SHULIHUASHENG YUANDI

N55/1:6

数理化生園地

6

1984/2

上海科学技术出版社

数理化生園地

6

(1984/2)

上海商务印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
(上海市瑞金二路四五〇号)
上海科学技术出版社出版

统一书号：13119·1174
定　价：0.20元

·学习辅导·

(1) 函数的定义域　顾鸿达
(6) 一元二次方程的判别式　陈瑞琛
(9) 一个三角恒等式的应用　王茂森
(13) 从推导二次方程求根公式想到的　蔡秀英
(14) 这样算是做功吗?　钱瑞芸
(16) 上滑还是下滑?　李漠君
(18) 机械能守恒和动量守恒　刘国钧
(21) 同是叁键　性质殊异　姚守正
(23) 加聚反应的归类记忆　曹南山

·解题方法谈·

(25) 怎样解排列、组合应用题　徐美琴
(29) 用三角代换法巧解方程　梅门昌
(32) $\Delta E=Q+W$ 中正负号的选取　谭玉美
(36) 浅谈溶液中离子共存的问题　马　骁
(38) 怎样判断物质熔沸点的高低　黄承海等

·防止搞错·

(41) "浮"与"沉"　王　森
(43) 生活经验与物理概念　周勤荣
(44) 错在哪里?　张镇海

·学生中来·

(46) 这沉淀究竟是什么物质?

·观察与实验·

(48) 中和滴定实验操作析疑　吴　峥
(50) 用染色法测定种子的生活力　戴象明
(51) 介绍几种简易的垂直绿化棚架　张宝忠

·学一点科技史·

(54) 自由落体规律的发现　姚德娥

·知识博览·

(56) 氢键趣谈　解守忠
(59) 种子传播的"本领"　陈再光
(62) 鱼类奇妙的育儿术　张万佛

·你知道吗?·

(64) 关于"科学家"这个名称

学习辅导

函数的定义域

顾鸿达

我们把自变量在实数范围内允许取值的全体，叫做函数的**定义域**. 对于解析式直接给出的不附加条件的函数，通常把使解析式有意义的自变量允许值作为函数的定义域. 确定函数定义域的常用方法有：

1. $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$（其中 $P(x)$、$Q(x)$ 为整式），$Q(x)\neq 0$;

2. $y=\sqrt[2n]{P(x)}$（其中 $n\in\mathbf{N}$），$P(x)\geqslant 0$;

3. $y=\log_a P(x)$（其中 $a>0$, $a\neq 1$），$P(x)>0$;

4. $y=\operatorname{tg} P(x)$，$P(x)\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$（其中 $k\in\mathbf{Q}$）;

5. $y=\operatorname{ctg} P(x)$，$P(x)\neq k\pi$（其中 $k\in\mathbf{Q}$）;

6. $y=\arcsin P(x)$，或 $y=\arccos P(x)$，$-1\leqslant P(x)\leqslant 1$.

当函数由多个函数的四则运算所构成时，就取它们的交集（包括除式不为零）为函数的定义域. 当函数由几个函数复合所构成时，如 $f(x)=f_1[f_2(x)]$，一般先求出 $f_1(u)$ 的定义域 $a<u<b$，再解不等式 $a<f_2(x)<b$，得 $f(x)$ 的定义域.

[例 1] 求函数 $y=\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{x}}}$ 的定义域.

解 这函数的解析式是繁分式，它有三个不同的分母，都须不为零.

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ 4+\dfrac{5}{x}\neq 0, \\ 2+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{x}}\neq 0, \end{cases}$$

即 $x\neq 0,\ x\neq -\dfrac{5}{4},\ x\neq -\dfrac{10}{11}$. 所以，函数的定义域为

$$x<-\frac{5}{4},\ \text{或}\ -\frac{5}{4}<x<-\frac{10}{11},\ \text{或}\ -\frac{10}{11}<x<0,\ \text{或}\ x>0.$$

本题是否可以先把函数解析式化简，然后再求它的定义域？请读者试一试.

[例 2] 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\lg(4-x)}$ 的定义域.

解 从不等式组

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0, \\ \lg(4-x)\neq 0, \\ 4-x>0, \end{cases}$$

得函数的定义域为

$$x\leqslant 1,\quad \text{或}\quad 2\leqslant x<3,\quad \text{或}\quad 3<x<4.$$

[例 3] 求函数 $y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\log_4(2x-1)}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ 的定义域.

