

大專・高中新數學叢書④

新課程

微分・積分

早大教授・理博 寺田文行 原著
嚴水謨 編譯



晨光出版社

編輯大意

微積分爲高中數學所學的三角函數，無理・分式函數，極限等全部知識的結合，建立在高度的數學概念上，機率・統計，物理等可廣泛的活用。入學考試之出題率甚高。由於微積分之範圍廣泛，僅精通教科書是相當的困難，必須將教科書作一番突破性的研究及作更深入的理解。

本書有鑒於此而出版，上冊爲微分・積分的基礎，下冊爲微積分的應用。一方面遵照教科書的順序，另一方面以

愈來愈廣，愈來愈深，愈來愈容易了解

爲宗旨，使不精於數學者亦容易了解，精於數學者會更喜愛，是爲一本經仔細考慮而編成的書。因此由

解答→例題→廣展問題→習題→練習問題

之順序，反覆練習，不知不覺地實力大增，乃爲本書之一大特色，相信做爲研究或入學考試之參考書是最適當不過的。

上冊以整函數之微分・積分爲討論對象，但教科書沒有論及函數的連續性與合成函數的微分方法，第2次導函數。本書特簡單加以說明，如對整函數有充分了解，則有所幫助。

最後，本書能順利出版，承蒙春日文君之鼎力相助，在此特致謝意。

原著者

前言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

1. 函 數	6
映像・函數，函數之定義域及值域，閉區間及開區間，函數之圖形	
2. 函數之極限(1)	10
極限之意義，極限之定義，極限之公式，整函數之極限，商之極限	
3. 函數之極限(2)	14
右方極限值，左方極限值，極限為正或負之無限大之情形	
4. 函數之連續	18
$f(x)$ 在 $x=a$ 連續， $f(x)$ 在區間連續，中間值之定理，最大值・最小值之定理	
▶ 練習問題 (1 ~ 9)	22
5. 微分係數	24
x 之增量， y 之增量，平均變化率，微分係數	
6. 導函數	28
導函數之記號，可微分函數之連續性，基本之導函數	
7. 整函數之導函數	32
和・差・積之微分公式，整函數之導函數，累乘之微分公式	
8. 合成函數之導函數	36
合成函數之微分公式，商之微分公式，無理函數之微分公式	
▶ 練習問題 (10 ~ 23)	40
9. 速度與加速度	42
平均速率，平均速度，等速運動，平均加速度，第二次導函數	
10. 曲線之切線	48
平均變化率之圖形的意義，切線方程式，法線方程式	
▶ 練習問題 (24 ~ 36)	56
11. 函數之增減	58
單調遞增，單調遞減，遞增之狀態，遞減之狀態，在區間中函調的遞增・遞減， $f'(x_1) = 0$ 之情形	
12. 極大・極小	62
極大值，極小值，極值之求法，第二次導函數極值之判別	
13. 曲線之凹凸	68
上凸，反曲點，曲線之凹凸及切線，反曲點之求法	

▶練習問題 (37~51)	72
14. 最大值・最小值	74
最大・最小及極大・極小之不同，最大值・最小值之定理， 在閉區間・開區間之最大・最小，最大・最小文章問題之解法	
15. 導函數之方程式・不等式之應用	82
方程式之實數解，中間值之定理，整方程式重複解所具條件， 不等式之證明	
▶練習問題 (52~71)	90
16. 不定積分	92
積分常數，不定積分之公式，整函數之不定積分，有用之不定 積分	
17. 定 積 分	96
面積與積分，面積函數 $S(x)$ ， $S'(x)$ 之變化率之考查， $S'(x)$ 及 $f(x)$ 之關係，定積分之定義	
18. 定積分之計算	100
偶函數，奇函數之定積分，整函數積分之應用	
19. 區分求積與定積分	104
區分求積法之例，區分求積法，定積分及區分求積 ▶練習問題 (72~86)	108
20. 定積分表示之函數	110
被積分函數含積分變數之其他變數情形，在積分範圍之端含 變數之情形， $\int_a^x f(t) dt$ 之導函數 ▶練習問題 (87~100)	116
21. 平面圖形之面積	
曲線與 x 軸・曲線與 y 軸所圍面積，兩曲線所圍面積 ▶練習問題 (101~114)	126
22. 立體之體積	128
一般立體之體積・迴轉體之體積，繞 x 軸・繞 y 軸之迴轉， 在二曲線所圍部份之迴轉	
23. 速度與行程	136
速度，行程，位移，由定積分所求量 ▶練習問題 (115~126)	140
習 題 解 答	142
練習問題解答	153

