数　　学

（补充教材）

成都电訊工程学院

一九七二年十二月

毛 主 席 语 录

自然科学是人們爭取自由的一种武装。人們为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人們为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

目　　录

第一章　不等式和絕对值

在“代数”里我们学习了绝对值和一元一次不等式，对不等式的意义、性质和解一元一次不等式的方法有了初步的了解。在这一章里，将首先复习一元一次不等式，然后学习一元一次不等式组、一元二次不等式、绝对不等式，和绝对值的性质。

§1　不等式的性质

一　不等式

我们看到，自来水管的横截面一般总是圆形的。为什么工人同志总把它制成圆形，而不制成方形的呢？

这是因为，当周长一定时，圆的面积比方形的大。例如，周长为 L 的正方形的边长是 $\frac{L}{4}$，故它的面积是 $\left(\frac{L}{4}\right)^2$；周长为 L 的圆的半径是 $\frac{L}{2\pi}$，故它的面积是 $\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$，我们可以证明：

$$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2。\tag{1}$$

某工厂在毛主席关于“**抓革命，促生产**”的伟大号召鼓舞下，集中群众智慧，挖掘生产潜力，预计后年的产量将比今年增长一倍以上，问明后两年该厂的产量年平均增长率是多少？

因为后年的产量比今年增长一倍以上，换句话说，后年的产量是今年的两倍以上。设该厂今年的产量为 a，明、后两年的年平均增长率为 x，则明年的产量为 $a(1+x)$，后年的产量为 $a(1+x)^2$，由题意知

$$a(1+x)^2>2a。\tag{2}$$

我们的问题就是要求出适合不等式(2)的未知数 x 的值。

象(1)这样的不等式，不论其中的字母 L 取什么数值时，它都能成立，这样的不等式叫做绝对不等式。而象(2)这样的不等式只有某些范围的实数 x 才能使它成立，这样的不等式叫做条件不等式。

对于绝对不等式，是要证明它的正确性；对于条件不等式，则是要确定使不等式成立的未知数取值的范围。

二　不等式的性质

毛主席教导我们：“大家明白，不論做什么事，不懂得那件事的情形，它的性質，它和它以外的事情的关联，就不知道那件事的规律，就不知道如何去做，就不能做好那件事。”

下面我们来学习不等式的性质。

在学习初中《数学》，引入负数时，曾规定：若在数轴上，代表数 a 的点（简称点 a）

在代表数 b 的点（简称点 b）的右方，则认为 $a>b$；若点 a 在点 b 的左方，则认为 $a<b$。而点 a 在点 b 的右方，则数 a 与 b 之差 $a-b$ 是正的，反之则为负。于是我们有：

性质 1 如果 $a-b$ 是正的，则 $a>b$；如果 $a-b$ 是负的，则 $a<b$；如果 $a-b$ 等于 0，则 $a=b$。

例 1 比较 $(a+5)(a+7)$ 和 $(a+6)^2$ 的大小。

解

$$
\begin{aligned}
&(a+5)(a+7)-(a+6)^2\\
&=(a^2+12a+35)-(a^2+12a+36)\\
&=-1<0,\\
&(a+5)(a+7)<(a+6)^2。
\end{aligned}
$$

例 2 试证：$\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2$。

証明 $\because$

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2-\left(\frac{L}{4}\right)^2&=\frac{L^2}{4\pi}-\frac{L^2}{16}\\
&=\frac{L^2}{16\pi}(4-\pi)>0,
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{L}{4}\right)^2。$$

性質 2 在不等式的两边加上（或者减去）同一个数或者同一个整式，所得的不等式仍能成立。即，

如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$。

証明 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$。而

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b>0$$

是一个正数，所以

$$a+c>b+c。\tag{1}$$

从性质 2 容易看出，如果 $a+b>c$，则

$$a+b+(-b)>c+(-b)$$

即

$$a>c-b。$$

例如，$7>3$

两边都加上 2，得

$$9>5,$$

两边都减去 4 得

$$3>-1。$$

推論 1 不等式中任何一项可以改变成相反的符号后，从一边移到另一边。

性質 3 在不等式的两边乘以（或除以）同一个正数，所得的不等式仍能成立。即，如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$。