解

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\log_4(2x-1)}-\frac{1}{\sqrt{e}}\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\log_4(2x-1)}\geqslant\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

因为底 $\dfrac{1}{e}$ 是小于 1 的正数，所以 $y=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ 是递减函数，因此有

$$\log_4(2x-1)\leqslant\frac{1}{2},$$

即
$$\begin{cases}2x-1\leqslant 4^{\frac{1}{2}},\\ 2x-1>0,\end{cases}$$

得函数定义域为 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}$.

对于带有参数的函数，在求函数定义域时，须就参数进行讨论.

[例 4]　求函数 $y=\frac{\sqrt{(x-a)(x-1)}}{\sqrt{2a-x}+\sqrt{2-x}}\left(其中\ \frac{1}{2}<a<2\right)$ 的定义域.

解
$$\begin{cases}(x-a)(x-1)\geqslant 0,\\ 2a-x\geqslant 0,\\ 2-x\geqslant 0,\\ \sqrt{2a-x}+\sqrt{2-x}\neq 0.\end{cases}$$

就 a 讨论：

i. 若 $1<a<2$, 从上述不等式组得
$$\begin{cases}x\geqslant a\quad 或\quad x\leqslant 1,\\ x\leqslant 2a,\\ x\leqslant 2.\end{cases}$$

即
$$x\leqslant 1\quad 或\quad a\leqslant x\leqslant 2.$$

ii. 若 $a=1$, 有
$$\begin{cases}(x-1)^2\geqslant 0,\\ x\leqslant 2,\\ \sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}\neq 0.\end{cases}$$

即
$$x<2.$$

iii. 若 $\frac{1}{2}<a<1$, 有
$$\begin{cases}x\geqslant 1\quad 或\quad x\leqslant a,\\ x\leqslant 2a,\\ x\leqslant 2.\end{cases}$$

即 $$x\leqslant a,\quad 或\quad 1\leqslant x\leqslant 2a.$$
所以，函数的定义域为：当 $1<a<2$ 时，$x\leqslant 1$ 或 $a\leqslant x\leqslant 2$；当 $a=1$ 时，$x<2$；当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$x\leqslant a$ 或 $1\leqslant x\leqslant 2a$.

[例 5] 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域 $0\leqslant x\leqslant 1$，求关于 x 的函数 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

解 由已知条件，得

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant -a+1,\\ a\leqslant x\leqslant a+1.\end{cases}$$

这是分别以 $-a$, a 为左端点、区间长度都为 1 的两个闭区间. 把它们表示在数轴上时，容易看到：当 a 与原点距离大于 $\frac{1}{2}$ 时，这两个区间相离；当 a 与原点距离不大于 $\frac{1}{2}$ 时，它们才有公共部分. 如图 1 所示.

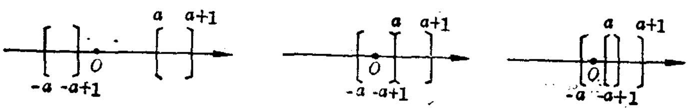


图 1

所以，函数的定义域为：当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$x\in\varnothing$；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{1}{2}$；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\leqslant x\leqslant -a+1$.

利用函数性质解应用问题时，在求得函数解析关系式后，要注意根据具体问题实际意义去确定函数的定义域.

[例 6] 在长、宽分别为 a、b 的矩形 $(a>b)$ 中，截得四边形 $ABCD$（图 2），求其最大面积.

解 设截得的四边形 $ABCD$ 面积为 y，则

$$y=ab-x^2-(a-x)(b-x)=-2\left(x-\frac{a+b}{4}\right)^2+\frac{(a+b)^2}{8}.$$

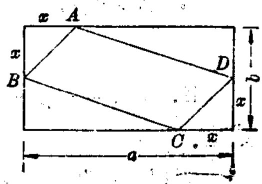


图 2

最大面积能否说一定是 $\frac{(a+b)^2}{8}$ 呢？这须有 $\frac{a+b}{4}$ 是否在这函数的定义域 $(0, b]$ 内所决定。

i. 当 $\frac{a+b}{4}\in(0, b]$，即 $b\geqslant\frac{a}{3}$ 时，函数 y 在 $x=\frac{a+b}{4}$ 时取得最大值为 $\frac{(a+b)^2}{8}$；

ii. 当 $\frac{a+b}{4}\notin(0, b]$，即 $b<\frac{a}{3}$ 时，函数 y 在 $(0, b]$ 内是递增的，因此在 $x=b$ 时有最大值为 $ab-b^2$。

