

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性	5-3-1
5-3-1 引言	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性	5-3-2
一、系统可观性概念	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则	5-3-2
三、系统一致可观性概念	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性	5-3-29
一、系统可控性概念	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则	5-3-39
四、系统一致可控性概念	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性	5-3-57
一、	系统稳定性概念	5-3-57
1.	系统的描述	5-3-57
2.	平衡状态	5-3-58
3.	稳定性概念	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、	并联可控实现	5-5-9
二、	并联可观文实现	5-5-13

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

6-4-1	模型误差分析	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
	二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法	6-4-16
	一、限定下界法	6-4-16
	二、状态扩充法	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
	四、限定记忆泸波	6-4-31
	五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-5 常系数、线性系统的实现问题

所谓常系数、线性系统的实现问题是指：对于给定的传递矩阵 $W(S)$ ，求得相应的常系数、线性系统的状态方程和观察方程：

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y(t) = C X(t) \end{cases} \quad (5-5-1)$$

使得

$$W(S) = C(SI - A)^{-1}B \quad (5-5-2)$$

或建立相应的系统模拟结构图。而在所有可能的实现 $S: \{A, B, C\}$

中，维数最小者，或在所有的结构图中，积分口最少者称为最小实现

下面就讨论单轨入单轨出系统的实现问题。

5-5-1 常系数、线性系统的可控实现

单轨入单轨出系统 $S: \{A, b, C\}$ 的系统方程是

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + b u(t) \\ Y(t) = C X(t) \end{cases} \quad (5-5-3)$$

因此其传递矩阵是传递函数

$$W(S) = C(SI - A)^{-1}b \quad (5-5-4)$$

如果设

$$W(S) = \frac{P(S)}{\Psi(S)} \quad (5-5-5)$$

$$\begin{aligned}
& y^{(n)}(t) + \dots + a_3 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\
= & CA^{n-1} X(t) + CA^{n-1} b u(t) + CA^{n-2} \dot{b} u(t) \\
& + \dots + CA \dot{b} u^{(n-2)}(t) + C \dot{b} u^{(n-1)}(t) \\
& + \dots \\
& + Ca_3 A^3 X(t) + Ca_3 A^2 b u(t) + Ca_3 A \dot{b} u(t) + Ca_3 \dot{b} u(t) \\
& + Ca_2 A^2 X(t) + Ca_2 A \dot{b} u(t) + Ca_2 \dot{b} u(t) \\
& + Ca_1 A X(t) + Ca_1 b u(t) \\
& + Ca_0 X(t) \\
= & C\Psi(A) X(t) + CP_0(A) \dot{b} u(t) + CP_1(A) b u(t) \\
& + CP_2(A) \dot{b} u(t) + \dots + CP_{n-1}(A) b u^{(n-1)}(t)
\end{aligned} \tag{5-5-9}$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned}
\Psi(A) &= A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 A + a_0 I \\
P_0(A) &= A^{n-1} + \dots + a_3 A^2 + a_2 A + a_1 I \\
P_1(A) &= A^{n-2} + \dots + a_4 A^2 + a_3 A + a_2 I \\
P_2(A) &= A^{n-3} + \dots + a_5 A^2 + a_4 A + a_3 I \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
P_{n-1}(A) &= I
\end{aligned} \right. \tag{5-5-10}$$

如果

$$\begin{cases} \Psi(A) = 0 \\ CP_0(A) \delta = p_0 \\ CP_1(A) \delta = p_1 \\ \dots \dots \dots \dots \\ CP_{n'-1}(A) \delta = p_{n'-1} \end{cases} \quad (5-5-11)$$

则(5-5-9)式与(5-5-7)式就有相同形式,因此,满足关系式(5-5-11)式的A, B, C就是要求实现的系统矩阵。

由于所讨论的系统是单轨入单轨出系统,所以当系统的阶数为 n' 时,矩阵A是一个 $n' \times n'$ 矩阵,它有 $n' \times n'$ 个元素, δ 是 $n' \times 1$ 矩阵,它有 n' 个元素,C是 $1 \times n'$ 矩阵,它有 n' 个元素,因此要由

(5-5-11)式确定A, δ , C,也就是要由(5-5-11)式求解 $(n')^2 + 2n'$ 个未知元素,显然方程的个数小于未知元素的个数,因此在求传递矩阵(目前是传递函数) $W(S)$ 的实现时,可以预先设定待求矩阵A, δ , C的某些元素。

由 $\Psi(A) = 0$ 和Cayley — Hamilton 定理知道,系数 $a_0, a_1, \dots, a_{n'-1}$ 是矩阵A的特征多项式的系数,因此我们可以建立传递函数 $W(S)$ 的可控规范形式实现:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n'-1} \end{bmatrix}; \quad (5-5-12)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (5-5-13)$$

而因为

$$[P_0(A_1)b_1, P_1(A_1)b_1, \dots, P_{n'-1}(A_1)b_1] = I_{n' \times n'}$$

所以由(5-5-11)式得:

$$\begin{aligned} C_1 &= [P_0(A_1)b_1, P_1(A_1)b_1, \dots, P_{n'-1}(A_1)b_1] \\ &= [P_0, P_1, \dots, P_{n'-1}] \end{aligned}$$

因此得

$$C_1 = [P_0, P_1, \dots, P_{n'-1}] \quad (5-5-14)$$

由于关系式(5-5-12), (5-5-13)和(5-5-14)所决定的矩阵 A_1, b_1, C_1 是满足关系式(5-5-11)的, 因此, $S: [A_1, b_1, C_1]$ 是传递函数 $W(S)$ 所代表的常系数、线性系统的一个实现, 由上节的规范形式可知, 这个实现是常系数、线性系统的一种可控规范形式, 因此又称它是可控实现。

