

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(信号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述 5 - 1 - 30

§ 5 - 2 线性系统的最佳设计	5 - 2 - 1
5 - 2 - 1 最佳设计问题的提出	5 - 2 - 1
5 - 2 - 2 最佳设计的性能指标	5 - 2 - 4
5 - 2 - 3 最佳泸波原理	5 - 2 - 7
一、维纳最佳泸波原理	5 - 2 - 7
二、卡尔曼泸波原理	5 - 2 - 14
5 - 2 - 4 最佳控制原理	5 - 2 - 19
一、确定性系统最佳控制原理	5 - 2 - 19
二、随机性系统最佳控制原理	5 - 2 - 21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5 - 2 - 23
§ 5 - 3 线性系统的基本特性	5 - 3 - 1
5 - 3 - 1 引言	5 - 3 - 1
5 - 3 - 2 线性系统的可观性	5 - 3 - 2
一、系统可观性概念	5 - 3 - 2
二、系统完全状态可观性准则	5 - 3 - 2
三、系统一致可观性概念	5 - 3 - 14
5 - 3 - 3 线性系统的可控性	5 - 3 - 29
一、系统可控性概念	5 - 3 - 29
二、系统完全状态可控性准则	5 - 3 - 30
三、系统完全输出可控性准则	5 - 3 - 39
四、系统一致可控性概念	5 - 3 - 40

6 - 3 - 4 线性系统的稳定性	5 - 3 - 57
一、系统稳定性概念	5 - 3 - 57
1. 系统的描述	5 - 3 - 57
2. 平衡状态	5 - 3 - 58
3. 稳定性概念	5 - 3 - 58
二、李雅普诺夫直接法	5 - 3 - 61
三、线性系统的稳定性准则	5 - 3 - 68
四、线性系统稳定性的一般形式	5 - 3 - 80
五、利用李雅普诺夫函数	
估计系统时间常数的上界	5 - 3 - 83
 § 5 - 4 线性系统的不变量及其规范形式	5 - 4 - 1
5 - 4 - 1 状态矢量的线性变换及	
系统的不变量	5 - 4 - 1
5 - 4 - 2 线性系统的若唐规范形式	5 - 4 - 3
5 - 4 - 3 线性系统的可控规范形式	5 - 4 - 25
5 - 4 - 4 线性系统的可观寔规范形式	5 - 4 - 31
 § 5 - 5 常系数、线性系统的实现问题	5 - 5 - 1
5 - 5 - 1 常系数、线性系统的可控实现	5 - 5 - 1
5 - 5 - 2 常系数、线性系统的可观寔实现	5 - 5 - 7
5 - 5 - 3 常系数、线性系统的并联形实现	5 - 5 - 9
一、并联可控实现	5 - 5 - 9
二、并联可观寔实现	5 - 5 - 13

5 - 5 - 4	常系数、线性系统的串联形实现	5 - 5 - 15
5 - 5 - 5	常系数、线性系统的最小实现	5 - 5 - 21
§ 5 - 6	状态反馈问题	5 - 6 - 1
5 - 6 - 1	反馈问题	5 - 6 - 1
5 - 6 - 2	极点配置问题	5 - 6 - 8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题	5 - 6 - 9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题	5 - 6 - 18
5 - 6 - 3	稳定性问题	5 - 6 - 26
一、	能稳定性	5 - 6 - 26
二、	衰减速度	5 - 6 - 28
三、	减少反馈量	5 - 6 - 29
四、	轨出反馈的稳定性	5 - 6 - 33
5 - 6 - 4	分离性控制问题	5 - 6 - 35
§ 5 - 7	观察能原理	5 - 7 - 1
5 - 7 - 1	引言	5 - 7 - 1
5 - 7 - 2	观察能和“可检测系统”	5 - 7 - 1
一、	观察能构成的基本思想	5 - 7 - 1
二、	观察能和“可检测系统”	5 - 7 - 5
5 - 7 - 3	观察能的基本关系	5 - 7 - 13
5 - 7 - 4	基本观察能	5 - 7 - 26
5 - 7 - 5	降维观察能	5 - 7 - 29

一、单轨入单轨出系统的降维观察口	5 - 7 - 31
二、多轨入多轨出系统的降维观察口	5 - 7 - 39
5 - 7 - 6 用观察口构成状态反馈	5 - 7 - 46
§ 5 - 8 灵敏度分析	5 - 8 - 1
5 - 8 - 1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点，极点偏移间的关系.....	5 - 8 - 1
5 - 8 - 2 比较灵敏度	5 - 8 - 8
5 - 8 - 3 轨道灵敏度函数	5 - 8 - 19
§ 5 - 9 线性系统的对偶原理	5 - 9 - 1
5 - 9 - 1 线性系统的可观测性与 可控性之间的对偶特性	5 - 9 - 1
5 - 9 - 2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5 - 9 - 2
5 - 9 - 3 对偶系统和对偶原理	5 - 9 - 5
5 - 9 - 4 线性系统的对偶关系式	5 - 9 - 7