所以，截得四边形 $ABCD$ 的最大面积当 $b\geqslant\frac{a}{3}$ 时，为 $\frac{(a+b)^2}{8}$；当 $b<\frac{a}{3}$ 时，为 $ab-b^2$。

当函数定义域关系比较隐蔽时，必须对关系式中的字母允许范围逐个讨论。

[例 7] 已知方程 $x^2+px+q=0$ 与方程 $x^2+qx+p=0$ 的两实根之差相等，求实数 p、q 间的函数关系。

解 令 $x^2+px+q=0$ 的两根为 α_1、α_2；$x^2+qx+p=0$ 的两根为 β_1、β_2。则

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=p^2-4q,$$

$$(\beta_1-\beta_2)^2=q^2-4p,$$

从而有

$$p^2-4q=q^2-4p.$$

$$(p-q)(p+q+4)=0,$$

$$q=p \quad 或 \quad q=-p-4.$$

因为原方程有实根，所以

$$\begin{cases} \Delta=p^2-4q\geqslant 0, & (1)\\ \Delta=q^2-4p\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

i. 当 $q=p$ 时，代入(1)式有 $p^2-4p\geqslant 0$，解得

$$p\leqslant 0 \quad 或 \quad p\geqslant 4.$$

ii. 当 $q=-p-4$ 时，代入(1)式有 $p^2+4p+16\geqslant 0$，此式恒成立.

所以，实数 p、q 间的函数关系为 $q=p$(其中 $p\leqslant 0$ 或 $p\geqslant 4$)，或 $q=-p-4$(其中 $p\in\mathbf{R}$).

这个例子说明，求函数关系应包括求出函数的定义域.

函数定义域是函数概念中的三个要素之一. 利用解不等式和解不等式组求函数定义域是很重要的方法，以上只是列举了一些初步的应用. 读者在进一步学习中还会遇到许多求函数定义域的问题.

一元二次方程的判别式

陈瑞琛 (扬州师范学院)

对于实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (其中\ a\neq 0), \tag{1}$$

它的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$. 我们知道，当 $\Delta>0$ 时，方程(1)有两个不等的实根；$\Delta=0$ 时，方程(1)有两个相等的实根；$\Delta<0$ 时，方程(1)没有实根. 反之，当方程(1)有两个不等实根时 $\Delta>0$，有相等实根时 $\Delta=0$，无实根时 $\Delta<0$. 一元二次方程判别式的

这些性质，有很多应用，现通过例题简介如下。

[例 1] 设 p、q、k 为实数，证明：当一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 有实根时，y 的二次方程

$$y^2+\left(k+\frac{1}{k}\right)py+p^2+\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 q=0$$

也有实根。

证明 因为 $x^2+px+q=0$ 有实根，所以

$$\Delta_1=p^2-4q\geqslant 0.$$

现考察

$$\begin{aligned}\Delta_2&=\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 p^2-4\left[p^2+\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 q\right]\\&=\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 p^2-4p^2-4\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 q\\&=\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-4\right]p^2-4\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 q\\&=\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 p^2-4\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 q\\&=\left(k-\frac{1}{k}\right)^2(p^2-4q),\end{aligned}$$

由于 $\left(k-\frac{1}{k}\right)^2\geqslant 0$，$\Delta_1=p^2-4q\geqslant 0$，故得 $\Delta_2\geqslant 0$。所以 y 的二次方程也有实根。

在例 1 中，我们是利用判别式来研究一元二次方程的根的性质，下面介绍怎样利用判别式求某些函数的极值。

[例 2] 求函数 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ 的极值。

解 把 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ 变形为

$$(x^2+1)y=4x+3.$$

按 x 的降幂整理，得

$$yx^2-4x+(y-3)=0. \qquad (2)$$

当 $y\neq 0$ 时，(2)式是关于 x 的二次方程且有实数解$\Big($因在函数 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ 中，x 取实数值$\Big)$，故

$$\Delta=(-4)^2-4y(y-3)=-4y^2+12y+16\geqslant 0,$$

由此得
$$-1\leqslant y\leqslant 4.$$

由(2)式，当 $y=4$ 时，$x=\dfrac{1}{2}$；当 $y=-1$ 时，$x=-2$. 以上讨论时，假定了 $y\neq 0$，而 $y=0$ 显然不是函数的极值. 所以，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 y 有极大值4；当 $x=-2$ 时，函数 y 有极小值 -1.

