北京广播函授学校

初 中 班

平 面 几 何 讲 义

上 册

—— 1963 ——

目　录

总說明……………………………………………………………………（1）
第一章　点和直綫的位置关系……………………………………（5）
第二章　三角形…………………………………………………………（22）
第三章　四边形…………………………………………………………（60）
第四章　圓……………………………………………………………（82）

总說明

1. 我們已經知道：**平面几何是系統研究平面图形的性质的一門学科**. 几何里的平面图形是由直綫(或綫段)和圓(或弧)所組成的. 这些图形是图形的基础. 在日常生活和生产中，在进一步学习數学和其他科学技术时，都要接触到这些图形，因此我們应当很好地掌握这些图形的性质和运用这些性质来解决实际問題的技能和技巧.

2. **图形的性质是从形状、大小和相互位置关系三个方面来陈述的.** 例如：

(1) 如果一个三角形的两边相等，那么它們所对的角相等；

(2) 如果一个三角形的两边不等，那么它們所对的角不等，較长的边所对的角較大；

(3) 三角形三个内角的和等于 $2d$；

(4) 三角形三条高綫相交于一点；

(5) 三角形的三条中綫相交于一点，并且各边中点到这点的距离，等于这边上的中綫的三分之一；

(6) 如果一个三角形有一个角是直角，那么这个三角形就是直角三角形.

其中(1)(2)(3)是說明元素間的大小关系；(4)是說明位置关系；(5)是既說明位置关系又說明大小关系；(6)是說明形状

的。

有些位置关系是通过有沒有，有几个公共点用定义描述的。例如：如果两条直綫有两个公共点則重合，有一个公共点則相交，沒有公共点則平行（这里的两条直綫是指在同一个平面內的两条直綫）；如果一条直綫和一个圓有两个公共点則相交，有一个公共点則相切，沒有公共点則不相遇。有些位置关系是用定理判定的——符合于某种条件必有某种位置关系。当然上述的定义也是判定位置关系的一种依据。

关于大小关系則除了判定相等，不等(大于或小于)以外，几何量(如綫段的长，角的度数等)的大小也是可以用数来表示的。由此可知两个几何量既可以比較大小也可以相加相減，可以通过数也可以用图来进行这些工作。

3. **研究图形性质是用定义、定理、公理的形式，通过邏輯推理的方法来进行的**。定义是給予一个概念(名称或术語)的意义的說明；定理是經过論証而肯定的眞理。定义一个新概念要用旧概念来解释，新概念才具有精确的含意；証明后面的定理要用前面的定理作論証的依据，才是严格的証明。这样按新旧前后的順序把定义和定理分別排列起来，就形成两个系統——定义系統和定理系統。但排列在最前边的一个定义和定理又用什么来解释和証明呢？实际上排列在最前面的一些概念，是我們在生活中早已熟悉，不需要作任何解释或描述的概念；排列在最前面的一些定理，是人类在劳动实践中經过反复驗証早已公认的眞理。我們将前者叫做基本概念或原始概念，对它們不再給予定义，将后者叫做公理，对它們不再給予証明。

在平面几何的課本里，一般是将点和直綫作为两个基本概

念。凡是可以用已經提出的基本概念解释清楚的概念，都不再作为基本概念。例如，直綫是基本概念，射綫和綫段就可以用直綫来解释，即"直綫上某一点一旁的部分叫做射綫"；"直綫上任意两点之間的部分叫做綫段"。这样就可以把基本概念的数目尽量减少，以便发揮用旧概念解释新概念的作用。

同样我們也把公理的数目尽量减少，以便发揮推理和論証的作用。一般課本里只給出三个公理，即連綫公理——过两个点只能連一条直綫；平行公理——过直綫外一点只能引一条直綫和这条直綫平行；移形公理——在移动几何图形的位置时，并不改变这图形的形状和大小。此外，因为研究几何图形的主要性质常要考虑几何量的大小，所以等量公理和不等量公理，在几何里和在代数里同样重要。

在几何里，研究图形性质是采用严格的推理証明的方法。就是說，进行推理必須有根据，定义、公理和已經得到証明的定理都可以作为推理时的根据。例如想証明"直角三角形的两个銳角互余"，就可以引用定理"三角形的內角和是 $2d$"，先肯定直角三角形三个內角的和是 $2d$，然后根据定义指出直角三角形的直角是 d，再根据等量减等量的公理肯定两个銳角的和是 d，这就証明了所求証的問題。在推理过程中，任何一步缺乏根据論証就是不严格的，这一点必須注意。