第六章 最佳沪波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳沪波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳沪波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼沪波砾式	6-2-3
三、卡尔曼沪波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的沪波砾式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的沪波	6-2-28

六、举例	6 - 2 - 44
6 - 2 - 2 连续、线性系统的最佳泸波原理	6 - 2 - 67
一、连续、线性系统的最佳泸波问题	6 - 2 - 67
二、等效的离散、线性系统	6 - 2 - 68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的		
极限情况	6 - 2 - 68
2 等效的离散、线性系统	6 - 2 - 72
三、连续、线性系统泸波的基本标式	6 - 2 - 74
四、举例	6 - 2 - 81
§ 6 - 3 最佳泸波的稳定性和误差分析	6 - 3 - 1
6 - 3 - 1 最佳泸波的稳定性	6 - 3 - 1
一、最佳泸波的稳定性概念	6 - 3 - 1
二、稳定性准则	6 - 3 - 2
6 - 3 - 2 最佳泸波的误差分析	6 - 2 - 8
一、误差协方差矩阵微分方程和		
差分方程的解析解	6 - 3 - 8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解	6 - 3 - 8
2. 误差协方差矩阵差分方程的解析解	6 - 3 - 18
二、误差协方差矩阵的上、下界	6 - 3 - 22
三、误差协方差矩阵的渐近特性	6 - 3 - 33
§ 6 - 4 模型识差分析，最佳泸波的		
发散现象和克服发散的方法	6 - 4 - 1

6 - 4 - 1	模型误差分析	6 - 4 - 1
一、	模型误差分析的一般方法	6 - 4 - 1
二、	特殊情况的讨论	6 - 4 - 6
6 - 4 - 2	泸波的发散现象	6 - 4 - 15
6 - 4 - 3	克服发散的方法	6 - 4 - 16
一、	限定下界法	6 - 4 - 16
二、	状态扩充法	6 - 4 - 20
三、	渐消记(衰减记忆泸波)	6 - 4 - 22
四、	限定记忆泸波	6 - 4 - 31
五、	自适应泸波	6 - 4 - 35

§ 5-5 常系数、线性系统的实现问题

所谓常系数、线性系统的实现问题是：对于给定的传递矩阵 $W(s)$ ，求得相应的常系数，线性系统的状态方程和观察方程：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5-5-1)$$

使得

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (5-5-2)$$

或建立相应的系统模拟结构图。而在所有可能的实现 $S : (A, B, C)$ 中，维数最小者，或在所有的结构图中，积分回路最少者称为最小实现。

下面就讨论单输入单输出系统的实现问题。

5-5-1 常系数、线性系统的可控实现

单输入单输出系统 $S : (A, B, C)$ 的系统方程是

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (5-5-3)$$

因此其传递矩阵是传递函数

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}b \quad (5-5-4)$$

如果设

$$W(s) = \frac{P(s)}{\Psi(s)} \quad (5-5-5)$$

并且

$$\begin{aligned}\Psi(S) &= S^{n^1} + a_{n^1-1} S^{n^1-1} + \dots + a_1 S + a_0 \\ P(S) &= P_{n^1-1} S^{n^1-1} + P_{n^1-2} S^{n^1-2} + \dots + P_1 S + P_0\end{aligned}\quad (5-5-6)$$

则可得到其相应的系统微分方程为：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y(t) + a_0 y(t) \\ = p_{n-1} u^{(n-1)}(t) + p_{n-2} u^{(n-2)}(t) + \dots + p_1 u(t) \\ + p_0 u(t) \quad (5-5-7)$$

因为由方程(5-5-3)得

对(5-5-8)式中各式，依次乘上 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, 1$ 并相加得：

$$\begin{aligned}
& \dot{y}^{(n)}(t) + \dots + a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) \\
& = CA^{n-1}X(t) + CA^{n-1}bu(t) + CA^{n-2}\dot{b}u(t) \\
& \quad + \dots + CA^1\dot{b}u^{(n-2)}(t) + CA^1b^{(n-1)}(t) \\
& \quad + \dots \dots \dots \\
& \quad + Ca_3 A^3 X(t) + Ca_3 A^2 \dot{b}u(t) + Ca_3 A \dot{b}u(t) + Ca_3 b^{(n)}(t) \\
& \quad + Ca_2 A^2 X(t) + Ca_2 A \dot{b}u(t) + Ca_2 b^{(n)}(t) \\
& \quad + Ca_1 A X(t) + Ca_1 \dot{b}u(t) \\
& \quad + Ca_0 X(t) \\
& = C\Psi(A)X(t) + CP_0(A)\dot{b}u(t) + CP_1(A)\dot{b}u(t) \\
& \quad + CP_2(A)\dot{b}u(t) + \dots + CP_{n-1}\dot{b}u^{(n-1)}(t)
\end{aligned} \tag{5-5-9}$$