[例 3] 求函数 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 的极值.

解 把 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 两边平方，化简得

$$y^2-2=2\sqrt{(x-3)(5-x)}. \tag{3}$$

两边再平方，并按 x 的降幂整理，得

$$4x^2-32x+(y^4-4y^2+64)=0. \tag{4}$$

(4)式是关于 x 的二次方程，且有实数解，故

$$\Delta=(-32)^2-4\times 4(y^4-4y^2+64)=-16y^4+64y^2\geqslant 0.$$

即 $\Delta=-16y^2(y^2-4)\geqslant 0$，由此得

$$-2\leqslant y\leqslant 2. \tag{5}$$

但由 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 及(3)式可知，

$$\begin{cases} y>0, \\ y^2-2\geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

由(5)式和(6)式得

$$\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2.$$

由(3)式，当 $y=2$ 时，$x=4$；当 $y=\sqrt{2}$ 时，$x=3$ 或 5. 所以，当 $x=4$ 时，y 有极大值 2；当 $x=3$ 或 $x=5$ 时，y 有极小值 $\sqrt{2}$.

在例 2、例 3 中，都是把函数 y 的表达式变形，得到关于 x 的二次方程，从方程有实根知道判别式大于或等于零，因而得到

关于y的一个不等式，最后化为解不等式的问题．类似的想法，还能解某些不定方程．

[例 4]　求方程$2x^2-2xy+y^2+x-2y=0$的正整数解．

解　把原方程按x的降幂排列，得

$$2x^2+(1-2y)x+(y^2-2y)=0. \tag{7}$$

正整数解必为实数解，故当y是实数时，方程(7)有实根的条件是

$$\Delta=(1-2y)^2-4\times 2(y^2-2y)=-4y^2+12y+1\geqslant 0,$$

由此得$\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$，即

$$-0.08\cdots\leqslant y\leqslant 3.08\cdots. \tag{8}$$

满足(8)式的y的正整数为1、2、3．

分别把$y=1$、2、3代入(7)式，求x，且只取正整数，得到方程的正整数解为

$$\begin{cases}x=1,\\ y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ y=3.\end{cases}$$

例4是求方程的正整数解，但因为正整数解是特殊的实数解，所以仍可设法利用判别式求解．

一元二次方程的判别式还有一些其他的应用，如解不等式、确定直线与曲线的相关位置等，限于篇幅，这里不再一一介绍．

一个三角恒等式的应用

王茂森　（江苏东台城南中学）

六年制重点高中《代数》第一册复习题三中有这样一道题："在$\triangle ABC$中，求证：$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$．"其

实，这一结论还可以推广：如果 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$，其中 k 是整数，则：$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. 并且，其逆也成立.

证明从略，下面重点举例说明这一恒等式的一些应用.

[例 1] 若 $x+y+z=xyz$，求证：

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

分析 因为所给的条件是三数之和等于这三数之积，因此通过代换 $x=\operatorname{tg}\alpha$、$y=\operatorname{tg}\beta$、$z=\operatorname{tg}\gamma$ 以后，可把问题转化为三角等式.

证明 设 $x=\operatorname{tg}\alpha$、$y=\operatorname{tg}\beta$、$z=\operatorname{tg}\gamma$. $\because$ $x+y+z=xyz$，$\therefore$ $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. 于是，由前述结论可知 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$，其中 k 是整数. 所以 $3\alpha+3\beta+3\gamma=3k\pi$. 进一步运用前述结论，有 $\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}3\beta+\operatorname{tg}3\gamma=\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}3\beta\operatorname{tg}3\gamma$.

由三倍角公式，有：$\operatorname{tg}3\theta=\dfrac{3\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}^3\theta}{1-3\operatorname{tg}^2\theta}$，即

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3x-x^3}{1-3x^2};$$

同理，$$\operatorname{tg}3\beta=\frac{3y-y^3}{1-3y^2}、\quad \operatorname{tg}3\gamma=\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

代入上式，本题即得证.

[例 2] 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 为连续自然数，最大边 c 为 100，求 a 和 S.