4. 根据几何所研究的內容和所采用的方法可以看出：想学好几何必須**明确概念、熟記定义、公理和定理**的內容。很明显，概念不清会导致种种錯課；証明一个問題常要用到好几个定理，如果忘記了其中的某一个，就会使推理的思路中断。

复习时除了要掌握几何图形的基本性质外，还要认清它們

之間的从属关系和彼此之間的联系，这样才能更好地理解和掌握所学的知識。由于几何的系統性很强，复习时必須循序漸进，打好基础。

5. 几何是邏輯性很强的一門学科。**学会邏輯推理，提高思維能力**，也是学习几何的主要目的之一。解題的过程是通过思維将有关知識連系起来，根据条件导出結論的过程。这就要求我們，在分析問題时，首先要认清条件和結論，随之联想到与条件及結論有关的知識，从而找出联系，得到解法。解題时，有时須要添加輔助綫，借以发现已知条件和結論之間的联系，但輔助綫应該是通过分析认为确有必要再有目的地添加，不要随意去碰。

要重視一些定理的証明过程，这样，不仅可以更好地理解和掌握这些定理，而且还能提高我們的思維能力，学会一些重要的証題方法。

6. **画图**是几何里的一个重要問題。几何是研究图形性質的学科，一般是画出图来，观察图形中各元素間的相互关系，从而进行推理。因此正确的图能对解法給予启发，不正确的图则有錯誤的直观作用，有可能导致錯誤的推理。例如在証題时，如果錯誤地将任意三角形的图画成等腰三角形，則在推理时就有可能錯誤地引用有关等腰三角形的定理，因而使推理发生錯誤；反之，如果錯誤地将等腰三角形的图画成任意三角形，就有可能忘了等腰的条件，因而証不出結論。对于計算題画图同样重要，在一个符合題設条件的图中，答数已被画了出来，无論是綫段的长短或是角的大小，算出的答数应当和图一致，因此可以从图大致看出得数的是否正确。

7. 要注意提高**計算能力**和**书面表达能力**. 計算要准确、迅速，注意选用恰当的計算公式和簡捷的解法，对于計算的結果要有检查的习惯. 书面表达应当层次分明，簡单扼要，論証确切，书写整洁. 在这次复习中要严格要求自己，不仅牢固地掌握知識，而且通过作业，相应地使思維、画图、計算，表达等方面的能力得到提高.

第一章　点和直綫的位置关系

一　說明

1. 在总說明里已經談过，平面几何所研究的几何图形是直綫形和圓. 由于直綫形的性質是研究其他各种图形的性質所必須具备的基础知識，因此研究直綫形的性質是几何中最基本的問題.

对直綫形性質的研究是从点、直綫、射綫、綫段等最基础的概念开始的，通过两条直綫的位置关系导出垂直和平行等重要概念，再进一步研究三角形、四边形等直綫图形的性質. 因此这一章所复习到的一些概念都是掌握以后各章知識的基础.

2. **点**和**直綫**是两个不用定义的基本概念. 虽然对它們不加定义，有些性質仍是我們所应当了解的，即点只有位置而沒有大小，直綫的长是无限的但沒有宽度和厚度.

3. 直綫和点是基本概念，而**射綫**和**綫段**則可以用这两个

基本概念来解释清楚，于是我們定义了射綫和綫段．应該认清直綫、射綫和綫段三者之間的联系和区别．

4．**点和直綫的位置关系**，包括点与点之間、点与直綫之間以及两条直綫之間的位置关系．对于点与点則有重合与不重合；对于点与直綫則有点在綫上、点在綫外；对于两条直綫則有重合、相交、与平行各种不同的情况．

引入了距离和角的概念以后，应用距离和角可以帮助进一步描述位置关系．

点与点的位置关系可以用“两点間的距离”来进一步描述．直綫公理保証了“两点間的距离”是存在的和唯一的．

点与直綫的位置关系可以用“点到直綫的距离”来进一步描述．公理“过直綫上或直綫外一点都只能作一条直綫和已知直綫垂直”以及“两点間的距离”的概念，保証了“点到直綫的距离”是存在的和唯一的．

