

中国科学技术大学

硕士学位论文摘要汇编

第二辑

(八一级)



中国科学技术大学研究生部编印

1986

前 言

我校八一级研究生已有 100 人完成了课程学习和学位论文，取得了优良成绩，通过学位论文答辩和学位评定委员会审议决定，授予他们硕士学位。

为了进行学术交流，促进研究生的研究成果的推广和应用；为了广泛征求同行专家的评议和指导，以提高我校研究生的培养质量和论文水平，现将我校八一级研究生的硕士学位论文摘要汇编成册。

热诚欢迎大家批评指正，并对我们今后的工作提出宝贵意见。

中 国 科 技 大 学

研 究 生 部

1985 年

THEORY AND APPLICATIONS OF SINGULAR SYSTEMS IN GENERALIZED STATE-SPACE

(ABSTRACT)

By Chang-Sheng Kang
Advisor Nien-Tsien Zhang
Department of System & Management Science
University of Science & Technology of China

In this paper, the following system is studied:

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu + Dq \\ z = Cx \end{cases}$$

where $A, R^n \rightarrow R^n; B, R^n \rightarrow R^n; C, R^n \rightarrow R^1; D, R^1 \rightarrow R^n; u, z$ and q are input, output and arbitrary disturbance, respectively. E is a singular constant matrix.

First of all, Cobb's results on system space decomposition, controllability, observability, state-feedback and pole assignment are summarized. Then, 1) the concepts of conventional stability and non-conventional stability are introduced; 2) the concept of the (A, B) -invariant subspace with respect to E is introduced, and based on this concept, the sufficient and necessary conditions for that the disturbance decoupling problem (DDP) of the singular system has at least one solution are given; 3) the time-optimal problem for singular systems is studied.

答辩委员会名单

主席	何善育	付研究员
	白方周	付教授
	涂其渊	·
	张念村	·
	孙德敏	讲 师

目 录

基础数学 Weierstrass 公式及其应用	邓 敏 (1)
计算数学离散特征值问题及非线性微分差分方程	程 艺 (5)
非协调有限元收敛性的研究	蔡 伟 (10)
J 混合对稀土离子 $f \rightarrow f$ 跃迁强度的影响	陈一民 (13)
三角对称晶场下 d^1 电子组态的 g 因子和零场分裂普遍公式及其应用	熊 权 (18)
含过渡族离子 (Ni^{2+} , V^{4+} , Cr^{3+}) 晶体的晶体场研究	洪小雨 (20)
非晶态快离子导体 $(AgI)_{0.91}-(Ag_2O-B_2O_3)_{0.09}$ 低温物性研究	郑 庆 (24)
位错中心的正电子湮没研究	龔季强 (29)
大角度晶界的正电子湮没研究及金属中正电子扩散	周先意 (33)
磨擦介子的唯象模型	吴自玉 (37)
相对论多粒子体系类空方程	王安民 (42)
中子物理的若干问题	吴 属 (50)
激光系统的分岔、混沌与双稳现象	王海达 (53)
激光体系在混沌状态下的统计性质	史济聪 (57)
Lotka-Volterra 模型的临界行为	吴志宏 (61)
反应扩散系统的半唯象理论	姚德民 (66)
在 PETRA 环上通过 mark j 观测器分析强子喷注和确定强耦 合常数 α_s	吴宏工 (69)
正电子三光子湮灭角分布的测量	游 科 (73)
较小动量转移下, 光子的相干散射	方渡飞 (80)
正负电子三光子湮灭中的线极化测量	贾启卡 (83)
分布式多微机系统	胡化成 (88)
多丝正比室阴极延迟线耦合读出系统	安 琪 (91)
在 PDP-11/28 计算机上建立绘图系统	杨 玲 (94)
分布式核信息处理系统的研制	裴 星 (97)
电子中微子质量测量的准备	赵政国 (99)
在科大 30MeV 电子直线加速器上进行物理研究的准备工作	郭学哲 (104)
反常切伦柯夫辐射的实验研究	梁荣庆 (107)
电子储存环慢加速过程中弯转磁铁的涡流效应	裴国璽 (110)
合肥 800MeV 电子储存环波荡器模型的研制	刘建杨 (113)
以连续 He-Ire 激光为光源的 mach-Zehnder 干涉仪测等离子体 电子密度	孙宏桥 (117)

