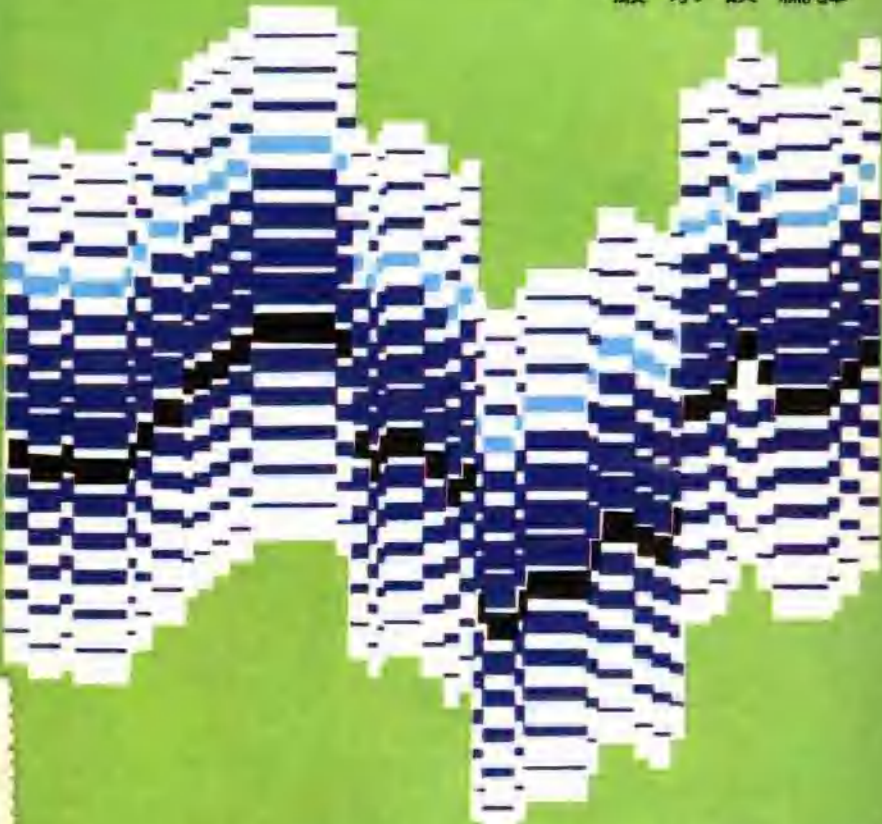
大專·高中新數學叢書④

新課程

微分·積分

早大教授・理博 寺田文行 原著
嚴 水 謨 編譯



晨光出版社

編輯大意

微積分爲高中數學所學的三角函數，無理・分式函數，極限等全部知識的結合，建立在高度的數學概念上，機率・統計，物理等可廣泛的活用。入學考試之出題率甚高。由於微積分之範圍廣泛，僅精通教科書是相當的困難，必須將教科書作一番突破性的研究及作更深入的理解。

本書有鑒於此而出版，上冊爲微分・積分的基礎，下冊爲微積分的應用。一方面遵照教科書的順序，另一方面以

愈來愈廣，愈來愈深，愈來愈容易了解

爲宗旨，使不精於數學者亦容易了解，精於數學者會更喜愛，是爲一本經仔細考慮而編成的書。因此由

解說→例題→擴展問題→習題→練習問題

之順序，返覆練習，不知不覺地實力大增，乃爲本書之一大特色，相信做爲研究或入學考試之參考書是最適當不過的。

上冊以整函數之微分・積分爲討論對象，但教科書沒有論及函數的連續性與合成函數的微分方法，第2次導函數。本書特簡單加以說明，如對整函數有充分了解，則有所幫助。

最後，本書能順利出版，承蒙春日文君之鼎力相助，在此特致謝意。

原著者

前　言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書爲具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■　小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，爲重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之効率。

■　例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實爲本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■　練習問題

分爲A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此爲有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能眞正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目　次