两条直綫的位置关系中，对于相交的关系引入了角的概念；而对于平行的关系則是用“平行綫間的距离”来进一步描述．

应該认識距离是描述图形位置关系的一个重要因素，例如：两个点間的距离較大，就說明这两个点的位置相离較远；一个点到一条直綫的距离較小，就說明这个点的位置离直綫較近．

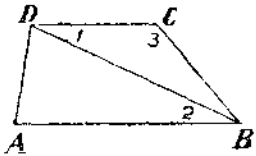
5．本章着重研究两条直綫之間的位置关系——**相交和平行**．我們知道直綫形不外是由某些相交直綫或平行直綫所組成的图形，如平行四边形，它的邻边是相交的，它的对边是平行的．在研究和圓有关的图形性质时，也不能脫离直綫形的知識，

当然也就不能脱离相交直綫和平行綫的知識。

两条直綫相交成直角——互相垂直，对于这一种特殊位置关系除了要掌握有关概念外，还应該能熟练地过一个巳知点画出巳知直綫的垂綫来。

平行綫的定义着重指出"在同一平面内"的原因，是因为在空間存在着沒有公共点又不平行的两条直綫，这样的两条直綫不在同一平面内。定义排除了这种情况，所以在平面几何范圍内，用定义証明两条直綫平行时，只証明它們不相交就可以了。

6. 平行綫判定定理和性质定理都使用了两条直綫和第三条直綫相交所成的角。为了正确和熟练地掌握这两类定理，必須把这些角的相互位置关系认清。在考慮問題时首先要明确前提：哪两条直綫是前两条直綫，哪一条直綫是第三条直綫。



如图：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直綫 DC、AB 和第三条直綫 DB 相交所成的内錯角；$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是直綫 DB、CB 和第三条直綫 DC 相交所成的同旁内角；而 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 則不是由两条直綫和第三条直綫相交所成的角。

用定义判定两条直綫的平行是可以的，如果根据平行綫的判定定理来判定，就更方便一些。課本上所讲的判定定理共有三个，并将其中的第一个（两条直綫被第三条直綫所截，如果同位角相等这两条直綫就平行）作为公理。实际上借助于前面的知識，这一命题是可以証明的，只是証法比較复杂，初学几何时不易理解，为此略去不証，但为了不使公理和定理混淆，

这一命题还应作为定理，因此关于平行綫的判定方法，我們共有三个判定定理．至于公理則在平行綫这一章里只有一个，就是所謂平行綫公理：过直綫外一点，只能引一条直綫和这条直綫平行．

应当注意判定定理和性質定理的区别．具体到平行綫，一般是从角的关系去判定两条直綫是否平行；而性質定理則是在已知二直綫平行的前提下，导出某两角的相等或互补的关系．我們必須分清这两类定理的条件和結論，认清它們的实質．

要特别熟练应用直尺和三角板画平行綫的方法，这个画法的理論根据是平行綫的判定定理：两条直綫被第三条直綫所截，如果同位角相等，这两条直綫就平行．这是經常使用的画图方法之一．

二　內容提要

§1．点、直綫、射綫、綫段

1．基本概念——点、直綫．

2．射綫　在直綫上某一点一旁的部分叫做射綫．

3．綫段　直綫上任意两点之間的部分叫做綫段．

4．**关于直綫的公理　过两点只能連一条直綫．**

5．**关于綫段的公理　两点間以連結这两点的綫段为最短．**

6．綫段的相等和不等，綫段的加減

綫段的相等和不等是看移形后能不能重合．这时要用到**移形公理：在移动几何图形的位置时，并不改变它的形状和大小．**

7. **两点間的距离** 两点間所連綫段的长。

§2. 两条直綫的位置关系 重合、相交、平行。

1. 重合

2. 相交 和两条直綫相交有关的知識有：

(1) **角**

1) **角的定义** **有一个共同端点的两条射綫所組成的图形叫做角。**

2) 角的相等和不等、角的加減

3) 角的度量

4) 角的分类 按角的大小分为：銳角、直角、鈍角、平角、周角。

5) 两角的关系

数量关系：互为余角、互为补角。

位置关系：对頂角、互为邻角。

(2) **垂綫**

1) **互相垂直** **两条直綫相交成直角，这两条直綫叫做互相垂直。**

2) **垂綫** **互相垂直的两条直綫，其中的一条叫做另一条的垂綫。**（它們的交点叫做垂綫足。）

3) 垂綫的长 从直綫外一点向直綫引垂綫，从这点到垂足的綫段的长叫做从这点到这直綫所引垂綫的长。

4) **点到直綫的距离** **从这点到直綫所引垂綫的长叫做点到直綫的距离。**

5) **垂綫的性质**

公理 **过直綫上或直綫外一点，都只能作一条直綫和已知**

直綫垂直.

