第五章　线性系统理论引论

第六章　最佳泸波原理

§5－5　常系数、线性系统的实现问题

所谓常系数、线性系统的实现问题是指：对于给定的传递矩阵W（S），求得相应的常系数，线性系统的状态方程和观察方程：

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+Bu(t) \\ Y(t)=CX(t) \end{cases} \qquad (5-5-1)$$

使得

$$W(S)=C(SI-A)^{-1}B \qquad (5-5-2)$$

或建立相应的系统模拟结构图。而在所有可能的实现S:〔A.B.C〕中，维数最小者，或在所有的结构图中，积分口最少者称为最小实现。

下面就讨论单轨入单轨出系统的实现问题。

5－5－1　常系数、线性系统的可控实现

单轨入单轨出系统S：〔A．b．C〕的系统方程是

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+bu(t) \\ Y(t)=CX(t) \end{cases} \qquad (5-5-3)$$

因此其传递矩阵是传递函数

$$W(S)=C(SI-A)^{-1}b \qquad (5-5-4)$$

如果设

$$W(S)=\frac{P(S)}{\Psi(S)} \qquad (5-5-5)$$

并且

$$\Psi(S)=S^{n'}+a_{n'-1}S^{n'-1}+\cdots+a_1S+a_0$$

$$P(S)=P_{n'-1}S^{n'-1}+P_{n'-2}S^{n'-2}+\cdots+P_1S+P_0$$

(5—5—6)

则可得到其相应的系统微分方程为：

$$y^{(n')}(t)+a_{n'-1}y^{(n'-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$

$$=P_{n'-1}u^{(n'-1)}(t)+P_{n'-2}u^{(n'-2)}(t)+\cdots+P_1\dot{u}(t)$$

$$+P_0u(t) \qquad (5—5—7)$$

因为由方程（5－5－3）得

$$\begin{cases} y(t)=CX(t) \\ \dot{y}(t)=C\dot{X}(t)=CAX(t)+Cbu(t) \\ \ddot{y}(t)=CA\dot{X}(t)+Cb\dot{u}(t)=CA^2X(t)+CAbu(t)+Cb\dot{u}(t \\ \dddot{y}(t)=CA^2\dot{X}(t)+CAb\dot{u}(t)+Cb\ddot{u}(t) \\ \qquad =CA^3X(t)+CA^2bu(t)+CAb\dot{u}(t)+Cb\ddot{u}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n')}(t)=CA^{n'}X(t)+CA^{n'-1}bu(t)+CA^{n'-2}bu(t \\ \qquad +\cdots+CAbu^{(n'-2)}(t)+Cbu^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

(5—5—8)

对（5－5－8）式中各式，依次乘上 a_0，a_1，a_2，a_3，…，1，并相加得：

$$
\begin{aligned}
& y^{(n')}(t)+\cdots+a_3\dddot{y}(t)+a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t) \\
= & CA^{n'-1}X(t)+CA^{n'-1}bu(t)+CA^{n'-2}b\dot{u}(t) \\
& +\cdots+CAbu^{(n'-2)}(t)+Cbu^{(n'-1)}(t) \\
& +\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +Ca_3A^3X(t)+Ca_3A^2bu(t)+Ca_3Ab\dot{u}(t)+Ca_3b\ddot{u}(t) \\
& +Ca_2A^2X(t)+Ca_2Abu(t)+Ca_2b\dot{u}(t) \\
& +Ca_1AX(t)+Ca_1bu(t) \\
& +Ca_0X(t) \\
= & C\Psi(A)X(t)+CP_0(A)bu(t)+CP_1(A)bu(t) \\
& +CP_2(A)bu(t)+\cdots+CP_{n'-1}bu^{n'-1}(t)
\end{aligned}
\tag{5-5-9}
$$

式中

$$
\begin{cases}
\Psi(A)=A^{n'}+a_{n'-1}A^{n'-1}+\cdots+a_1A+a_0I \\
P_0(A)=A^{n'-1}+\cdots+a_3A^2+a_2A+a_1I \\
P_1(A)=A^{n'-2}+\cdots+a_4A^2+a_3A+a_2I \\
P_2(A)=A^{n'-3}+\cdots+a_5A^2+a_4A+a_3I \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
P_{n'-1}(A)=I
\end{cases}
\tag{5-5-10}
$$