証明 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，而

$$ac-bc=(a-b)c。$$

两个正数之积是一个正数，所以

$$ac>bc。$$

说明。因为除以一个正数就是乘以这个正数的倒数，正数的倒数也是正数，所以性质3对于除以同一个正数，同样适用。

即，如果 $a>b$，$c>0$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$。

例如，$8>6$，

两边都乘以2，得

$$16>12,$$

两边都除以4，得

$$2>1\frac{1}{2}。$$

性质4 在不等式的两边乘以（或除以）同一个负数，不等号必须改变成相反的不等号，所得的不等式才能成立。即，

如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

証明 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，而 $c<0$，

$$ac-bc=(a-b)c<0。$$

所以

$$ac<bc。$$

例如，$10>4$。

两边都乘以-5，得

$$-50<-20$$

两边都除以-2，得

$$-5<-2$$

容易看出，如果 $a>b$，$c=0$，则 $ac=bc$。

习 题 一

1. 比较下列各组中两个代数式的大小：

（1） $(x^2+1)^2$ 和 x^4+x^2+1，　$(x\neq 0)$；

（2） $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 和 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$，$(a\neq 0)$。

2. 求证：

（1） 如果 $a>b$，$b=c$，则 $a>c$；

（2） 如果 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

（3） 如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；

（4） 如果 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$；

（5） 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$。

3. 回答下列问题：

（1） 如果 $a>b$，$c=d$，是否一定能得出 $ac>bd$，为什么？

（2） 如果$ac>bc$，是否一定能得出$a>b$，为什么？

（3） 如果$a>b$，是否一定能得出$ac^2>bc^2$，为什么？

（4） 如果$ac^2>bc^2$，是否一定能得出$a>b$，为什么？

4． 已知$a>b$，求证$c-a<c-b$。

5． 如果$a>b, c>d$，是否一定能得出$ac>bd$，为什么？举例来说明。

6． 如果$a>b$，a、b都不为零，是否一定能得出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$？为什么？

7． 如果$a>b>0$，$c>0$，求证$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$。

§2 不等式的解法

在含有未知数的不等式中，能够使不等式成立的未知数取值的范围，叫做不等式的解。求不等式解的过程，叫做解不等式。

解不等式的方法和解方程十分类似，就是利用不等式的性质，把原不等式逐步变成象$x>a$，或者$x<a$这样最简单的不等式，这个最简单的不等式所确定的未知数x取值的范围就是原不等式的解。

一 一元一次不等式

我们来看下面几个不等式

$$x-5>3,$$

$$\frac{x}{4}<1,$$

$$3(1-x)>2(x-5).$$

象上面这样的只含有一个未知数，且未知数的次数是1的不等式，叫做一元一次不等式。

例1 解不等式

$$2(x+1)-\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1.$$

解 两边都乘以6，去分母，得

$$12(x+1)-2(x-2)>21x-6.$$

去括号，合并同类项，得

$$10x+16>21x-6,$$

移项，得

$$-11x>-22,$$

两边同除以-11，得

$$x<2.$$

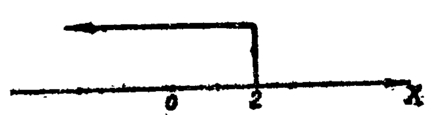

图 1—1

所以，原不等式的解是$x<2$。在数轴上的表示，如图1—1。

从例1的解法可以看出，解一元一次不等式的步骤，与解一元一次方程的步骤是十分类似的。一般步骤是：

（1）去分母；

（2）去括号；

（3）移项；

（4）合并同类项；

（5）不等式的两边都除以未知数的系数（系数是负数时，要把不等号改变成相反的不等号）。

但须注意，方程的解和不等式的解是不同的。一般说来，方程的解是确定的一个（或几个）数值，在数轴上表示是几个点，而不等式的解一般是一个或几个范围里的数值，在数轴上表示往往是一个（或几个）区间。

