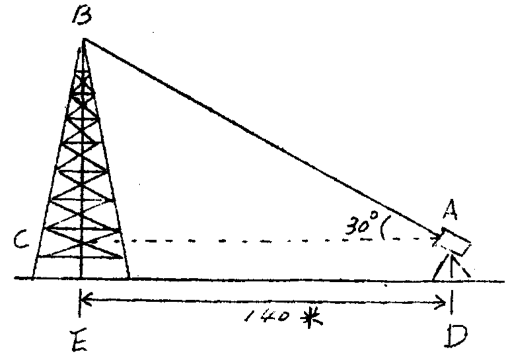
(2) $(1+\cos 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\sin 45^\circ+\cos 60^\circ)$；

(3) $\cos 60^\circ-\dfrac{3\sin 45^\circ}{4\cos 45^\circ}+\cos^2 30^\circ-\sin 30^\circ$；

(4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 30^\circ}{1+\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\operatorname{tg} 30^\circ}$；

(5) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

9. 在离铁塔底140米的地方，利用测角器AD，测得塔顶的仰角 $\alpha=30^\circ$，已知测角器的高AD等于1.3米，求塔高BE



10. 查表求出下列三角函数值：

(1) $\sin 28^\circ 12'$、$\sin 28^\circ 10'$、$\sin 28^\circ 14'$、$\sin 31^\circ 24'$、$\sin 82^\circ 33'$、$\sin 4^\circ 52'$