重要名詞一覽表

上凸(下凹)..... 68	定理..... 19, 74	導函數..... 28, 29
右方極限值..... 14	左方極限值..... 14	等速運動..... 42
x 之增量..... 24	三次方程式之實數解	2曲線間之面積... 119
閉區間..... 7	之數..... 84	2次近似式..... 91
迴轉體之體積..... 128	下凸(上凹)..... 68	速率..... 40
加速度..... 42, 43	映像..... 6	被積分函數..... 92
下端..... 97	上端..... 97	微分可能(可微分)... 28
函數..... 6	商之微分公式..... 36	微分係數..... 24, 25
函數記號..... 6	整函數..... 6	微分公式..... 32
函數之極限..... 11	整函數之圖形..... 72	微分..... 28
函數之圖形..... 7	整函數之導函數..... 32	不定積分..... 92
函數之增減..... 58	整方程式之重複解... 84	不連續..... 18
函數之連續..... 18	積分..... 92	分式函數..... 6
奇函數..... 9, 101	積分常數..... 92	平均加速度..... 43
極限值..... 10	積分變數..... 100	平均速度..... 40
極小..... 62, 74	切線..... 48	平均速率..... 42
極小值..... 62	切線之斜率..... 48	平均變化率... 24, 25
曲線之凹凸..... 69	切線方程式..... 49	閉區間..... 7
極大..... 62, 74	切點..... 48	平面圖形之面積... 118
極大值..... 62	像..... 6	變位(位移)... 42, 137
極值..... 62	通增之狀態..... 58	變域..... 6
偶函數..... 9, 101	增減表..... 64	變化率..... 23
區間..... 7	速度..... 42, 136	變曲點(反曲點)... 69
區間之連續..... 18	對稱..... 70	變數..... 6
區分求積法..... 104	第2次導函數..... 43	法線..... 49
原始函數..... 92	單調遞減..... 58	法線方程式..... 49
遞減之狀態..... 58	單調遞增..... 58	行程..... 136
合成函數..... 36	值域..... 6	無限大..... 15
合成函數之微分公式	中間值之定理... 19, 82	無理函數..... 6
..... 36	定義域..... 6	無理函數之微分公式 37
最小..... 74	常數..... 6	立體之體積..... 128
最小值..... 74	常數函數..... 6	累乘之微分公式..... 33
最大..... 74	定積分..... 97	連續函數..... 8
最大值..... 74	定積分及區分求積	連續..... 8
最大值・最小值之	 105	y 之增量..... 24

1. 函 數

映 像

有二集合 X, Y , X 之各白之元素 x , 對於 Y 之元素 y , 有一定之對應規則為已知 f , 此規則 f 稱為自集合 X 到集合 Y 之映像。

函 數

$$X \xrightarrow{f} Y, \text{ 或 } f: X \rightarrow Y$$
特別地, X, Y 為數之集合時, f 稱為自 X 至 Y 之函數, 但, 本書僅限於對實數討論之。

函數 $f: X \rightarrow Y$

X 之元素 x 所對應 Y 之元素 y , f 為 x 之像, 以 $f(x)$ 表示, 此記號為

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y$$

如此, 函數 $y = f(x)$ 或僅函數 $f(x)$ 表示之。

函數之定義域及值域

在自 X 至 Y 之函數 $y = f(x)$ 中, X 稱為此函數之定義域。像之集合 (以 $f(x)$ 表示)

$$f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

稱為此函數之值域。值域 $f(X)$ 為 Y 之部份集合。即

$$f(X) \subseteq Y$$

已知式之函數

在函數 $y = f(x)$ 中, 對應之規則 f 為在 x 之式已知。此時, $f(x)$ 以 x 之式表示之。

$f(x)$ 為 x 之格式, 分式, 無理式時, 各別為整函數, 分式函數, 無理函數, 整函數依其次數為 1 次函數, 2 次函數, 3 次函數, 3 次以上之整函數, 稱為高次函數。所以, X 之全部之元素與 Y 之同一元素 c 對應之函數時, $f(x) = c$ (c 為常數) 稱為常數函數。