托卡马克上的电磁测量和数据采集处理	肖持进 (126)
微通道板对软射线效率的绝对测量	陈 晶 (129)
HER 装置上的逆磁测量和 ECRH 结果分析	张大鸣 (135)
中性粒子束注入器中束流成份的实验研究	刘万东 (140)
离子声波和离子声孤立子的实验研究	蒋 勇 (145)
CT-6B 装置上反常电子热导测量	李唯强 (151)
用模-模耦合方法求弱湍等离子体的反常扩散系数	朱莓莓 (160)
热电子等离子体宏观不稳定性的研究	刘亚东 (163)
大角度散射与波驱动电流	杨维敏 (167)
用 Radon 变换处理非圆截面 plasma 性质的测量	李 定 (173)
非圆截面 Tokamak 中轴对称垂直位移的反馈控制	徐 鹏 (175)
关于 Langmuir 波模波耦合孤立子的稳定性	戴文龙 (175)
非圆截面 Tokamak 中轴对称模的反馈稳定辅助加热对 Tokamak 气球模的稳 定作用	张左阳 (181)
简单磁镜上微波产生等离子体的交换不稳定性的研究	郑家林 (187)
中性粒子飞行时间谱仪的标定	徐纪华 (189)
镍基催化剂上变换——甲烷化反应的程序升温研究	徐小云 (197)
稀土鈳钨型催化剂的催化活性和 C_2H_4 氧化反应机理	于 敏 (201)
二氯一氟甲烷多光子解离浓集器的研究	袁 鹏 (206)
镍基催化剂上变换——甲烷化反应的红外光谱研究	李锡青 (209)
AlH_3 型化合物的紫外激光光解多光子电离	倪图强 (213)
表面增强拉曼散射 (SERS) 的电荷迁移调制模型	万超志 (216)
表面 Raman 增强效应的实验研究	高小平 (221)
计算机在双波长及导数分光光度法中的应用	吴家齐 (227)
化学信息智能处理系统的设计与组织	姜卫民 (233)
复杂体系水溶液热力学数据库的建立	王沛明 (237)
酸碱平衡智能信息处理系统的研制及应用	姜 群 (241)
双波长分光光度法的计算机研究——二组份混合体系的分析	李 滨 (244)
高分子金属络合物催化剂的合成及性能研究——用于加氢和氧化反应	白如科 (250)
PET-PCl 多嵌段共聚物组成不均一性及结晶过程和形态的研究	诸 初 (253)
用于加氢和醛化的高分子催化剂的研究	郭湘瑶 (256)
分子介质中的正子素化学	孙 群 (261)
宇宙常数	张正平 (265)
俯冲板块内的应力场	苏维加 (267)
日冕瞬变的数值研究	王爱华 (271)
中国陆壳元素丰度的计算模型	李 峰 (274)
广西大厂龙头山礁灰岩中锡矿床的物质成分及其地球化学研究	陈旗新 (278)
黄铁矿的成因矿物学研究	杨海涛 (281)