定理　从直綫外一点到这条直綫上各点所連的綫段中，以垂綫的长为最短.

3. 平行

(1) **定义　在同一平面内不相交的两条直綫叫做平行綫.**

(2) **判定定理**

1) 两条直綫被第三条直綫所截，如果同位角相等，这两条直綫就平行.

2) 两条直綫被第三条直綫所截，如果內錯角相等，这两条直綫就平行.

3) 两条直綫被第三条直綫所截，如果同旁內角互补，这两条直綫就平行.

(3) **平行公理　过直綫外一点，只能引一条直綫和这条直綫平行.**

(4) **性质定理**

1) 两条平行綫被第三条直綫所截，同位角相等.

2) 两条平行綫被第三条直綫所截，內錯角相等.

3) 两条平行綫被第三条直綫所截，同旁內角互补.

(5) 二边分别平行或者分别垂直的两个角相等或者互补.

三　范例

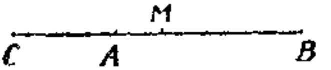
1. 綫段 $AB=29.8$ 毫米，延长 BA 到 C 使 $AC=1.8$ 厘米，求 BC 中点 M 到 A 点的距离.

解：

$\because$　　$AB=29.8$ 毫米 $=2.98$ 厘米，$AC=1.8$ 厘米，

$\because \quad BC = AB + AC$

$= 2.98 + 1.8 = 4.78$(厘米)。



$\because \quad M$为BC的中点，

$\therefore \quad MC = \frac{1}{2}BC = \frac{4.78}{2} = 2.39$(厘米)。

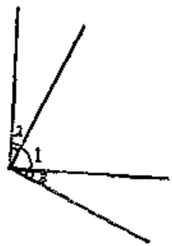
$AM = MC - AC = 2.39 - 1.8 = 0.59$(厘米)。

答：BC 中点 M 到 A 点的距离是 0.59 厘米。

注意：这类問題应注意延长綫段的方向。

2. 求証：同角的余角相等。

已知：$\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的余角，$\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的余角。



求証：$\angle 2 = \angle 3$。

証明：

$\because \quad \angle 2$ 是$\angle 1$ 的余角(已知)，

$\therefore \quad \angle 2 + \angle 1 = 90°$(互为余角的定义)。

同理 $\angle 3 + \angle 1 = 90°$，

$\therefore \quad \angle 2 = 90° - \angle 1$，$\angle 3 = 90° - \angle 1$ （移項法則）。

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 3$ （等量代替）。

注意：这个例題，也可以作为定理来引用。

3. 一个銳角的余角是它补角的 $\frac{1}{4}$，这个銳角是多少度？

解：設这个銳角等于 x 度，那么它的余角就等于 $(90-x)$ 度，它的补角就等于 $(180-x)$ 度。

因为这个銳角是它补角的 $\frac{1}{4}$，

所以 $$90-x=\frac{1}{4}(180-x).$$

$$360-4x=180-x.$$

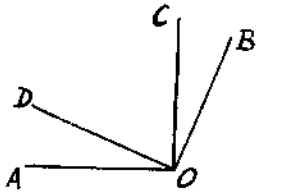
$$-3x=-180.$$

$$x=60.$$

答：这个銳角等于 60 度。

4. 过鈍角的頂点引两边的垂綫，它們构成 $\frac{4}{7}$ 直角，求这鈍角的度数。

已知：$\angle AOB$ 为鈍角，$OC\perp OA$, $OD\perp OB$, $\angle DOC=\frac{4}{7}d$.



求：$\angle AOB$.

解：

$\because$ $OC\perp OA$,

$\therefore$ $\angle AOC=d$（垂綫定义）.

即 $\angle AOD+\angle DOC=d$.

又$\because$ $\angle DOC=\frac{4}{7}d$（已知），

$\therefore$ $\angle AOD=d-\frac{4}{7}d=\frac{3}{7}d.$

同理 $OD\perp OB$,

$\therefore$ $\angle BOD=d$, 即 $\angle BOC+\angle DOC=d$.