本書主要為考查整函數, 必要時有簡單之分式函數, 無理函數。

高中有關之函數，除上列外有指數函數，對數函數，三角函數等。

對已知式函數 $y=f(x)$ ，普通式 $f(x)$ 之意義為在一定範圍之定義域。因而，整函數之定義域為實數全體，分式函數之定義域為分母 0 除外之實數的集合。在無理函數，例如， $y=\sqrt{x-1}$ ，此式之意義為必須 $x \geq 1$ ，此函數之定義域為集合 $\{x | x \geq 1\}$

但，有時函數之定義域並非是固有之定義域，定義域限定在很狹窄之範圍亦有。

因此，函數在區間來考慮其性質亦甚多。區間為對兩個實數 a, b ($a < b$) 之不等式

$$a \leq x \leq b, a < x < b, a \leq x < b, a < x \leq b$$

等滿足之實數 x 之集合，其各別之記號為

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

閉區間及開區間

特別地，區間 $[a, b]$ 稱為閉區間， (a, b) 稱為開區間。尚有滿足不等式 $a \leq x, x \leq a, a < x, x < a$ 等之實數 x 之集合，稱為實數全體之集合之廣區間，其各別之記號為 $[a, \infty), (-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, \infty)$ 。

函數之圖形

在函數 $y=f(x)$ 中，相對應之 x, y 組 (x, y) 座標上各點之集合，稱為其圖形。函數 $y=f(x)$ 之圖形多以一曲線（含直線）畫之。此時，圖形之曲線，也有以曲線 $y=f(x)$ 略稱之。

● 摘 要 ●

(1) 函數 $f: X \rightarrow Y$

集合 X 之元素 x 所對應集合 Y 之元素 y ， f 稱為 x 之像，以 $f(x)$ 表示。

(2) 函數之表示方法

像之記號以 $y=f(x)$ 表示之。

例題 1. 試求下列函數之定義域及值域。並作其圖形。

$$(1) \quad y = \sqrt{9 - x^2} \quad (2) \quad y = \frac{x^2}{x-1}$$

解法 此問題無特別之限制，定義域，值域為 x, y 為實數。

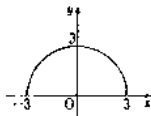
略答 (1) y 之值為實數，故 $9 - x^2 \geq 0$

$$\therefore -3 \leq x \leq 3 \dots\dots\dots (\text{定義域})$$

又，此定義域所屬 x 對應的

$$0 \leq \sqrt{9 - x^2} \leq 3 \quad \therefore 0 \leq y \leq 3 \dots\dots\dots (\text{值域})$$

圖形為圓 $x^2 + y^2 = 9$ 之上半圓。



(2) 此函數為 x 除 1 以外全部的實數值之意義，
定義域為 $x = 1$ 除外全部之實數之集合也。即

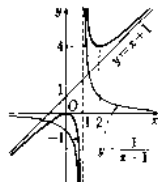
$$x \neq 1 \dots\dots\dots (\text{定義域})$$

其次，為求此函數之值域，此式變形為

$$x^2 - yx + y = 0$$

為關於 x 之二次方程式， x 為實數，

$$x^2 - 4y \geq 0 \quad \therefore y \leq 0 \text{ 或 } y \geq 4 \dots\dots\dots (\text{值域})$$



作出圖形，此為 $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ 之變形， $y = \frac{1}{x-1}$ 及 $y = x + 1$

作出圖形，將此二者合成之即得。

例題 2. $f(x)$ 為 x 之二次函數，試求滿足下列二式條件之 $f(x)$ 。

$$f(x+1) - f(x) = 2x, \quad f(0) = 1。$$

解法 若設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 滿足已知條件，定出 a, b, c

略答 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 由 $f(0) = 1, c = 1$

$$\begin{aligned} \text{又, } f(x+1) - f(x) &= \{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} - (ax^2 + bx + c) \\ &= 2ax + (a+b) = 2x \end{aligned}$$