解 设 $\operatorname{tg}A=n-1$、$\operatorname{tg}B=n$、$\operatorname{tg}C=n+1$. 根据前述结论，有 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$. 即有 $3n=n(n-1)\times(n+1)$. 解之，得 $n=2$. 即 $\operatorname{tg}A=1$、$\operatorname{tg}B=2$、$\operatorname{tg}C=3$.

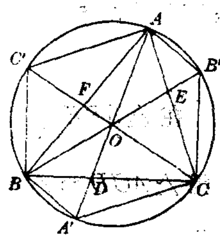
由 $\operatorname{tg}C=3$ 可解得 $\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin C=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. 运用正弦定理，有 $2R=\dfrac{100}{3}\sqrt{10}$，所以 $a=2R\sin 45^\circ=\dfrac{100}{3}\sqrt{5}$.

由 $\operatorname{tg} B=2$ 可解得 $\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，运用面积公式，有

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{100}{3}\sqrt{5}\times 100\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{10000}{3}.$$

[例 3]　图中 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，半径为 R，AO、BO、CO 的延长线分别交外接圆于 A'、B'、C'，交 BC、CA、AB 于 D、E、F，求证：$\dfrac{A'D}{AD}+\dfrac{B'E}{BE}+\dfrac{C'F}{CF}=1$.

分析　因为 $\dfrac{A'D}{AD}=\dfrac{S_{\triangle A'BC}}{S_{\triangle ABC}}$，所以，欲证明的等式就可以转化成 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}$. 而这四个三角形的外接圆半径同为 R，运用面积公式 $S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$ 等，并利用这些三角形内角之间的互补和互余关系，就可以转化为三个内角正切的形式了.



证明　$\because$ AA' 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore$ $\angle A'CB=90°-\angle C$，$\angle A'BC=90°-\angle B$. 于是，$\sin\angle A'CB=\cos C$、$\sin\angle A'BC=\cos B$. 而 $\angle A'=180°-\angle A$，$\therefore$ $\sin A'=\sin A$. 于是

$$\frac{S_{\triangle A'BC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2R^2\cos C\cos B\sin A}{2R^2\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}.$$

同理，有

$$\frac{S_{\triangle B'CA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{\operatorname{tg} C\operatorname{tg} A},\quad \frac{S_{\triangle C'AB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}.$$

上三式相加，得：

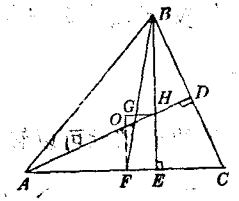
$$\frac{S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}+\frac{1}{\operatorname{tg} C\operatorname{tg} A}$$

$$+\frac{1}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C}=1.$$

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB},$$

即
$$\frac{A'D}{AD}+\frac{B'E}{BE}+\frac{C'F}{CF}=1.$$

[例 4] 点 O 和 H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，如果 $OH\parallel AC$，求证：$\operatorname{tg} A$、$\operatorname{tg} B$、$\operatorname{tg} C$ 成等差数列。



证明 作 $OF\perp AC$，交 AC 于 F. 连结 BF 和 OH，并交于 G. 由欧拉线可知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 于是

$$\frac{BE}{EH}=\frac{BF}{FG}=3.$$

在 $\triangle ABE$ 中，$\operatorname{tg} A=\dfrac{BE}{EA}$. 在 $\triangle ACD$ 中，$\operatorname{tg} C=\dfrac{AD}{CD}$.

又因 $\triangle ACD\backsim\triangle AHE$，故 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AE}{EH}$. 所以 $\operatorname{tg} C=\dfrac{EA}{EH}$.

于是，

$$\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} C=\frac{BE}{EH}=3.$$

而
$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=3\operatorname{tg} B,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} A+\operatorname{tg} C=2\operatorname{tg} B.$$

这就证得了 $\operatorname{tg} A$、$\operatorname{tg} B$、$\operatorname{tg} C$ 成等差数列.

作为练习，请读者运用本文介绍的方法思考下列习题：

1. 若 $x+y+z=xyz$，求证：

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$、$BE\perp AC$、$CF\perp AB$，D、E、F 分别为垂足. 延长 AD、BE、CF，分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 A'、B'、C'，求证：

$$\frac{BC}{A'D}+\frac{AC}{B'E}+\frac{AB}{C'F}=2\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C.$$

3. 在$\triangle ABC$中，如果$\lg\operatorname{tg}A$、$\lg\operatorname{tg}B$、$\lg\operatorname{tg}C$成等差数列，试求$\angle B$的范围.