重要名詞一覽表

1. 函 數

有二集合X，Y，X之各自之元素x，對於Y之元素y，有一定之對應規則爲已知f，此規則f稱爲自集合X到集合Y之**映像**。

映像

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{，或，} \quad f: X \to Y$$

函數

特別地，X，Y爲數之集合時，f稱爲自X至Y之**函數**，但，本書僅限於對實數討論之。

函數 $f: X \to Y$

X之元素x所對應Y之元素y，f爲x之**像**，以$f(x)$表示，此記號爲

$$y = f(x) \quad \text{或} \quad f: x \mapsto y$$

如此，**函數$y = f(x)$** 或僅 **函數$f(x)$** 表示之。

函數之定義域及值域

在自X至Y之函數$y = f(x)$中，X稱爲此函數之**定義域**。像之集合（以$f(x)$表示）

$$f(x) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$$

稱爲此函數之**值域**。值域$f(X)$爲Y之部份集合。即

$$f(X) \subseteq Y$$

已知式之函數

在函數$y = f(x)$中，對應之規則f爲在x之式已知。此時，$f(x)$以x之式表示之。

$f(x)$爲x之整式，分式，無理式時，各別爲**整函數**，**分式函數**，**無理函數**，整函數依其次數爲**1次函數**，**2次函數**，**3次函數**，3次以上之整函數，稱爲**高次函數**。所以，X之全部之元素與Y之同一元素c對應之函數時，$f(x) = c$（c爲常數）稱爲**常數函數**。

本書主要爲考查整函數，必要時有簡單之分式函數，無理函數。

高中有關之函數，除上列外有指數函數，對數函數，三角函數等。

對已知式函數 $y=f(x)$，普通式 $f(x)$ 之意義需在一定範圍之定義域。因而，整函數之定義域爲實數全體，分式函數之定義域爲分母0除外之實數的集合。在無理函數，例如，$y=\sqrt{x-1}$，此式之意義爲必須 $x\geqq 1$，此函數之定義域爲集合 $\{x \mid x\geqq 1\}$

但，有時函數之定義域並非是固有之定義域，定義域限定在很狹窄之範圍亦有。

區間

因此，函數在區間來考慮其性質亦甚多。區間爲對兩個實數 a, b ($a<b$)之不等式

$a\leqq x\leqq b$，$a<x<b$，$a\leqq x<b$，$a<x\leqq b$

等滿足之實數 x 之集合，其各別之記號爲

$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$

閉區間及開區間

特別地，區間 $[a,b]$ 稱爲閉區間，(a,b) 稱爲開區間。尙有滿足不等式 $a\leqq x$，$x\leqq a$，$a<x$，$x<a$ 等之實數 x 之集合，稱爲實數全體之集合之廣區間，其各別之記號爲 $[a,\infty)$，$(-\infty,a]$，(a,∞)，$(-\infty,a)$，$(-\infty,\infty)$。

函數之圖形

在函數 $y=f(x)$ 中，相對應之 x，y 組 (x,y) 座標上各點之集合，稱爲其圖形。函數 $y=f(x)$ 之圖形多以一曲線(含直線)畫之。此時，圖形之曲線，也有以曲線 $y=f(x)$ 略稱之。

精　粹

(1) 函數 $f: X\rightarrow Y$

集合 X 之元素 x 所對應集合 Y 之元素 y，f 稱爲 x 之像，以 $f(x)$ 表示。

(2) 函數之表示方法

像之記號以 $y=f(x)$ 表示之。

例題 1. 試求下列函數之定義域及值域。並作其圖形。

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$ (2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

解法 此問題無特別之限制，定義域，值域爲x，y爲實數。

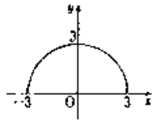
解答 (1) y之値爲實數，故 $9-x^2\geqq 0$

$\therefore\ -3\leqq x\leqq 3$ ……………………(定義域)

又，此定義域所屬x對應的

$0\leqq\sqrt{9-x^2}\leqq 3\quad\therefore\ 0\leqq y\leqq 3$ ……(値域)

圖形爲圓 $x^2+y^2=9$ 之上半圓。



(2) 此函數爲，x除1以外全部的實數値之意義，定義域爲 $x=1$ 除外全部之實數之集合也。即

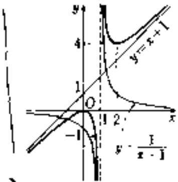
$x\neq 1$ ……………………(定義域)

其次，爲求此函數之値域，此式變形爲

$x^2-yx+y=0$

爲關於x之二次方程式，x爲實數，

$x^2-4y\geqq 0\quad\therefore y\leqq 0$ 或 $y\geqq 4$ ……(値域)