此為對 x 恒等成立， $2a = 2, a + b = 0$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1$$

$\dots\dots\dots$ (答)

擴展問題

函數 $f(x)$ 對全部之 x 若 $f(-x) = f(x)$ 時，稱為偶函數， $f(-x) = -f(x)$ 時，稱為奇函數。

(1) 求四次函數 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 為偶函數之條件。

(2) 求三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為奇函數之條件。

要 點

對全部 x 恒等式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} +$$

$$\cdots + a_n = 0 \text{ 之條件爲}$$

件爲

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

$$\text{解：(1) } f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$$

$$f(-x) = f(x) \text{ 之條件爲}$$

$$bx^3 + dx = 0$$

對全部 x 成立時，即 $b = d = 0 \cdots \cdots \cdots$ (答)

(2) 與(1)同理，所求之條件爲

$$b = d = 0 \cdots \cdots \cdots$$
 (答)

擴展問題

設 $f(x)$ 當 $x < 0$ 時，等於 0，當 $0 \leq x$ 時，等於 x^2 ，試作出函數 $F(x) = f(x) - f(x-1) - f(x-2)$ 之圖形。

要 點

$f(x)$, $f(x-1)$,

$f(x-2)$ 分別爲

x 之區間，各以 x

之式表示之，並定出區間之劃分 $F(x)$ 之式。

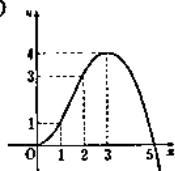
$$\text{解：} f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ (x-1)^2 & (1 \leq x) \end{cases}$$

$$f(x-2) = \begin{cases} 0 & (x < 2) \\ (x-2)^2 & (2 \leq x) \end{cases}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x < 1) \\ x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1 & (1 \leq x < 2) \\ x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 \\ = -x^2 + 6x - 5 & (2 \leq x) \end{cases}$$

由此 $y = F(x)$ 之圖形如上圖



習題 (解答在第142頁)

1. 應用二次式 $f(x) = x^2 - 4x - 5$ 作出依下列定義之函數 $g(x)$ 之圖形。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{f(x) + |f(x)|\} & (1 \leq x \leq 6) \\ f(-x) & (-1 \leq x < 1) \end{cases}$$

2. 函數之極限(1)

極限之意義

$$\text{函數 } y = f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

例

在 $x = 2$ 為非定義， $x \neq 2$ 時

$$\begin{aligned} \text{因 } f(x) &= \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} \\ &= x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

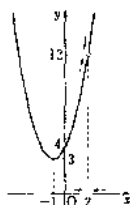
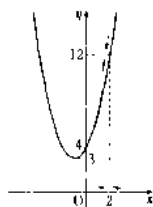
$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & (x \neq 2) \\ \text{無值} & (x = 2) \end{cases}$$

而就二次函數而言

$$y = x^2 + 2x + 4$$

x 較 2 為小，趨近於 2，又 x 較 2 為大，趨近於 2。 y 就趨近於 12， x 非為 2

之值，而趨近於 2， $f(x)$ 為趨近於 12



極限之定義

一般而言，函數 $f(x)$ 在 $x = a$ ，就全部 x 之定義，($x \neq a$ 時，函數之值存在與否皆可) x 非為 a 之值而近於 a ，其所對應 $f(x)$ 之值若為趨近於 x 之值，此為

$$x \rightarrow a \quad \text{時} \quad f(x) \rightarrow a$$

或
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

a 稱為 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 之極限值 或 (極限)，但

$f(x) \rightarrow a$ 及 $f(x) = a$ 並不相抵觸。應用此記號，如上例

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

極限之公式

就函數之和・差・積・商之極限而言，有下列關係。

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ 時

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c\alpha \quad (c \text{ 爲常數})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta \quad (\text{複號同順})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