$\therefore$ $\angle BOC=d-\frac{4}{7}d=\frac{3}{7}d.$

$\therefore$ $\angle AOB=\angle AOD+\angle DOC+\angle BOC$

$=\frac{3}{7}d+\frac{4}{7}d+\frac{3}{7}d=1\frac{3}{7}d.$

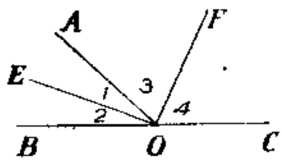
答：这个鈍角为 $1\frac{3}{7}$ 直角。

注意：此题应注意使所画图形符合題意。

5. 求証：两个邻补角的平分綫互相垂直。

已知：$\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 互为邻补角，OE 平分 $\angle AOB$，OF 平分 $\angle AOC$。

求証：$OE\perp OF$.



証明：

$\because$ $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 互为邻补角，

$\therefore$ $\angle AOB+\angle AOC=180^\circ$.

即 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$.

又$\because$ OE 平分 $\angle AOB$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle AOB$;

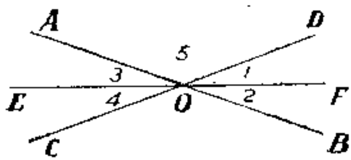
$\because$ OF 平分 $\angle AOC$,

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\angle AOC$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

即 $\angle EOF=90^\circ$.

$\therefore$ $OE\perp OF$（垂綫定义）。



6. 試証对頂角的平分綫互为反向延长綫。

已知：$\angle AOC$和$\angle BOD$

是对頂角，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOD$.

求証：OE 和 OF 互为反向延长綫.

証明：

$\because$ $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 是对頂角，

$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$.

又$\because$ OF 平分 $\angle BOD$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BOD$.

同理 $\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\angle AOC$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$（等量的一半相等）.

$\because$ CD 为一直綫，

$\therefore$ $\angle 4+\angle 3+\angle 5=180^\circ$.

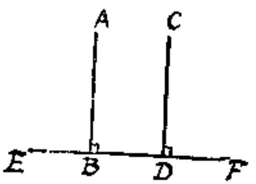
$\because$ $\angle 1=\angle 4$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3+\angle 5=180^\circ$.

$\therefore$ $\angle EOF$ 为平角，即 E, O, F 三点在一条直綫上.

$\therefore$ OE 和 OF 互为反向延长綫.

7. 如果两条直綫都垂直于第三条直綫，那么这两条直綫平行.



已知：$AB\perp EF$，$CD\perp EF$.

求証：$AB\parallel CD$.

証明：

$\because$ $AB\perp EF$，$CD\perp EF$（已知），

$\therefore$ $\angle ABD=90^\circ$，

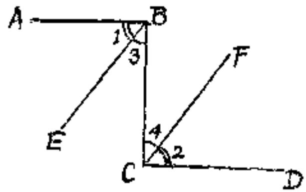
$\angle CDF=90^\circ$(垂綫定义)．

$\therefore$ $\angle ABD=\angle CDF$(等量代替)．

$\therefore$ $AB\parallel CD$(同位角相等，則二直綫平行)．

8. 已知：$AB\perp BC$，$CD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$．

求証：$BE\parallel CF$．



分析：要証 $BE\parallel CF$ 就应想到平行綫的判定定理，只要能証出 $\angle 3=\angle 4$ 就可以了．再从已知条件 $AB\perp BC$, $CD\perp BC$, $\angle 1=\angle 2$, 可推出 $\angle 3=\angle 4$.

証明：

$\because$ $AB\perp BC$，$CD\perp BC$，

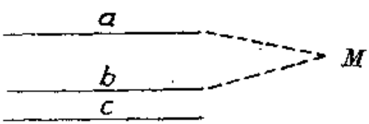
$\therefore$ $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$(垂綫定义)．

$\because$ $\angle 1=\angle 2$(已知)，

$\therefore$ $\angle ABC-\angle 1=\angle BCD-\angle 2$ (等量减等量其差相等)，即 $\angle 3=\angle 4$．

$\therefore$ $BE\parallel CF$ (內錯角相等則二直綫平行)．

9. 証明：如果两条直綫都和第三条直綫平行，这两条直綫也互相平行．



已知：直綫 $a\parallel c$，$b\parallel c$．

求証：$a\parallel b$．

証明：如果 a 和 b 不平行，它們就相交．設它們的交点是 M，这就是說：过点 M 可以引两条不同的直綫 a 和 b 都和 c 平行，这是和平行公理相矛盾的．

所以 $a\parallel b$．