R.A. 密立根——二十世纪上半叶美国杰出的物理学家和科学组

织者	张 炜 (284)
约瑟夫, 亨利及其在美国科学史上的地位	解道华 (287)
大萧条前后的美国物理学界	赵佳苓 (290)
阿拉伯科学家伊本·海赛水的光学及其与中国宋元光学之比较	徐启平 (293)
膨胀宇宙的发现	赵良庆 (296)
晚商中原青桐的矿料来源研究	金正耀 (299)
廻转体扭转的弹塑性解——边界无法对应力函数的实施	雷小燕 (301)
短纤维增强对聚碳酸脂非线性性质的影响	杨黎明 (305)
环氧树脂在高应变率下的时温统效和热粘弹性本构方程	徐大本 (309)
透射和反射型多火花摄影系统及其在动态实验力学中的新应用	韩 雷 (312)
有限滑动体系的随机响应——近似方法及数字模拟	卢耘耘 (315)
跨音速非定常流的局部线化面元法	
——旋转体与任意截面伸长体	程健宇 (318)
等离子体手术刀的研制及在医外科应用的前景	张 浩 (321)
圆波导 $H_{0n}^e \leftrightarrow H_{0n}^o$, $H_{1n}^e \leftrightarrow H_{1n}^o$ 波型变换器	陈建耀 (327)
开放波导的有限元分析	徐云生 (330)
毫米波混频管的特性分析及 6mm 集成平衡混频器的初步研制	孙崑泉 (332)
LP 模耦合波理论及应用	黄卫平 (334)
短波车载天线的计算机辅助分析与实验研究	林福江 (341)
信号, 电路与系统 BF—1 脑电反馈系统的研制和脑电 Alpha 频段反馈研究	
.....	陈为民 (344)
利用陆地卫星多光谱数据进行林业资源分类调查的研究	郑勤奋 (347)
相关噪声中的 Robust 检测	孙卫千 (351)
雷达自适应杂波滤波新方法研究	王维嘉 (354)
合成孔径雷达信号数字处理	许 蔚 (356)
TRDS 的优化器的设计和实现	阮 超 (363)
关系数据库管理系统的研究存贮系统和代码生成	朱云州 (365)
形式化的数据安全性模型及其在关系数据库管理系统中的应用	于庆勋 (368)
关系窗口及实现	米培伟 (373)
上滑坡上线性系统及应用	余星火 (376)
连续时间 MRAS 的研究	武俊杰 (379)
人口系统的最优控制	赵清华 (383)
隐式极点配置自校正调节器	尤建中 (380)
不确定系统的 Robust 稳定性	孙 静 (390)
广义状态中的奇异系统理论及其应用	康长生 (395)

Weierstrass 公式及其应用

摘 要

专 业: 基础数学

研究生: 邓敏

导 师: 彭家贵

众所周知,经典的 Schwarz 定理说: 如果在一极小曲面 Σ 上含有一条直线 G ,则 Σ 关于直线 G 为反射对称; 如果一极小曲面 Σ 与一平面 E 垂直相交,则 Σ 关于 E 为镜面对称。

一般说来,在给定的极小曲面上判断是否存在对称直线或对称平面是相当困难的。本文的目的之一是利用极小曲面的 Weierstrass 表示以及对合变换给出一种判别方法,并由此讨论了经典的极小曲面的对称性以及 Meeks 彭家贵老师构造的极小曲面的对称性。

并且,我们还给出了一类极小曲面,法向量刚好不取三个方向,讨论了他们的对称性。

本文的主要定理是:

定理 1 设 $Jz = \frac{1}{\bar{z}}$ 为 (G) 上的对合变换。 $D = G - \{P_1, \dots, P_k, JP_1, \dots, JP_k\}$ 如果 f, g 满足条件:

$$\begin{aligned} g(Jz) &= Jg(z) \\ \overline{f(Jz)} &= -z^2 f(z) g^2(z). \end{aligned} \quad (1)$$

则由 f, g 生成的极小曲面 X 有对称直线 $X(e^{i\theta})$ 。

如果 f, g 满足条件:

$$\begin{aligned} g(Jz) &= Jg(z) \\ \overline{f(Jz)} &= z^2 f(z) g^2(z) \end{aligned} \quad (2)$$

则由 f, g 生成的极小曲面 X 有对称平面 $X_c = \text{常数}$ 。

进一步,我们还发现某些曲面具有非常好的对称性。为此我们得出了一般的旋转对称,关于原点对称的定理。

在第二部分我们讨论了广义的 Weierstrass 公式,即中曲率 H 不为零的情形。很自然,我们提出的第一个问题必然是能否给出一个统一的 Weierstrass 公式,包含 H 为零与 H 不为零的情况。我们在本文中指出了答案是肯定的,并且给出了如下的公式:

定理 2 设 Σ 是一个二维单连通光滑流形

$H: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 函数, $\phi: \Sigma \rightarrow S^2$ 是光滑映射, H, ϕ 满足微分方程:

$$H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

那么 ϕ 是某个曲面的 Gauss 映射, 更为精确地, 我们可以写出曲面的坐标函数为:

$$\begin{aligned} x_1 &= Re \int_0^z \frac{(-1)}{(H+\bar{\phi})} \frac{(1-\phi^2)}{(1+\phi\bar{\phi})^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_1, \\ x_2 &= Re \int_0^z \frac{(-i)}{(H+\bar{\phi})} \frac{(1+\phi^2)}{(1+\phi\bar{\phi})^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_2, \\ x_3 &= Re \int_0^z \frac{(-1)}{(H+\bar{\phi})} \frac{\phi}{(1+\phi\bar{\phi})^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_3. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 H 为该曲面的中曲率, $\phi = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}$.

在 1841 年 Belauay 发现了构造常中曲率曲面的方法: 即在平面的一条直线上无滑动地滚动一个椭圆, 其焦点的轨迹在这条直线为旋转轴而得到的旋转面是常中曲率的。并且 Belauay 对该问题的反问题做了肯定回答, 项武义先生对此做过精采证明。因而我们进一步感兴趣的是: 可否用广义的 Weierstrass 公式给 $\mathbb{R}^3$ 中所有的旋转的常中曲率曲面一个统一的表达式, 我们指出答案是肯定的并且证明了定理:

定理 3 令 M 是一个二维单连通的光滑流形, 并且函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 满足条件:

$$f' = \left(f^2 - \left(C + \frac{H}{2} f^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

其中 C, H 是任意常数。

$$\phi = e^{i\theta} \cdot \frac{(f' + f)}{C + \frac{H}{2} f^2} \quad (6)$$

那么由广义的 Weierstrass 公式可知 ϕ 与 H 决定了一个以 H 为中曲率的曲面。则该曲面是旋转面。反之, 任意以 H 为中曲率的旋转曲面, 其 Gauss 映射为 ϕ 。

Abstract

From the classical Schwarz Theorem we know that if there is a line G on a minimal surface Σ then the Σ is symmetric minimal surface, the G is symmetric axis. If a minimal surface Σ and a plane E meet at right angles, then the Σ is symmetric minimal surface the E is symmetric plane.

It is difficult to say whether there are symmetric lines on the minimal surface. One purpose of this paper is to use the Weierstrass Formula of minimal surface. We prove the following theorem which is a way of judgment.

Theorem 1 Let $J_2 = \frac{1}{2}$, $D = C - \{P_1, \dots, P_n, JP_1, \dots, JP_n\}$, if f, g satisfy

$$\begin{aligned} g(Jz) &= Jg(z) \\ \overline{f(Jz)} &= -z^2 \overline{f(z)} g^2(z) \end{aligned} \quad (1)$$

then we obtain a minimal surface X by f, g , and there is a symmetric line $X(e^{i\theta})$ on the X .

If f, g satisfy

$$\begin{aligned} g(Jz) &= Jg(z) \\ \overline{f(Jz)} &= z^2 \overline{f(z)} g^2(z) \end{aligned} \quad (2)$$

then we obtain a minimal surface X by f, g , and there is a symmetric plane $X_1 = \text{Constant}$.

We study the Generalized Weierstrass Formula, too. It is that the formula for the surface of prescribed mean curvature. It is natural to ask whether we get a unified formula which contain H is not zero and H is zero. We say the answer is true. Thus we have the following representation formula.

Theorem 2 Let Σ is a simple connected 2-dimensional smooth manifold and $H; z \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^1 -function. Let $\Psi: \Sigma \rightarrow S^2$ be a smooth mapping. We assume Ψ satisfies the differential equation for the above H . That is

$$H \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial \Psi}{1 + \phi \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \quad (3)$$

Then Ψ is a Gauss map of some surface: more precisely if we put

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Re} \int_0^z \frac{(-1)}{(H + \Psi)} \cdot \frac{(1 - \Psi^2)}{(1 + \Psi \Psi)^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_1 \\ x_2 &= \text{Re} \int_0^z \frac{(-i)}{(H + \Psi)} \cdot \frac{(1 + \Psi^2)}{(1 + \Psi \Psi)^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_2 \\ x_3 &= \text{Re} \int_0^z \frac{(-1)}{(H + \Psi)} \cdot \frac{\Psi}{(1 + \Psi \Psi)^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) dz + C_3 \end{aligned} \quad (4)$$

then $X = (x_1, x_2, x_3)$ is a branched surface such that the mean curvature is H . ϕ is $\frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - i h_{12}$

We study rotational symmetric hypersurfaces of constant mean curvature in Euclidean 3-space $\mathbb{R}^3$. We prove the following theorem which is the application of generalized Weierstrass Formula. We put formula 11 and ϕ which contains all rotational symmetric surface of constant.