例2 解不等式

$$\frac{1-\frac{x}{5}}{4} \leqslant \frac{1+\frac{x}{4}}{5}.$$

解 原不等式可化成

$$\frac{5-x}{20} \leqslant \frac{4+x}{20}.$$

两边都乘以20，得

$$5-x \leqq 4+x,$$

移项，得

$$-2x \leqq -1,$$

两边都除以－2，得

$$x \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以原不等式的解是 $x \geqslant \frac{1}{2}$。在数轴上的表示，如图5－2。

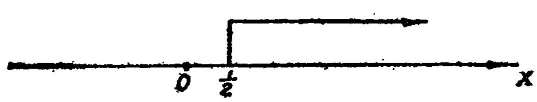

图 1－2

从例1与例2的求解过程可以看出：对于任何一个一元一次不等式，总可以利用不等式的性质，把它化成 $ax > b$ 或者 $ax < b$ 的形式。因为后者的两边同乘以－1时，就成了前者，所以我们只讨论不等式 $ax > b$ 就行了。

解不等式 $ax > b$。

1）如果 $a > 0$，则 $x > \frac{b}{a}$。不等式的解是任何大于 $\frac{b}{a}$ 的实数；

2）如果 $a < 0$，则 $x < \frac{b}{a}$。不等式的解是任何小于 $\frac{b}{a}$ 的实数；

3）如果 $a = 0$，且 $b < 0$ 时，则不等式 $ax > b$ 对于任何实数 x 都成立；如果 $a = 0$，而 $b \geqslant 0$ 时，则不等式 $ax > b$ 无解。

例3 解不等式

$$\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{4}>\frac{x}{12}。$$

解 两边都乘以12，得

$$4x+4-3x+3>x,$$

即
$$x+7>x。$$

此不等式对任何 x 都成立，所以原不等式的解可用整个数轴表示。

例4 解不等式

$$2[x-2(x-2)]>x-3(x-3)。$$

解 原不等式可化为

$$-2x+8>-2x+9,$$

移项，得
$$0>1。$$

这是不可能的，所以原不等式无解。

二 一元一次不等式組

两个或几个含相同未知数的不等式联立起来，叫做不等式组。能使不等式组中的各个不等式都成立的未知数的值，叫做这个不等式组的解。求不等式组的所有解，或确定它没有解的过程，叫做解不等式组。

例5 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x}{3}>-1, \\ 2(x-3)-3(x-2)<0。\end{cases}$$

解 原不等式组可以化成：

$$\begin{cases} x>-6, \\ x>0。\end{cases}$$

因为使 $x>6$ 和 $x>0$ 都能成立的 x 的值的范围是 $x>0$，所以原不等式组的解是 $x>$（图1—3）。

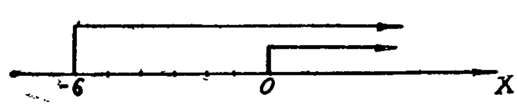

图1—3

例6 下列两个一元二次方程

$$2x^2-4x+m=0, \quad (1)$$

$$mx^2-10x+5=0 \quad (2)$$

中，m 在什么实数范围内取值时，才能使两个方程都有相异的实数解。

解 由一元二次方程的解的判别式可知，要使（1）、（2）同时有两相异的实数解，必须下列不等式同时成立

$$\begin{cases} (-4)^2-4\times 2m>0, & (3) \\ (-10)^2-4m\times 5>0。 & (4) \end{cases}$$

不等式(3)、(4)可以化成

$$\begin{cases} m<2, \\ m<5。 \end{cases}$$

因为使$m<2$和$m<5$都能成立的m的值的范围是$m<2$，所以不等式的解是$m<2$，即m取小于2的一切实数时，能使两方程都有相异实数解。

例7 如图1—4，第一个皮带轮的半径长40厘米，每分钟转200转，如果要第二个皮带轮每分钟转数在800—1000之间，第二个皮带轮的半径长度应在什么范围内，

解 设第二个皮带轮的半径是r厘米，依题意得不等式组：

$$800\times 2\pi r<200\times 2\pi\times 40,$$
$$1000\times 2\pi r>200\times 2\pi\times 40。$$