因 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ 因而由上(1), (2), (3)反覆應用之。

整函數之極限

若 $f(x)$ 爲整函數時 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

就商之極限

在(4)中， $f(x)$ ， $g(x)$ 爲整函數，若 $\beta = g(a) = 0$ 時，
 $\alpha = f(a) \neq 0$ 時，非爲有限之極限值。 $\alpha = f(a) = 0$ 時，
 因 $f(x)$ ， $g(x)$ 有公因數 $x - a$ ，分母，分子除以 $x - a$ ，
 以 $x \rightarrow a$ 之極限考慮之。例如，上例

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12 \end{aligned}$$

極限值可求得。

● 精 粹 ●

(1) 極限值之公式

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

(2) 若 $f(x)$ 爲整函數，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(3) $f(a) = 0, g(a) = 0$ 時 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

→ 分母，分子就除以 $x - a$ 而言，考慮其極限。

例題 3. 求下列之極限值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x-1)^2 (x-x+1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

〔解法〕應用極限公式之積及商之情形。

〔解答〕(1) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x-1)^2 (x^2-x+1) = \{2(-1)-1\}^2 \{(-1)^2-(-1)+1\}$
 $= 9 \times 3 = 27 \quad \dots\dots\dots(\text{答})$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{3+1} + \sqrt{9-1}}{\sqrt{3-1}} = \frac{2 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

例題 4. 求下列之極限值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x-2} - 2}$$

〔解法〕與分子 $\rightarrow 0$ ，分母 $\rightarrow 0$ 相同，略記為 $\frac{0}{0}$ 之情形亦有。

(1) 分母，分子以 $x-2$ 約分之，設 $x \rightarrow 2$ 。

(2) 分母有理化之，分母，分子以 $x-6$ 約分之。

〔解答〕(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(2x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{2x-3} = 7 \quad \dots\dots\dots(\text{答})$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x-2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)}{(x-2) - 4} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)}{x-6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} (\sqrt{x-2} + 2) = 2 + 2 = 4 \quad \dots\dots\dots(\text{答})$$

〔注意〕(1)之解答可如下正式，故，通常如上解略記之。

$$x \neq 2 \text{ 時 } \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6} = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(2x-3)} = \frac{2x+3}{2x-3}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{2x-3} = 7$$

(2)亦相同。

擴展問題

設下列之等式為成立時，試求常數 a ， b 之值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + b}{x-1} = 3 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - b}{x-1} = 1$$

要點

與 $x \rightarrow 1$ 相同之時，
分母 $\rightarrow 0$ 為有限之
極限值 $x \rightarrow 1$ 時分子
 $\rightarrow 0$ 此為必要。由此
 a ， b 之關係式可得
(必要條件)

此關係應用時，

(1) 分子因數分解
之，以 $x-1$ 約分。

(2) 分子有理化之
，以 $x-1$ 約分。

求出 a ， b 以確認
滿足題意(充分條件)

解答 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ ，上之極限值為有
限值 3 時，首先必須

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + x + b) = a + 1 + b = 0$$

$$\therefore b = -(a+1) \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore ax^2 + x + b = ax^2 + x - (a+1) \\ = a(x^2 - 1) + (x-1) = (x-1)(ax+a+1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+a+1) = 2a+1$$

$$\text{由已知條件 } 2a+1=3 \quad \therefore a=1$$

由① $b = -2$ ，此 a ， b 滿足題意。

$$(\text{答}) \quad a=1, b=-2$$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ ，上之極限值為有限值
1 時，首先必須

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3} - b) = 2a - b = 0$$

$$\therefore b = 2a \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3} - b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+3} - 2)}{x-1}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{由已知條件 } \frac{a}{4} = 1 \quad \therefore a = 4 \quad \text{由① } b = 8$$

此 a ， b 滿足題意。

$$(\text{答}) \quad a=4, b=8$$

習題 (解答在第142頁)

2. 設下列之等式成立時，試求常數 a ， b 之值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax - b}{2x^2 + 3x - 2} = b \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a\sqrt{x^2+8} + b}{x+1} = -\frac{2}{3}$$

3. 函數之極限(2)

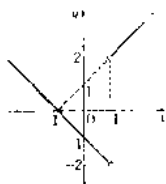
例

$$\text{函數 } y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}, \quad x \neq 1$$