如果

$$
\begin{cases}
\Psi(A)=0 \\
CP_0(A)\,b=p_0 \\
CP_1(A)\,b=p_1 \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
CP_{n'-1}(A)\,b=p_{n'-1}
\end{cases}
\qquad (5\text{—}5\text{—}11)
$$

则（5－5－9）式与（5－5－7）式就有相同形式，因此，满足关系式（5－5－11）式的A，B，C就是要求实现的系统矩阵。由于所讨论的系统是单轨入单轨出系统，所以当系统的阶数为n'时，矩阵A是一个$n'\times n'$矩阵，它有$n'\times n'$个元素，b是$n'\times 1$矩阵，它有n'个元素，C是$1\times n'$矩阵，它有n'个元素，因此要由（5－5－11）式确定A，b，C，也就是要由（5－5－11）式求解$(n')^2+2n'$个未知元素，显然方程的个数小于未知元素的个数，因此在求传递矩阵（目前是传递函数）W（S）的实现时，可以预先设定待求矩阵A，b，C的某些元素。

由$\Psi(A)=0$和Cayley——Hamilton 定理知道，系数$a_0, a_1, \cdots, a_{n'-1}$是矩阵A的特征多项式的系数，因此我们可以建立传递函数W（S）的可控规范形式实现：

$$
A_1=\begin{bmatrix}
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \vdots & I_{n'-1} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n'-1}
\end{bmatrix};
$$

(5—5—12)

$$b_1=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \quad ; \qquad (5\text{—}5\text{—}13)$$

而因为

$$[P_0(A_1)b_1 \vdots P_1(A_1)b_1 \vdots \cdots \vdots P_{n'-1}(A_1)b_1]=I_{n'\times n'}$$

所以由（5－5－11）式得：

$$C_1[P_0(A_1)b_1,\ P_1(A_1)b_1,\ \cdots,\ P_{n'-1}(A_1)b_1]$$

$$=[P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_{n'-1}]$$

因此得

$$C_1=[P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_{n'-1}] \qquad (5\text{—}5\text{—}14)$$

由于关系式（5－5－12），（5－5－13）和（5—5—14）所决定的矩阵 A_1，b_1，C_1 是满足关系式（5－5－11）的，因此，S：[A_1，b_1，C_1] 是传递函数 W（S）所代表的常系数、线性系统的一个实现，由上节的规范形式可知，这个实现是常系数，线性系统的一种可控规范形式，因此又称它是可控实现。

系统 S：[A_1，b_1，C_1] 的状态方程和观察方程为：

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{X}_{n'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n'-1} & & \\ 0 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n'-1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n'}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
Y(t) = [p_0, p_1, \cdots, p_{n'-1}] \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{n'}(t) \end{bmatrix}
\end{cases} \qquad (5-5-15)
$$