此不等式组最后可以化成

$$\begin{cases} r<10, \\ r>8。 \end{cases}$$

因为使$r<10$和$r>8$都能成立的r值的范围是$8<r<10$。所以原不等式组的解是$8<r<10$。

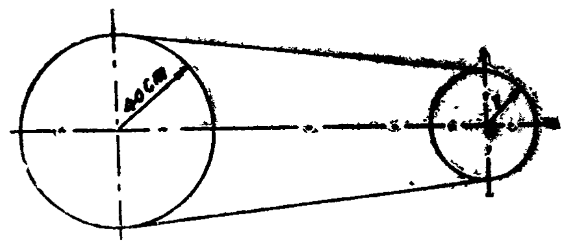

图1—4

答 第二个皮带轮的半径应在8厘米至10厘米的范围内。

例8 解不等式组

$$\begin{cases} 7x-4>5x+8, \\ 5x-10<x+2。 \end{cases}$$

解 原不等式组可以化成

$$\begin{cases} x>6, \\ x<3。 \end{cases}$$

因为x不论取什么数值，都不能使$x>6$和$x<3$同时成立，所以原不等式没有解。

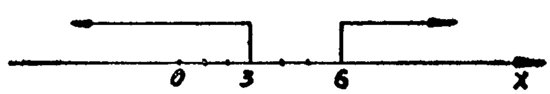

图1—5

每一个一元一次不等式的解，总是$x>c$或$x<c$型，由上面几个例子可以看出两个一元一次不等式所组成的不等式组有以下几种情况：

(1)不等式组$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$$(a<b)$的解是$x>b$ (如例5)；

(2)不等式组$\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$$(a<b)$的解是$x<a$ (如例6)；

（3）不等式组$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$ $(a<b)$的解是$a<x<b$ （如例7）；

（4）不等式组$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$ $(a<b)$没有解 （如例8）。

三 一元二次不等式

含有一个未知数且未知数的次数最高是二次的不等式叫做一元二次不等式。在把一切项都移到不等式的左边后，任何一元二次不等式都可化成

$$ax^2+bx+c>0,$$

或

$$ax^2+bx+c<0$$

的形式（式中 $a\neq0$）。因为后者的两边同乘以－1就化成了前者，所以下面我们只讨论前者就行了。

1. 图解法

毛主席教导我们："每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。"我们来看二次函数 $y=ax^2+bx+c$，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a\neq0)$间的联系和区别。

一般说来，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是指自变量 x 取一切实数时，和函数 y 的一种对应关系。而解二次方程 $ax^2+bx+c=0$，是对于函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，求这样的 x_0，使得 $ax_0^2+bx_0+c=0$。x_0 也叫做函数的零点。解二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的问题，就是要找出使 $ax^2+bx+c>0$ 成立的 x 值的范围。因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点是这个函数大于零和小于零的分界点。所以解方程的问题和解不等式有密切联系。

就"形"而言，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是一条抛物线。二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是指抛物线和 x 轴的交点，而二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 是指这条曲线在 x 轴的上方部分（如图1－6）。

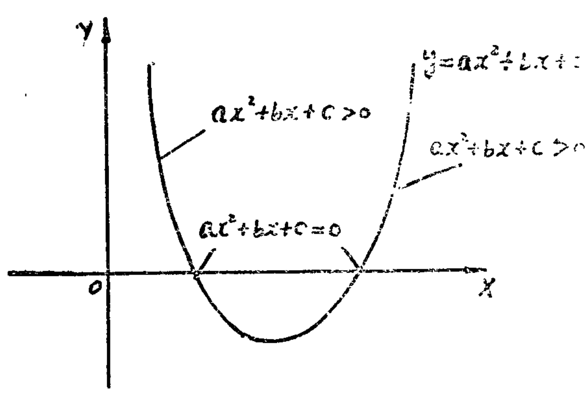

图1－6

于是，我们不难找出解一元二次不等式和解一元二次方程间的联系。

例1 解不等式 $2x^2-5x+3>0$。

解 （1）$\because a=2>0$，抛物线 $y=2x^2-5x+3$ 的开口朝上，这种抛物线是向上无限伸展的，所以它总有在 x 轴上方的部分，因此不等式一定有解。