作出圖形，此爲 $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ 之變形，$y=\dfrac{1}{x-1}$ 及 $y=x+1$

作出圖形，將此二者合成之卽得。

例題 2. $f(x)$爲x之二次函數，試求滿足下列二式條件之$f(x)$。

$f(x+1)-f(x)=2x$，$f(0)=1$。

解法 若設$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)滿足已知條件，定出a，b，c

解答 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 由 $f(0)=1$，$c=1$

又，$f(x+1)-f(x)=\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}-(ax^2+bx+c)$

$=2ax+(a+b)=2x$

此爲對x恒等成立，$2a=2$，$a+b=0$

$\therefore\ a=1$，$b=-1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+1$ ……………(答)

擴展問題

函數 $f(x)$ 對全部之 x 若 $f(-x)=f(x)$ 時，稱爲**偶函數**，$f(-x)=-f(x)$ 時，稱爲**奇函數**。

(1) 求四次函數 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 爲偶數數之條件。

(2) 求三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲奇函數之條件。

要點

對全部 x 恒等式

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 之條件爲

$a_0=a_1=\cdots\cdots=a_n=0$

解答 (1) $f(-x)=ax^4-bx^3+cx^2-dx+e$

$f(-x)=f(x)$ 之條件爲

$$bx^3+dx=0$$

對全部 x 成立時，即 $b=d=0$ ……………(答)

(2) 與(1)同理，所求之條件爲

$b=d=0$ ……………(答)

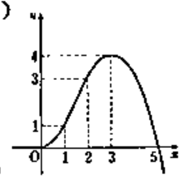
擴展問題

設 $f(x)$ 當 $x<0$ 時，等於 0，當 $0\leqq x$ 時，等於 x^2，試作出函數 $F(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)$ 之圖形。

要點

$f(x)$，$f(x-1)$，$f(x-2)$ 分別爲 x 之區間，各以 x 之式表示之，並定出區間之劃分 $F(x)$ 之式。

解答 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x^2 & (0\leqq x)\end{cases}$



$f(x-1)=\begin{cases}0 & (x<1)\\ (x-1)^2 & (1\leqq x)\end{cases}$

$f(x-2)=\begin{cases}0 & (x<2)\\ (x-2)^2 & (2\leqq x)\end{cases}$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x^2 & (0\leqq x<1)\\ x^2-(x-1)^2=2x-1 & (1\leqq x<2)\\ x^2-(x-1)^2-(x-2)^2 & \\ \quad =-x^2+6x-5 & (2\leqq x)\end{cases}$$

由此 $y=F(x)$ 之圖形如上圖

習題（解答在第142頁）

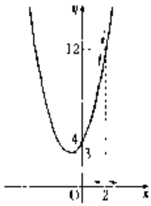
1. 應用二次式 $f(x)=x^2-4x-5$ 作出依下列定義之函數 $g(x)$ 之圖形。

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\} & (1\leqq x\leqq 6)\\ f(-x) & (-1\leqq x<1)\end{cases}$$

2. 函數之極限(1)

極限之意義

函數　$y=f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$



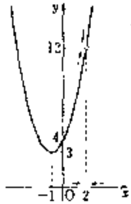
例

在 $x=2$ 爲非定義，$x\neq 2$ 時

因 $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=x^2+2x+4$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2+2x+4 & (x\neq 2) \\ \text{無値} & (x=2) \end{cases}$



而就二次函數而言

$y=x^2+2x+4$

x 較 2 爲小，趨近於 2，又 x 較 2 爲大趨近於 2。y 就趨近於 12，x 非爲 2 之値，而趨近於 2，$f(x)$ 爲趨近於 12

極限之定義

一般而言，函數 $f(x)$ 在 $x=a$，就全部 x 之定義，($x=a$ 時，函數之値存在與否皆可) x 非爲 a 之値而近於 a，其所對應 $f(x)$ 之値若爲趨近於 x 之値，此爲

$$x\to a \quad \text{時} \quad f(x)\to \alpha$$

或

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

α 稱爲 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 之**極限値**或（**極限**），但

$f(x)\to\alpha$ 及 $f(x)=\alpha$ 並不相抵觸。應用此記號，如上例

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12\ ,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$$