由方程（5－5－15）可得到系统的可控实现的模拟结构图，如图5－5－1所示。

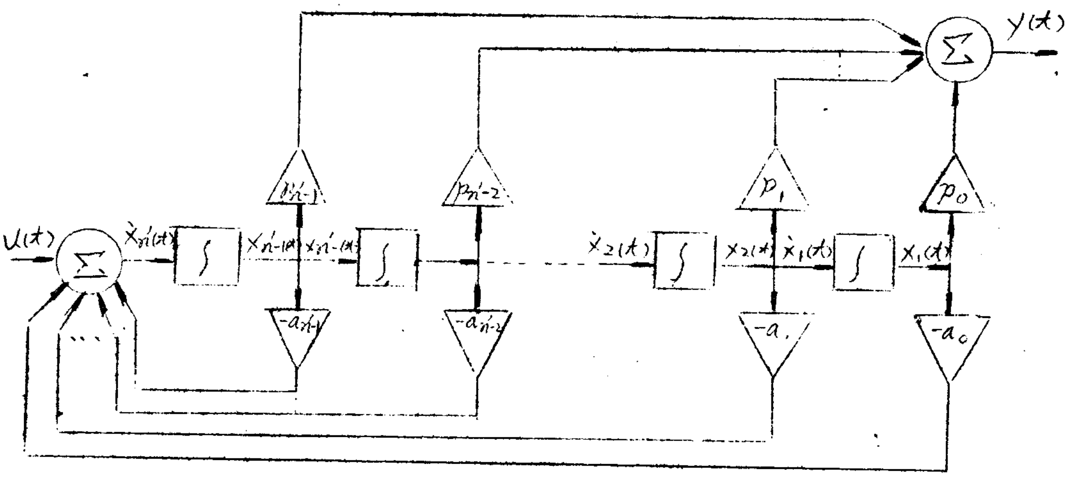

图5－5－1　W（S）的可控实现模拟结构图

5－5－2　常系数、线性系统的可观察实现

显然，类似于常系数、线性系统的可控实现，可建立传递函数W（S）所代表的常系数、线性系统的可观察实现。这时有

$$A_2=\begin{bmatrix} 0 \ \cdots \ 0 & \vdots & -a_0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots & \vdots & -a_1 \\ I_{n'-1} & \vdots & \vdots \\ & \vdots & -a_{n'-1} \end{bmatrix}; \quad (5-5-16)$$

$$C_2=\left[0 \ \cdots \ 0 \ \ 1 \right]; \quad (5-5-17)$$

而因为

$$\begin{bmatrix} C_2P_0(A_2) \\ C_2P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2P_{n'-1}(A_2) \end{bmatrix}=I_{n'}$$

所以由（5－5－11）式得：

$$\begin{bmatrix} C_2P_0(A_2) \\ C_2P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2P_{n'-1}(A_2) \end{bmatrix} b=\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n'-1} \end{bmatrix}$$

因此得：

$$b_2=\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n'-1} \end{bmatrix} \quad (5-5-18)$$

由于关系式（5－5－16），（5－5－17）和（5—5—18）所决定的矩阵A_2，C_2，b_2是满足关系式（5－5－11）的，因此，S：〔A_2，b_2，C_2〕是传递函数W（S）所代表的常系数、线性系统的一个实现。由上节的规范形式可知，这个实现是常系数、线性系统的一种可观察规范形式，因此又称它是可观察实现。

系统S：〔A_2，b_2，C_2〕的状态方程和观察方程为：

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{X}_{n'}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & -a_1 \\ & I_{n'-1} & & \vdots \\ & & & -a_{n'-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{n'}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n'-1} \end{bmatrix} u(t) \\
Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t)t \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{n'}(t) \end{bmatrix}
\end{cases}
\qquad (5\text{—}5\text{—}19)
$$

由方程（5－5－19）可得到系统可观察实现的模拟结，如图5－5－2所示。

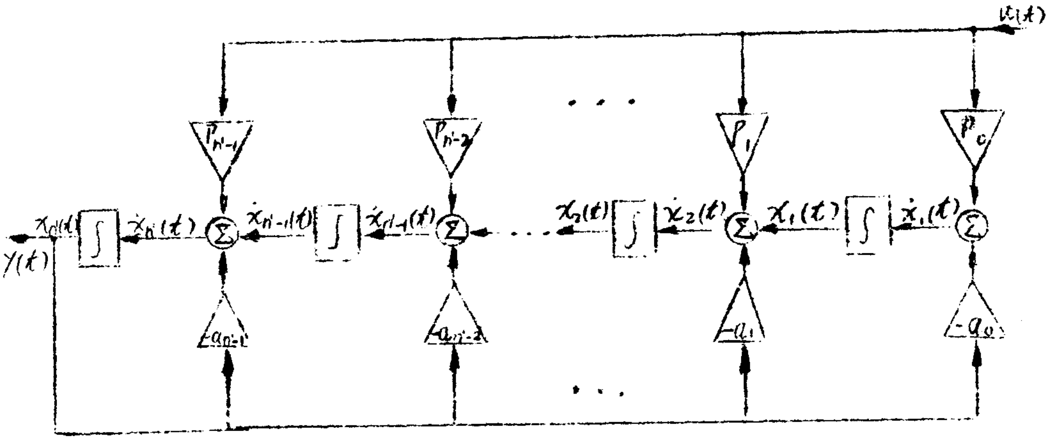

图 5－5－2　W（S）的可观察实现模拟结构图

5－5－3　常系数、线性系统的并联形实现

一、并联可控实现

如果

$$S^{n'}+a_{n'-1}S^{n'-1}+\cdots+a_1S+a_0=\prod_{i=1}^{K}(S-S_i)^{\lambda_i}$$

则可将W（S）展开成部分分式

$$W(S)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\frac{C_{ij}}{(S-S_i)^j} \qquad (5\text{-}5\text{-}20)$$

由（5－5－20）式和描述系统的若唐规范形式可知，系统矩阵A可取为