（2）方程 $2x^2-5x+3=0$ 的判别式

$b^2-4ac=25-24>0$。所以，抛物线 $y=2x^2-5x+3$ 和 x 轴有两个交点，它们横坐标为

$$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{4},$$

即
$$x_1=2,\quad x_2=\frac{3}{2}。$$

从图1—7可以看出，不等式 $2x^2-5x+3>0$ 的解是 $x<1$ 或者 $x>\frac{3}{2}$。

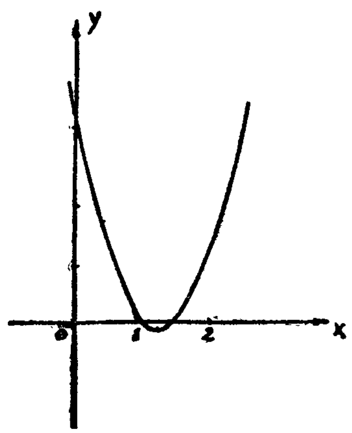

图1—7

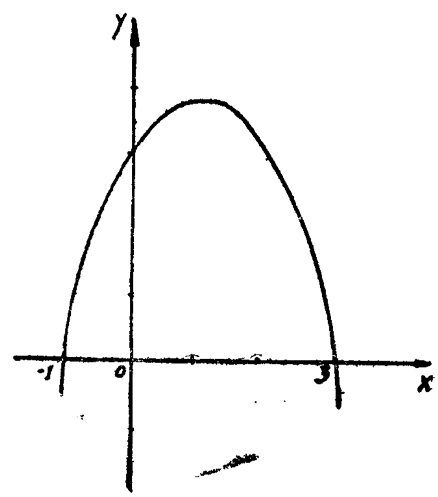

图1—8

例2 解不等式 $x^2-2x-3<0$。

解 原不等式可化为

$$-x^2+2x+3>0。$$

因为 $a=-1<0$，所以抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 的开口朝下。

而方程 $-x^2+2x+3=0$ 的判别式

$$b^2-4ac=4+12>0,$$

所以抛物线和 x 轴有两个交点，交点的横坐标为 $x_1=-1, x_2=3$。

从图1—8可以看出，不等式 $-x^2+2x+3>0$ 的解是 $-1<x<3$。

例3 解不等式 $-2x^2+3x-7>0$。

解 因为 $a=-2<0$，所以抛物线 $y=-2x^2+3x-7$ 的开口朝下。而方程 $-2x^2+3x-7=0$ 的判别式

$$b^2-4ac=9-56<0。$$

所以，二次函数 $y=-2x^2+3x-7$ 与 x 轴没有交点，因此原不等式无解。

2. 分解因式法

如果二次三项式很容易分解因式，则我们常常把一元二次不等式化为一元一次不等式组来求解。

例4 解不等式 $x^2+x-12>0$。

解 因为 $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$。

原不等式即 $(x-3)(x+4)>0$。

为使 $(x+3)(x-4)$ 是正数，就要 $(x-3)$ 和 $(x+4)$ 同时为正或者同时为负，所以原不等式可以化为

$$\begin{cases} x-3>0, & (1) \\ x+4>0; & (2) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x-3<0, & (1') \\ x+4<0. & (2') \end{cases}$$

由（1）得 $x>3$，
由（2）得 $x>-4$， $\therefore x>3$。
由（1′）得 $x<3$，
由（2′）得 $x<-4$。 $\therefore x<-4$。