極限之公式

就函數之和・差・積・商之極限而言，有下列關係。

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ 則 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$ 時

(1) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=c\alpha$ （c 爲常數）

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ （複號同順）

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x)=\alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta\neq 0$）

因 $\lim\limits_{x\to a} x=a$ 因而由上(1),(2),(3)反覆應用之。

整函數之極限

若 $f(x)$ 爲整函數時 則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

就商之極限言

在(4)中，$f(x)$，$g(x)$爲整函數，若 $\beta=g(a)=0$ 時，$\alpha=f(a)\neq 0$ 時，非爲有限之極限值。$\alpha=f(a)=0$ 時，因$f(x)$,$g(x)$有公因數$x-a$，分母，分子除以$x-a$，以$x\to a$之極限考慮之。例如，上例

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=2^2+2\cdot 2+4=12$$

極限值可求得。

● 精 粹 ●

(1) **極限值之公式**

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ 則 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$， $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta\neq 0$）

(2) 若 $f(x)$ 爲整函數，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

(3) $f(a)=0$，$g(a)=0$ 時 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$

→分母，分子就除以$x-a$而言，考慮其極限。

例題 3. 求下列之極限值。

(1) $\lim_{x\to-1}(2x-1)^2(x-x+1)$ (2) $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-1}}$

[解法] 應用極限公式之積及商之情形。

解答 (1) $\lim_{x\to-1}(2x-1)^2(x^2-x+1)=\{2(-1)-1\}^2\{(-1)^2-(-1)+1\}$

$= 9\times3=27$ ⋯⋯⋯(答)

(2) $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{3+1}+\sqrt{9-1}}{\sqrt{3-1}}=\dfrac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$ ⋯⋯⋯(答)

例題 4. 求下列之極限值。

(1) $\lim_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}$ (2) $\lim_{x\to6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x-2}-2}$

[解法] 與分子→0，分母→0 相同，略記爲→$\dfrac{0}{0}$之情形亦有。

(1) 分母，分子以 $x-2$ 約分之，設 $x\to2$。

(2) 分母有理化之，分母，分子以 $x-6$ 約分之。

解答 (1) $\lim_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(2x-3)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{2x+3}{2x-3}=7$ ⋯⋯⋯(答)

(2) $\lim_{x\to6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x-2}-2}=\lim_{x\to6}\dfrac{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-2)-4}=\lim_{x\to6}\dfrac{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)}{x-6}$

$=\lim_{x\to6}(\sqrt{x-2}+2)=2+2=4$ ⋯⋯⋯(答)

[注意] (1)之解答可如下正式，故，通常如上解略記之。

$x\neq2$ 時 $\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}=\dfrac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(2x-3)}=\dfrac{2x+3}{2x-3}$

$\therefore\ \lim_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}=\lim_{x\to2}\dfrac{2x+3}{2x-3}=7$

(2)亦相同。

擴展問題

設下列之等式爲成立時，試求常數a，b之值。

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+x+b}{x-1}=3$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=1$

要點

與$x\to1$相同之時，分母$\to0$爲有限之極限值$x\to1$時分子$\to0$此爲必要。由此a，b之關係式可得(必要條件)

此關係應用時，

(1) 分子因數分解之，以$x-1$約分。

(2) 分子有理化之，以$x-1$約分。

求出a，b以確認滿足題意(充分條件)

解答 (1) 若$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，上之極限值爲有限值3時，首先必須

$$\lim_{x\to1}(ax^2+x+b)=a+1+b=0$$

$$\therefore\ b=-(a+1) \quad\cdots\cdots\text{①}$$

$$\therefore\ ax^2+x+b=ax^2+x-(a+1)$$
$$=a(x^2-1)+(x-1)=(x-1)(ax+a+1)$$

$$\therefore\lim_{x\to1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}=\lim_{x\to1}(ax+a+1)=2a+1$$

由已知條件　$2a+1=3$　$\therefore\ a=1$

由①　$b=-2$，此a，b滿足題意。

(答)　$a=1$，$b=-2$

(2) 若$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，上之極限值爲有限值1時，首先必須

$$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}-b)=2a-b=0$$

$$\therefore\ b=2a \quad\cdots\cdots\text{①}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}$$