Theorem 3 Let M be a simple connected 2-dimensional smooth manifold and $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy

$$f' = \left(f^2 - \left(c + \frac{H}{a} f^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

H, c is constant.

离散特征值问题及非线性微分差分方程

(摘 要)

专 业 计算数学

研究生 程 艺

导 师 李翔神 教授

本文的研究对象是“孤立子及散射理论”中离散型特征值问题和非线性微分差分方程，全文共分三个部分。

作者是在导师李翔神教授的精心指导和热情鼓励下从事这项研究的。谨此深表感谢。

本文属于中国科学院科学基金资助的课题。

第一部分 一类离散特值问题的反问题

这部分讨论了下列一类特征问题：

$$U_{n+1} = (U_n z + V_n z^{-1} + M_n) U_n \quad (1.1)$$

其中 z 是特征参数 $U_n = \begin{pmatrix} U_n^1 \\ U_n^2 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a_n & b_n \\ c_n & 1-a_n \end{pmatrix}, \\ V_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a_n & -b_n \\ -c_n & 1+a_n \end{pmatrix}, \\ M_n &= \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & -x_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$a_n, b_n, c_n, x_n, y_n, z_n$ 满足：

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n c_n &= 1 \\ a_n x_n + \frac{1}{2} b_n z_n + \frac{1}{2} c_n y_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

这种新的特征值问题，含了至今人们已研究过的下列两种特征值问题：

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} Z & Q_n \\ R_n & Z^{-1} \end{pmatrix} U_n \quad (1.4)$$

$$U_{n+1} = \left[\frac{Z+Z^{-1}}{2} I + \frac{Z-Z^{-1}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_n & \sin \theta_n \\ \sin \theta_n & -\cos \theta_n \end{pmatrix} \right] U_n \quad (1.5)$$

这里 I 是单位矩阵。

从 (1.5) 还可以导出一种相应于下列连续的特征值问题:

$$\varphi_x = -i\xi S\varphi; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & -S_1 \end{pmatrix}, \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1 \quad (1.6)$$

的离散形式

$$U_{n+1} = \left[\frac{Z+Z^{-1}}{2} I + \frac{Z-Z^{-1}}{2} S_n \right] U_n \quad (1.7)$$

其中

$$S_n = \begin{pmatrix} S_n^1 & S_n^2 + iS_n^3 \\ S_n^2 - iS_n^3 & -S_n^1 \end{pmatrix}, \quad (S_n^1)^2 + (S_n^2)^2 + (S_n^3)^2 = 1$$

最后给出了分别对应于 (1.6) 和 (1.7) 的单孤立子之间的联系。

第二部分 离散形式的规范变换, 贝克隆变换

和非线性叠加公式

这一部分的主要内容是关于离散特征值问题:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} Z & \theta_n \\ R_n & Z^{-1} \end{pmatrix} U_n, \quad U_n = \begin{pmatrix} U_n^1 \\ U_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

和与 (2.1) 相联系的微分差分方程:

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ -\theta_{n+1} \end{pmatrix} = \omega(L) \begin{pmatrix} R_n \\ \theta_n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

其中 L 是一个差分-求和算子:

$$L = \begin{pmatrix} E^- - R_{n+1} \Lambda_n J_n(\theta_1) - R_n S_n^-(\theta_1), & R_{n+1} \Lambda_n J_n(R_1) + R_n S_n^+(R_1) \\ -\theta_{n+1} \Lambda_n J_{n+1}(\theta_1) - \theta_n S_{n+1}^-(\theta_1) & E^+ + \theta_{n+1} \Lambda_n J_{n+1}(R_1) + \theta_n S_{n+1}^+(R_1) \end{pmatrix}$$

$$E^+ x_n = x_{n+1}, \quad J_n(z_j) y_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{z_j y_j}{\Lambda_j}, \quad \Lambda_n = 1 - \theta_n R_n.$$

$\omega(L)$ 是关于 L 的有理多项式: $\omega(L) = \sum_{j=-k}^k a_j L^j$.