非其定義。 $x \neq 1$ 時， $x < 1$ 時

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -(x + 1)$$

$$x > 1 \text{ 時} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$



故

$$f(x) = \begin{cases} -1(x+1) & (x < 1) \\ \text{無值} & (x = 1) \\ x+1 & (x > 1) \end{cases}$$

 $y = f(x)$ 之圖形如上圖。因之， x 大於 1 而趨近於 1 時， $f(x)$ 趨近於 2， x 小於 1 而趨近於 1 時， $f(x)$ 趨近於 -2。 $x \rightarrow a + 0$ 如此 x 自何側向 a 接近，要考慮區別時，自大的一方（右 $x \rightarrow a - 0$ 側）趨近時 $x \rightarrow a + 0$ 表示，自小的一方（左側）趨近時， $x \rightarrow a - 0$ 表示之。特別當 $a = 0$ 時，可簡化為 $x \rightarrow +0$ 或 $x \rightarrow -0$ 表示之。若 $x \rightarrow a + 0$ 時， $f(x)$ 趨近於 α 時， α 稱

右方極限值

為 $f(x)$ 之右方極限值（或右方極限）。又若 $x \rightarrow a - 0$ 時，

左方極限值

 $f(x)$ 趨近於 β 時， β 稱為 $f(x)$ 之左方極限值（或左方極限）。

，各以

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta \quad \text{表示之。}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ 存在時， } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ 也同時}$$

$$\text{存在而成為 } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \text{ 之情形。}$$

如上例，若

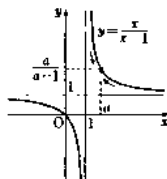
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = -2$$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \text{ 不存在。}$$

例

$$\text{又, 函數 } y = \frac{x}{x-1}$$

之圖形如右圖所示為直角雙曲線，
 $x \rightarrow 1+0$ 時， y 為正無限大，
 $x \rightarrow 1-0$ 時， y 為負無限大。又
 x 為正(或負)之無限大時， y 趨
 近於 1。

 $x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$

極限為正或

負無限大之

情形

一般而言， x 為正無限大時，以 $x \rightarrow +\infty$ (或為 $x \rightarrow \infty$)
 表示， x 為負無限大時， $x \rightarrow -\infty$ 表示之。 $x \rightarrow a$ 時
 $f(x) \rightarrow +\infty$ ，或 $f(x) \rightarrow -\infty$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

表示之。稱為 $f(x)$ 之正無限大或負無限大。又 $x \rightarrow +\infty$ 或
 $x \rightarrow -\infty$ 時，則 $f(x) \rightarrow a$ ，各別以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

表示之。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

亦可同樣定出其意義。如上例

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

所以前節所舉之極限值之公式，當 $x \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 之情形亦為成立。

● 精 粹 ●

$$(1) \text{ 右方極限值, 左方極限值: } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$$

$$(2) \rightarrow +\infty, \rightarrow -\infty \text{ 之情形: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

etc.

例題 5. 求下列之極限值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{3x^3-2x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x} - x)$$

解法 (1), (2) 爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 之形式。此種形式求其極限值，

分母、分子除以 x^n (n 爲分母之次數) 應用 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ，可也。

(3) $\infty - \infty$ 之形式。考慮有理化之。

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{3x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^3} - 1}{3 - \frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}} + 1} = -\frac{3}{2}$$

例題 6. 求下列極限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2}{x-1}$$

解法 有時亦有有限之極限值不存在的情形。

(1) $x \rightarrow +0$ 與 $x \rightarrow -0$ 分別考慮之。(2) 分母、分子除以 x 。

解答 (1) $x \rightarrow +0$ 時 $x^2-x = x(x-1) \rightarrow -0$, $x \rightarrow -0$ 時 $x^2-x = x(x-1) \rightarrow +0$ 又 $x \rightarrow 0$ 時 $(x-2) \rightarrow -2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x-2}{x^2-x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x-2}{x^2-x} = -\infty \quad (\text{答}) \text{ 無極限}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x}} \right) = \infty \quad (\text{答}) \text{ 無極限}$$