由已知條件$\dfrac{a}{4}=1$ $\therefore$　$a=4$　由①　$b=8$

此a，b滿足題意。

(答)　$a=4$，$b=8$

習題(解答在第142頁)

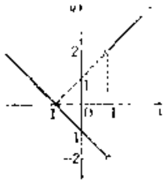
2. 設下列之等式成立時，試求常數a，b之值。

(1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+ax-b}{2x^2+3x-2}=b$　　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{a\sqrt{x^2+8}+b}{x+1}=-\dfrac{2}{3}$

3. 函數之極限(2)

例

函數 $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ ，$x=1$ 非其定義。$x\neq 1$ 時，$x<1$ 時



$$f(x)=\frac{x^2-1}{1-x}=-(x+1)$$

$x>1$ 時 $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$

故

$$f(x)=\begin{cases}-1(x+1) & (x<1)\\ \text{無值} & (x=1)\\ x+1 & (x>1)\end{cases}$$

$y=f(x)$ 之圖形如上圖。因之，x 大於 1 而趨近於 1 時，$f(x)$ 趨近於 2，x 小於 1 而趨近於 1 時，$f(x)$ 趨近於 -2。

$x\to a+0$
$x\to a-0$

如此 x 自何側向 a 接近，要考慮區別時，自大的一方（右側）趨近時 $x\to a+0$ 表示，自小的一方（左側）趨近時，$x\to a-0$ 表示之。特別當 $a=0$ 時，可簡化爲 $x\to+0$ 或 $x\to-0$ 表示之。若 $x\to a+0$ 時，$f(x)$ 趨近於 α 時，α 稱

右方極限值
左方極限值

爲 $f(x)$ 之右方極限值（或右方極限）。又若 $x\to a-0$ 時，$f(x)$ 趨近於 β 時，β 稱爲 $f(x)$ 之左方極限值（或左方極限），各以

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \quad , \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\beta \quad \text{表示之。}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ 存在時，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ 也同時存在而成爲 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\alpha$ 之情形。

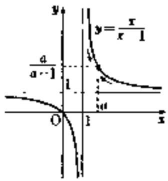
如上例，若

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2 \quad , \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$$

則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ 不存在。

例

又，函數 $y=\dfrac{x}{x-1}$



之圖形如右圖所示爲直角雙曲線，$x\to 1+0$ 時，y 爲正無限大，$x\to 1-0$ 時，y 爲負無限大。又 x 爲正（或負）之無限大時，y 趨近於 1。

$x\to+\infty$
$x\to-\infty$
極限值正或負無限大之情形

一般而言，x 爲正無限大時，以 $x\to+\infty$（或爲 $x\to\infty$）表示，x 爲負無限大時，$x\to-\infty$ 表示之。$x\to a$ 時

$f(x)\to+\infty$，或 $f(x)\to-\infty$

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

表示之。稱爲 $f(x)$ 之正無限大或負無限大。又 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 時，則 $f(x)\to\alpha$，各別以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$$

表示之。

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

亦可同樣定出其意義。如上例

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

所以前節所舉之極限值之公式，當 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 之情形亦爲成立。

● 精　粹 ●

(1)　右方極限值・左方極限值：　$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\beta$

(2)　$\to+\infty$，$\to-\infty$ 之情形：　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

etc.

例題 5. 求下列之極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^3}{3x^3-2x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)$

〔解法〕(1)，(2)爲$\dfrac{\infty}{\infty}$之形式。此種形式求其極限值，

分母，分子除以x^n（n爲分母之次數）應用$\dfrac{1}{x}\to 0$，可也。

(3) $\infty-\infty$之形式。考慮有理化之。

解答 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^3}{3x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-1}{3-\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+1}=-\dfrac{3}{2}$

例題 6. 求下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x^2-x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2}{x-1}$

〔解法〕有時亦有有限之極限值不存在的情形。

(1) $x\to+0$，$x\to-0$ 分別考慮之。　(2) 分母，分子除以x。

解答 (1) $x\to+0$時 $x^2-x=x(x-1)\to-0$，$x\to-0$時

$x^2-x=x(x-1)\to+0$　又 $x\to 0$時 $(x-2)\to-2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x-2}{x^2-x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x-2}{x^2-x}=-\infty$　　（答）無極限

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}}\right)=\infty$　　（答）無極限