系统 $S: [A_1, b_1, C_1]$ 的状态方程和观察方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y(t) = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (5-5-15)$$

由方程 (5-5-15) 可得到系统的可控实现的模拟结构图, 如图 5-5-1 所示。

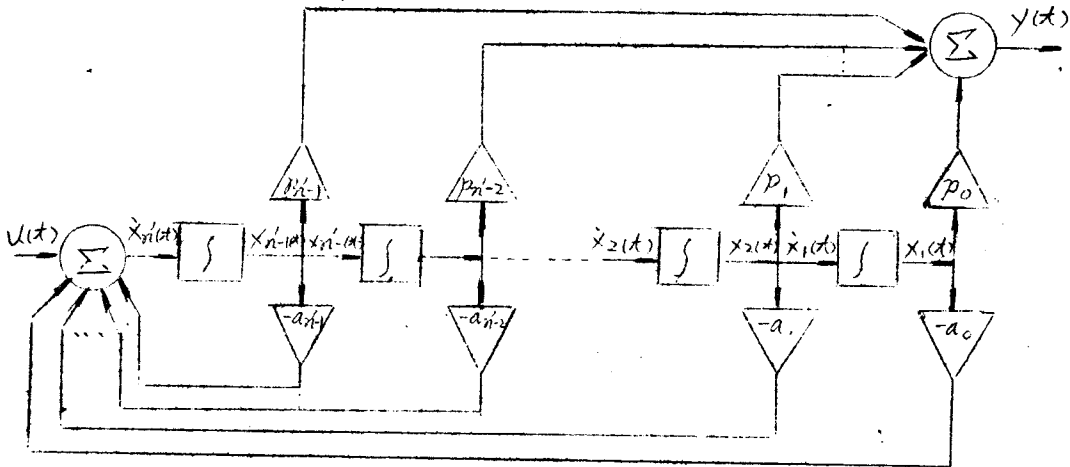


图 5-5-1 $W(s)$ 的可控实现模拟结构图

5-5-2 常系数、线性系统的可观察实现

显然，类似于常系数、线性系统的可控实现，可建立传递函数 $W(S)$ 所代表的常系数、线性系统的可观察实现。这时有

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & -a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & -a_1 \\ & & I_{n'-1} & \vdots & \\ & & & \vdots & -a_{n'-1} \end{bmatrix}; \quad (5-5-16)$$

$$C_2 = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]; \quad (5-5-17)$$

而因为

$$\begin{bmatrix} C_2 P_0(A_2) \\ C_2 P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2 P_{n'-1}(A_2) \end{bmatrix} = I_n;$$

所以由 (5-5-11) 式得：

$$\begin{bmatrix} C_2 P_0(A_2) \\ C_2 P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2 P_{n'-1}(A_2) \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n'-1} \end{bmatrix}$$

因此得：

$$b_2 = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n'-1} \end{bmatrix} \quad (5-5-18)$$

由于关系式 (5-5-16), (5-5-17) 和 (5-5-18) 所决定的矩阵 A_2, C_2, b_2 是满足关系式 (5-5-11) 的, 因此, $S: [A_2, b_2, C_2]$ 是传递函数 $W(S)$ 所代表的常系数、线性系统的一个实现。由上节的规范形式可知, 这个实现是常系数、线性系统的一种可观察规范形式, 因此又称它是可观察实现。

系统 $S: [A_2, b_2, C_2]$ 的状态方程和观察方程为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{X}_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & -a_0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & -a_1 \\ & & I_{n-1} & \vdots & \\ & & & \vdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ \\ Y(t) = [0 \dots 0 \ 1] \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{n-1}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-5-19)$$

由方程 (5-5-19) 可得到系统可观察实现的模拟结。如图 5-5-2 所示。

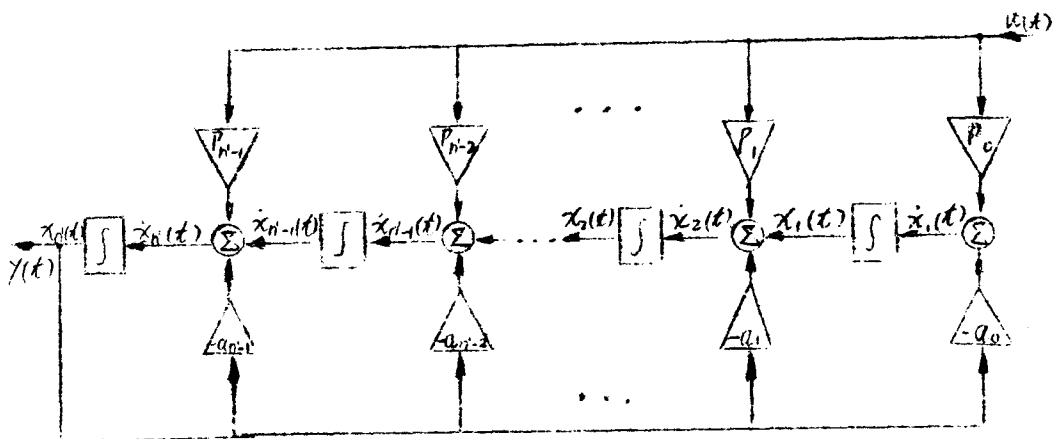


图 5-5-2 $W(s)$ 的可观察实现模拟结构图

5-5-3 常系数、线性系统的并联形实现

一、并联可控实现

如果

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = \prod_{i=1}^K (s - s_i)^{\lambda_i}$$

则可将 $W(s)$ 展开成部分分式

$$W(s) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{C_{ij}}{(s - s_i)^j} \quad (5-5-20)$$

由 (5-5-20) 式和描述系统的若唐规范形式可知，系统矩阵 A 可取为