所以原不等式的解是 $x>3$ 和 $x<-4$（图1—9）。

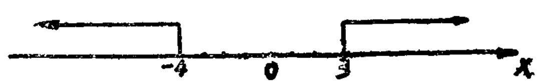

图1—9

例 5 解不等式 $a(1+x)^2>2a$ $(a>0)$。

解 $\because$ $a>0$， $\therefore$ 原不等式就是 $(1+x)^2>2$。

即

$$(1+x)^2-(\sqrt{2})^2>0,$$

$$\therefore \quad (1+x+\sqrt{2})(1+x-\sqrt{2})>0.$$

由此可得不等式组

$$\begin{cases} x+1+\sqrt{2}>0 \\ x+1-\sqrt{2}>0, \end{cases} \quad (\text{I})$$

和

$$\begin{cases} x+1+\sqrt{2}<0 \\ x+1-\sqrt{2}<0. \end{cases} \quad (\text{II})$$

不等式组（Ⅰ）的解是 $x>\sqrt{2}-1$。

不等式组（Ⅱ）的解是 $x<-\sqrt{2}-1$。

$x>\sqrt{2}-1$ 和 $x<-\sqrt{2}-1$ 都是不等式 $a(1+x)^2>2a$ 的解，这就说明，§1

开始提出的第二个问题的解是$x>\sqrt{2}-1$（因为$x<-\sqrt{2}-1$不合实际，应舍去）。从而知明后两年的平均增长率至少是$\sqrt{2}-1$或41%。

例 6 解不等式

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0。$$

解 原不等式当分子分母异号时成立，亦即它相当于下面两个不等式组

$$\begin{cases} x^2+5x+4>0, & (1) \\ x^2-5x-6<0; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+5x+4<0, & (3) \\ x^2-5x-6>0° & (4) \end{cases}$$

1^0 解不等式组（1）、（2）。

由不等式（1），有

$$(x+1)(x+4)>0,$$

其解为

$$x>-1或x<-4。$$

由不等式(2)，有

$$(x+1)(x-6)<0$$

其解为

$$-1<x<6。$$

故不等式组(1)、(2)的解为

$$\begin{cases} x>-1, \\ x<6。 \end{cases} 即-1<x<6。$$

2^0 同理得不等式组(3)、(4)的解为

$$-4<x<-1。$$

综合上述，故不等式的解为$-4<x<-1$和$-1<x<6$。

习 题 二

1. 解下列各不等式，并且在数轴上表示它们的解。

（1） $15-9y>10-4y$;

（2） $2+\frac{3(t+1)}{8}\leqslant 3-\frac{t-1}{4}$;

（3） $3[x-2(x-1)]<4x$;

（4） $x-\frac{x-1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{6}$;

（5） $5(x-1)-x(5-x)<x^2-5$;

（6） $(x-1)^2<(x+1)^2$.

2. 解下列各不等式组，并且在数轴上表示它们的解。

(1) $\begin{cases} x-2(x-3)>4, \\ \dfrac{x}{2}-(x-3)>\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x-3)(x-4)<(x+1)(x+2), \\ x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}>4-\dfrac{7-3x}{5}, \\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3), \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 1-\dfrac{x+1}{2}>2-\dfrac{x+2}{3}, \\ x(x-1)<(x+3)(x-3)。 \end{cases}$

3. 作出下列函数的图象，x是什么实数的时候，下列函数的值大于零？等于零？小于零？

(1) $y=x^2-14x+45$;

(2) $y=25-x^2$;

(3) $y=6x^2+5x-6$;

(4) $y=x^2-2x-1$;

(5) $y=-x^2+4x-4$;

(6) $y=x^2+6x+10$。

4. 解下列不等式

(1) $3x^2-10x+8>0$;

(2) $x^2-4x-5<0$;

(3) $x^2-6x+9>0$;

(4) $4x^2-4x+1<0$。

5. (1) k是怎样的值时，方程 $(k-1)x^2+2kx+k+3=0$ 没有实数解？

(2) m是怎样的值时，方程 $(mx+1)^2=2x$ 有实数解？

6. m是什么实数时，方程

$$x^2+(m-1)x+3m^2-11=0$$

有(1)不相等的实数解？(2)相等的实数解？(3)没有实数解？

7. 从A地到B地公路长150公里，汽车要在4小时内从A地到达B地；每小时至少要走多少公里？如果汽车的速度每小时超过40公里，至少能提前多少时间到达B地？如果汽车的速度每小时保持在30—40公里之间，从A地到B地需要多少时间？