的规范变换, Bäcklund 变换和非线性叠加公式, 并且用一种新的方法得到方程 (2.2) 无穷多个守恒量, 这些守恒量分别对应的守恒流有如下关系:

$$T_{i+1}'' = \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} T_i'' + R_{n+1} \theta_n \sum_{i=n+2}^{+\infty} T_i'', \quad T_0'' = \theta_n R_{n+1}. \quad (2.3)$$

其守恒量就是 $a_j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^j$. 用这种方法去求守恒量要比目前已有的方法更完善.

第三部分 关于离散的 Ablowitz-Ladik

特征值问题的研究

在这一部分中, 对离散的 Ablowitz-Ladik 特征值问题

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} Z & \bar{Q}_n \\ R_n & Z^{-1} \end{pmatrix} U_n \quad (3.1)$$

和它的推广形式

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} Z & \theta_n \\ R_n & Z^{-1} \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 0 & S_n \\ T_n & 0 \end{pmatrix} U_n \quad (3.2)$$

之间及它们各自相应的非线性微分差分方程之间的联系

记分别对应于 (3.1), (3.2) 的散射数据如下:

$$\bar{S} = \left\{ \frac{B}{A}(Z), \frac{\bar{B}}{\bar{A}}(Z), C_i, \bar{C}_i, \pm Z_i, \pm \bar{Z}_i, i=1 \cdots N'_1, j=1 \cdots N'_2 \right\} \quad (3.3)$$

$$S = \left\{ \frac{b}{a}(Z), \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(Z), C_i, \bar{C}_i, \xi_i, \bar{\xi}_i, i=1 \cdots N_1, j=1 \cdots N_2 \right\} \quad (3.3)$$

分别对应于 (3.1) (3.2) 的特征函数的演化方程如下

$$\bar{U}_{n+1} = \bar{N}_n \bar{U}_n, \quad (3.4)$$

$$U_{n+1} = N_n U_n. \quad (3.5)$$

本部分主要结果有:

定理 1. 若两组位势 $(\bar{Q}_n, \bar{R}_n), (\theta_n, R_n, S_n, T_n)$ 有如下关系

$$\bar{Q}_n = \begin{cases} \theta_n & k=2n \\ S_n & k=2n+1, \end{cases} \quad \bar{R}_n = \begin{cases} R_n & k=2n \\ T_n & k=2n+1. \end{cases} \quad (3.6)$$

则 $\bar{S}, S$ 之间满足

$$\left. \begin{aligned} N'_1 &= N_1, \quad N'_2 = N_2, \\ \{Z_i, i=1 \cdots N'_1\} &= \{\xi_i, i=1 \cdots N_1\}, \\ \{\bar{Z}_i, i=1 \cdots N'_2\} &= \{\bar{\xi}_i, i=1 \cdots N_2\}, \\ \{C_i, i=1 \cdots N'_1\} &= \left\{ \frac{1}{2} \xi_i^{-1} C_i, i=1 \cdots N_1 \right\}, \\ \{\bar{C}_i, i=1 \cdots N'_2\} &= \left\{ \frac{1}{2} \bar{C}_i, i=1 \cdots N_2 \right\}, \\ \frac{B}{A}(Z) &= Z^{-1} \frac{b(Z)}{a(N_1)}, \quad \frac{\bar{B}}{\bar{A}}(Z) = Z \frac{\bar{b}(Z)}{a(N_2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

定理 2 若 $\bar{S}$, S 满足关系 (3.7), 则它们分别恢复的位势 $(\bar{Q}_n, \bar{R}_n), (\theta_n, R_n, S_n, T_n)$ 满足 (3.6)。