式中

$$\left\{
\begin{array}{l}
\Psi(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 A + a_0 I \\
P_0(A) = A^{n-1} + \dots + a_3 A^2 + a_2 A + a_1 I \\
P_1(A) = A^{n-2} + \dots + a_4 A^2 + a_3 A + a_2 I \tag{5-5-10} \\
P_2(A) = A^{n-3} + \dots + a_5 A^2 + a_4 A + a_3 I \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
P_{n-1}(A) = I
\end{array}
\right.$$

如果

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(A) = 0 \\ CP_0(A) b = p_0 \\ CP_1(A) b = p_1 \\ \dots \dots \dots \\ CP_{n^1-1}(A) b = p_{n^1-1} \end{array} \right. \quad (5-5-11)$$

则(5-5-9)式与(5-5-7)式就有相同形式，因此，满足关系式(5-5-11)式的A, B, C就是要求实现的系统矩阵。由于所讨论的系统是单输入单输出系统，所以当系统的阶数为 n^1 时，矩阵A是一个 $n^1 \times n^1$ 矩阵，它有 $n^1 \times n^1$ 个元素，b是 $n^1 \times 1$ 矩阵，它有 n^1 个元素，C是 $1 \times n^1$ 矩阵，它有 n^1 个元素，因此要由(5-5-11)式确定A, b, C，也就是要由(5-5-11)式求解 $(n^1)^2 + 2n^1$ 个未知元素，显然方程的个数小于未知元素的个数，因此在求传递矩阵(目前是传递函数)W(S)的实现时，可以预先设定待求矩阵A, b, C的某些元素。

由 $\Psi(A) = 0$ 和Cayley-Hamilton定理知道，系数 $a_0, a_1, \dots, a_{n^1-1}$ 是矩阵A的特征多项式的系数，因此我们可以建立传递函数W(S)的可控规范形式实现：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & I_{n^1-1} \\ 0 & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n^1-1} & \end{bmatrix}; \quad (5-5-12)$$

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (5-5-13)$$

而因为

$$(P_0(A_1)\vec{b}_1; P_1(A_1)\vec{b}_1; \dots; P_{n+1-1}(A_1)\vec{b}_1) = I_{n+1 \times n+1}$$

所以由(5-5-11)式得：

$$\begin{aligned} & C_1(P_0(A_1)\vec{b}_1, P_1(A_1)\vec{b}_1, \dots, P_{n+1-1}(A_1)\vec{b}_1) \\ &= (P_0, P_1, \dots, P_{n+1-1}) \end{aligned}$$

因此得

$$C_1 = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1-1}) \quad (5-5-14)$$

由于关系式(5-5-12), (5-5-13)和(5-5-14)
所决定的矩阵 A_1, \vec{b}_1, C_1 是满足关系式(5-5-11)的，因此，
 $S : [A_1, \vec{b}_1, C_1]$ 是传递函数 $W(S)$ 所代表的常系数、线性系统
的一个实现，由上节的规范形式可知，这个实现是常系数、线性系统
的一种可控规范形式，因此又称它是可控实现。

系统 $S : [A_1, \vec{b}_1, C_1]$ 的状态方程和观察方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & I_{n+1-1} \\ 0 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n+1-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y(t) = (p_0, p_1, \dots, p_{n+1-1}) \quad (5-5-15)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix}$$