4. 在斜三角形ABC中，已知$A<B<C$,

$$\operatorname{tg}A=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{m},\quad \operatorname{tg}B=\log_{\sqrt{m}}n,\quad \operatorname{tg}C=\log_{\sqrt[3]{n}}3,$$

且三正切均为整数，求A、B、C、m、n.

从推导二次方程求根公式想到的

蔡秀英　（石家庄市第二十四中学）

在初中二年级数学课上，我们已经学过，数a^2的算术平方根并不一定等于a，而要就a的符号加以讨论.

但是，您注意到没有，在推导一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（其中$a\neq0$）的求根公式时，曾经有这样的过程：经过移项、配方，当$b^2-4ac\geqslant0$时得到

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这里，后一个等号显然是用了根式运算律，即

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}},$$

那么$\sqrt{4a^2}$应等于$|2a|$才对，为什么可以简单地写成$2a$呢？

原来，表达式前面有“$\pm$”符号，情况就有点不同了．显然，对于$\sqrt{4a^2}$应对a的符号加以讨论．如果$a>0$，那么$\sqrt{4a^2}=|2a|=2a$，所以

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

如果$a<0$，那么$\sqrt{4a^2}=|2a|=-2a$，所以

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

而这和上述 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 是一回事，因无非是说有一个 $+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 和一个 $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 这两种情形，从而我们在推导求根公式时把这些讨论省去，可以简单地写成

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

了。

我们把上述表达式中有关的部分概括一下：如果 $x^2=a^2$（其中 $a\neq0$），那么 $x=\pm a$，而可以把如下分两种情况讨论的一套过程略去：

$$x=\pm\sqrt{a^2}=\pm|a|=\begin{cases}\pm a & (a>0)\\ \pm(-a)=\mp a & (a<0)\end{cases}=\pm a.$$

如果 $x^2=\frac{a^2}{b^2}$（其中 a、b 均不为零），那么 $x=\pm\frac{a}{b}$，也不必去细细讨论如下八种情况了：

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\pm\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\pm\frac{|a|}{|b|}=\cdots.$$

但是，我们在学习过程中应深入理解这些道理，千万不要把省去的讨论看成是 $\sqrt{a^2}=a$ 的简单结果！

这样算是做功吗？

钱瑞芸 （南京市教育局教研室）

用力推柜子，想使它挪动一个位置．尽管你用尽全力，只要

柜子丝纹不动，从物理的角度看，不能算做功.

用手拎着一桶水，走过很长的一段平地，你费了九牛二虎之力，可是从物理的角度来看，仍不能算做功.

一个运动的物体凭着自身的惯性，在一块理想的光滑的长水平板上继续运动，尽管它通过的距离很远，能不能算做功了呢？从物理的角度看，回答仍是："不能！"

怎样才算做功呢？

也许你对这样的问题会感兴趣："扛着一袋米走完一段平路，我们对这袋米做功了吗？如果扛着这袋米走上楼，我们对这袋米是否又做功了呢？如果扛着这袋米跑上楼所做的功是否要比走上同样高度的一层楼所做的功大呢？"要正确地解答它，还是需要搞清楚：怎样才算做功？

物理学上认为：物体在力的作用下，并沿力的方向通过一段距离，才算这个力对物体做功. 手推小车，并使小车沿推力方向移动一段距离，那么推力就对小车做功；或者说施力的手对受力物小车做了功. 粉笔从松开的手中落下，受到竖直向下的重力，并沿重力的方向通过一段距离，这时重力对粉笔做了功；或者说施力物地球对受力物粉笔做了功. 起重机吊起重物，对重物有一个向上的拉力，重物在拉力作用下沿拉力方向通过一段距离，这时拉力对重物做了功；或者说施力物起重机对受力的重物做了功.

显然，物理学上"做功"和日常生活中的"做工"含义完全不同. 在日常生活中，对于一切消耗体力或脑力的劳动，只要你出了力、使了劲、动了脑，都可以认为是在"做工". 然而，物理学上的"做功"，却需要同时具有两个必要因素. 这就是有作用在物体上的力和物体在力的方向上通过的距离. 这两个因素缺一不可.