定理 3. 若 $\bar{Q}_n, \bar{R}_n$ 满足 (3.6) N_n 满足方程

$$M_{n+1} = N_{n+1} M_n - M_n N_n, M_n = \frac{1}{1 - S_n T_n} \begin{pmatrix} Z + R_n S_n & \theta_n + Z^{-1} S_n \\ \bar{R}_n + Z T_n & Z^{-1} + \theta_n T_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

定义 $\bar{N}_n$ 如下

$$\bar{N}_{n+1}(Z) = - \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{A_{i+1}}{A_i} I + \rho(Z) N_n(Z^2) \rho(Z) \quad (3.9)$$

$$\bar{N}_{n+1}(Z) = \begin{pmatrix} Z & \theta_n \\ \bar{R}_n & Z^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z & \theta_n \\ \bar{R}_n & Z^{-1} \end{pmatrix} \bar{N}_n(Z) \begin{pmatrix} Z & \theta_n \\ \bar{R}_n & Z^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

这里 I 为 2×2 单位矩阵 $P(Z) = \begin{pmatrix} Z^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Z^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

则 $\bar{N}_n$ 满足:

$$\bar{M}_{n+1} = \bar{N}_{n+1} \bar{M}_n - \bar{M}_n \bar{N}_n, \bar{M}_n = \begin{pmatrix} Z & \bar{Q}_n \\ \bar{R}_n & Z^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

定理 4. 若两组位势有关系 (3.6) $\bar{N}_n$ 满足方程 (3.10) 定义 N_n 如下:

$$N_n(Z) = \rho^{+1}(Z^{\frac{1}{2}}) \bar{N}_n(Z^{\frac{1}{2}}) \rho(Z^{\frac{1}{2}}) + \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{A_{i+1}}{A_i} I. \quad (3.11)$$

则 $N_n(z)$ 满足方程 (3.8)。

定理 5. 设 $\rho(z), \omega(z)$ 分别为 (3.1), (3.2) 所联系的 2—位势和 4—位势非线性方程的色散关系, 则当 $\bar{Q}_n, \bar{R}_n, (\theta_n, R_n, S_n, T_n)$ 满足 (3.6) 时有

$$\rho(Z) = \omega(Z^2) \quad (3.12)$$

最后指出 4—位势的非线性微分差分方程的 Cauchy 问题可化为 2—位势的非线性方程的 Cauchy 问题。

ON DISCRETE EIGENVALUE PROBLEM AND NONLINEAR DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS*

CHENG YI**

(China University of Science and Technology)

ABSTRACT

1. A Discrete Version of the Inverse Scattering Problem

A novel discrete eigenvalue problem is discussed. One soliton solution of

discrete spin chain equation is given and a connection between discrete and continuous One-solitons of spin chain equation is worked out.

II. The Discrete Version of Gauge Transformation, Backlund Transform and a Nonlinear Superposition Formula

The discrete version of gauge transformation, Backlund transformation, the commutation property of BTs and a nonlinear superposition formula for a class of nonlinear differential-difference equations is discussed in detail. Soliton solution and conserved quantities are worked out with a new method.

I. On Discrete Ablowitz-Ladik Eigenvalue Problem

The relations between two kinds of discrete A-L eigenvalue problem (discrete forms of A. K. N. S. -Z. S. eigenvalue problem derived by Ablowitz and Ladik) - one includes two potentials, another includes four potentials - are discussed fully.

*The Projects Supported by the Science Fund of the Chinese Academy of Sciences.

** The author would like give his sincere thanks to professor Li Yi Shen for his encouragement and useful instructions.

答辩委员会组成:

主席	屠规彰	研究员
委员	曹策问	付教授
	陈登远	讲 师
	李翊神	教 授

非协调有限元收敛性的研究

专 业 计算数学

研究生 蔡 伟

导 师 石钟慈

摘 要

本文讨论了几种非协调元的收敛性问题, 全文共分三部分:

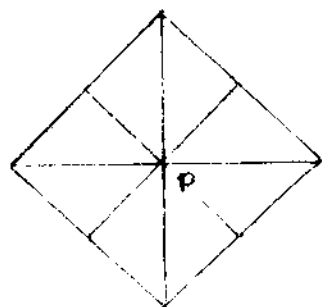
第一部分: Zienkiewicz 三角板元的收敛问题

第二部分: 二个非协调膜元的收敛

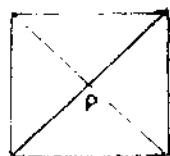
第三部分: Adini 板元在组合平行四边形网格上的收敛性。

第一部分: Zienkiewicz三角板元的收敛

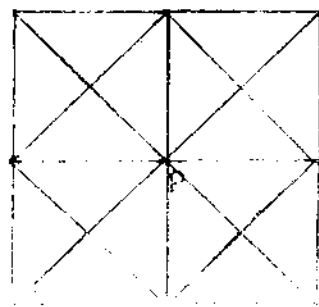
尽管非协调元在实际计算中的高精度性, 关于它的收敛原理和各种收敛现象到至今仍然是个疑团。最有名的例子是 Zienkiewicz [1] 在 1965 年首先提出, Strang 于 1972 年又重新强调的一个例子: Zienkiewicz 三角板元在 Union Jack 部分网格的奇异收敛现象。本文的有限元刚度方程出发, 找到在 Union Jack 网格 (网格 c) 上的差分格式 (事先将网格型的中点上未知量消除!), 然后找出与之相容的微分方程, 及形式如下 (假设原求解问题为: $\Delta^2 u = f$):



网格 A



网格 B



网格 C (Union Jack)

$$\Delta^2 U = C(\sigma) f$$

其中 $C(\sigma)$ 为常数, $C(\sigma) = \frac{54(7-2\sigma)}{(371-120\sigma-3\sigma^2+2\sigma^3)}$, σ 为泊松常数, $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$.

从所得到的微分方程的形式可以看出为什么 Zienkiewicz 在网格 c 上有奇异的收敛现象。事实上, 此时有限解是逼近另一微分方程。(这是非协调元的一个特征)。

第二部分: 二个非协调膜的收敛

(一): 任意四边形六参数 $Qp\sigma$ 的收敛。

六参数非协调 Wilson 元是一很重要的非协调元。但在任意四边形条件下, 不满足 Irons 的分布检查。本文证明 E. Wachspress [3] 1978 年构造的一个非协调六参元 $Qp\sigma$, 通过广义分布检查, 并给出收敛阶。得到与平行四边形下 Wilson 元一样好的精度。

$$\|U - U_h\|_{1,\Delta} = O(h); \|U - U_h\|_{0,\Delta} = O(h^2).$$

(二) 一完全二次多项式三角形非协调元。

由于三角形三边上的六个二次 Gauss 点, 不能唯一地确定一二次多项式, Ferfin [4] 在 1982 年利用一个附加的内部积分限制构造了一完全二次非协调膜元, 并得到了很好的数值结果。本文证明此元是通过广义分布检查的, 并得到了二次收敛精度。

$$\|U - U_h\|_{1,\Delta} = O(h^2),$$

第三部分: Adini 板元在组合网格上的收敛性

Adini 元有很高的精确性, 但及应用范围受网格剖分的限制。当网格不是一致平行四边形剖分时, Adini 元不通过 Irons 的分片检查。本文在有限组平行四边形剖分的组合网格下证明了 Adini 元通过广义分片检查, 并得到误差估计。

$$\|U - U_h\|_{2,\Delta} \leq O(h^{1/2}).$$

参 考 文 献

- [1] Bazilevsky, G. P.; Cheung, Y. K.; Irons, B. M.; Zienkiewicz, O. C. (1965). Triangular Elements in Bending — Conforming and Nonconforming Solutions. In Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A. F. B. Ohio
- [2] Strang, G.; Fix, G. J. (1973) A Analysis of the Finite Element Method PP 205 Prentice-Hall Engle Wood Cliffs
- [3] Wachspress, E. L.: Incompatible Quadrilateral Basis Functions Int. J. Numer. Meth. Eng. 12 PP 589—595 (1978)
- [4] Fortin M.; Soulie, M.: A Nonconforming Piecewise Quadratic Finite Element on Triangles Int. J. Numer. Meth. Eng. 19 PP 505—520 (1983)