8. 某生产队去年种小麦65亩，总产量是18200公斤，今年预计总产量比去年增加10%到20%，今年平均亩产在多少斤之间？

9. 一个工人师付在第一次技术革新后每小时多做了10个零件，这样，他一天(8小时)里所做的零件超过了200个，而第二次技术革新后，每小时又多做了27个，这样他半天(4小时)所做的零件就超过了第一次革新后一天所做的零件，问他第二次革新后是第一次革新前的生产率的几倍？

§3 绝对不等式

一 絕对不等式的証明

对于绝对不等式的证明和证明恆等式的问题相类似，就是要论證給定的不等式对于式中字母的一切允许值恆成立，

绝对不等式的证明方法是多种多样的，下面结合例子讲些常用的方法。

例 1 a、b 为任何实数，求证

$$a^2+b^2\geqslant 2ab. \tag{1}$$

式中等号仅当 $a=b$ 时成立，

1. 分析法证明

要使 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立，根据不等式的移项法则也就是要

$$a^2+b^2-2ab\geqslant 0$$

恆成立，亦卽 $$(a-b)^2\geqslant 0$$

恆成立。后面这个不等式是显然成立的。当 $a=b$ 时才取等号，而且推导过程中每一步可逆。所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 恆成立。证毕。

分析法证明就是从结论出发，寻找结论成立的条件。如上题，利用不等式的基本性质对要证明的不等式逐步进行化简，最后把问题归结到一个明显成立的不等式，而这个化简过程中，每一步可逆。从而证明了原不等式的成立。

2. 综合法证明

因为对于任何实数 a、b，有

$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

等号仅当 $a=b$ 时成立。

$$\therefore \qquad a^2-2ab+b^2\geqslant 0,$$

亦卽 $$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

等号仅当 $a=b$ 时成立。

综合法就是从已知的条件出发，经过逻辑推理，推断结论正确。

在不等式(1)中，若令

$$a=\sqrt{c}, \qquad b=\sqrt{d}$$

则不等式(1)变为:

$$c+d\geqslant 2\sqrt{cd},$$

或

$$\sqrt{cd}\geqslant\frac{c+d}{2}, \tag{2}$$

等号仅当 $c=d$ 时成立。式中 $\frac{c+d}{2}$ 叫做数 c、d 的算术平均数，$\sqrt{cd}$ 叫做 c、d 的几何平均数。由此我们得:

定理 任意两个非负实数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

例 2 设 $x>0$，求证

$$x+\frac{9}{x}\geqslant 6。$$

証明 因为x和$\frac{9}{x}$都是正数，由不等式(2)得:

$$\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}\leqslant\frac{x+\frac{9}{x}}{2},$$

即

$$3\leqslant\frac{x+\frac{9}{x}}{2}。$$

两边同乘以2，得

$$x+\frac{9}{x}\geqslant 6。$$

推論 1 若两非负数之和为定値时，其积以两数相等时为最大。

証明 设$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，且$x_1+x_2=S$。则根据上述定理，有

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{S}{2}。$$

或

$$x_1x_2\leqslant\frac{S^2}{4},$$

式中等号仅当$x_1=x_2$时成立，即当$x_1=x_2$时

$$x_1x_2=\frac{S^2}{4}$$

是最大值。

推論 2 若两非负数之积为定値时，其和以两数相等时为最小。

証明 设$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，且$x_1x_2=T$，则

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{T},$$

或

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\geqslant x_1x_2=T,$$

式中等号仅当$x_1=x_2$时成立，即当$x_1=x_2$时

$$x_1+x_2=2\sqrt{T}$$

是最小值。

上述两个推论在实践中有广泛的应用。

对于多个非负数的情形，也有类似的结论:

如果$a_i\geqslant 0$($i=1，2\cdots\cdots，n$)，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

等号仅当$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$时成立，即

n个非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数。