由方程 (5-5-15) 可得到系统的可控实现的模拟结构图, 如图 5-5-1 所示。

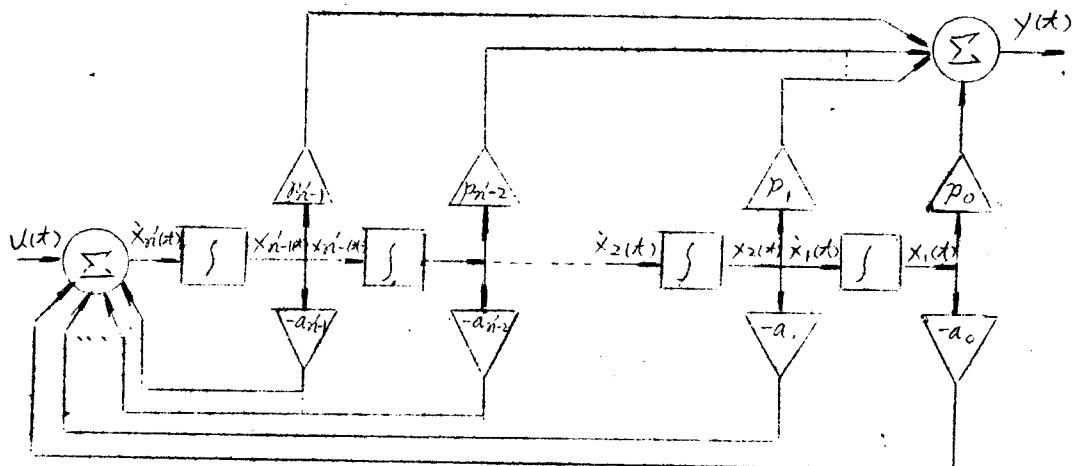


图 5-5-1 $W(s)$ 的可控实现模拟结构图

5-5-6

5-5-2 常系数·线性系统的可观察实现

显然，类似于常系数·线性系统的可控实现，可建立传递函数 $W(s)$ 所代表的常系数·线性系统的可观察实现。这时有

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & : & -a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & : & -a_1 \\ & & & : & \vdots \\ I_{n^2-1} & & & & \vdots \\ & & & & -a_{n^2-1} \end{bmatrix}; \quad (5-5-16)$$

$$C_2 = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]; \quad (5-5-17)$$

而因为

$$\begin{bmatrix} C_2 P_0(A_2) \\ C_2 P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2 P_{n^2-1}(A_2) \end{bmatrix} = I_{n^2}$$

所以由 (5-5-11) 式得：

$$\begin{bmatrix} C_2 P_0(A_2) \\ C_2 P_1(A_2) \\ \vdots \\ C_2 P_{n^2-1}(A_2) \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n^2-1} \end{bmatrix}$$

因此得：

$$b_2 = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n^2-1} \end{bmatrix} \quad (5-5-18)$$

由于关系式(5-5-16), (5-5-17)和(5-5-18)
所决定的矩阵 A_2 , C_2 , b_2 是满足关系式(5-5-11)的,因此,
 $S : [A_2, b_2, C_2]$ 是传递函数 $W(S)$ 所代表的常系数、线性系
统的一个实现。由上节的规范形式可知,这个实现是常系数、线性系
统的一种可观察规范形式,因此又称它是可观察实现。

系统 $S : [A_2, b_2, C_2]$ 的状态方程和观察方程为:

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & -a_1 \\ I_{n+1}-I & & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & -a_{n+1}-1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n+1}(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n+1}-1 \end{array} \right] u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n+1}(t) \end{array} \right] \quad (5-5-19)$$

由方程(5-5-19)可得到系统可观察实现的模拟结
如图5-5-2所示。

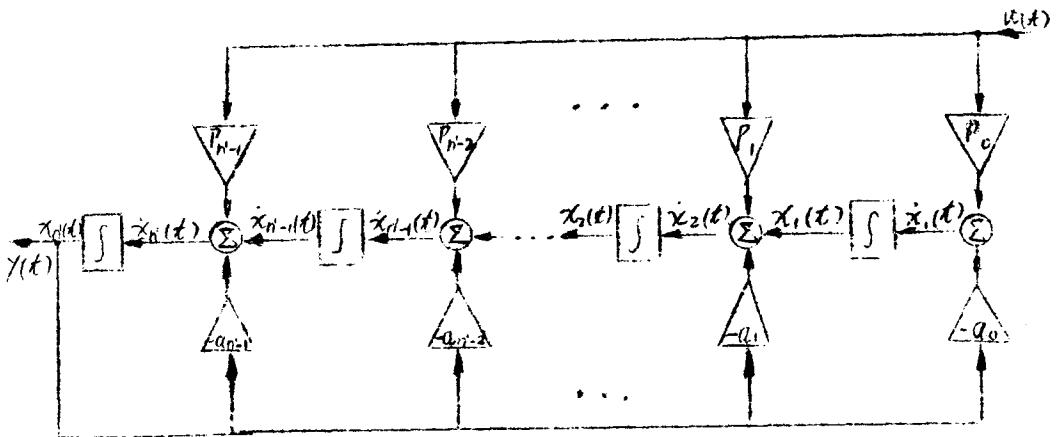


图 5-5-2 $W(S)$ 的可观察实现模拟结构图

5-5-3 常系数、线性系统的并联形实现

一、并联可控实现

如果

$$S^{n!} + a_{n!-1} S^{n!-1} + \dots + a_1 S + a_0 = \prod_{i=1}^K (S - s_i)^{\lambda_i}$$

则可将 $W(S)$ 展开成部分分式

$$W(S) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{c_{ij}}{(S - s_i)^j} \quad (5-5-20)$$

由 (5-5-20) 式和描述系统的若唐规范形式可知，系统矩阵 A 可取为

5-5-9