原考研数学命题组组长
清华大学胡金德教授作序并推荐

Spark◆星火书业

2007考研数学备考教材

# 8年考研 3年模拟

BANIANKAOYANSANNIANMONI

8年考研真题　准确透视命题规律
3年分类模拟　权威把握考研趋势
系统复习理念　全线突破数学难关

主编　考研数学资深辅导专家　张天德教授

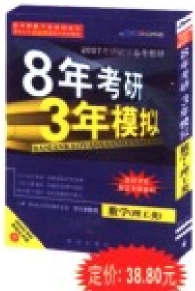
答案全解全析

新华出版社

8年考研 3年模拟
BANIANKAOYANSANNIANMONI

责任编辑/白玉　刘广军
封面设计/星火视觉设计中心

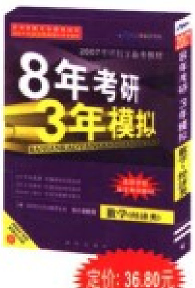
## 2007星火考研数学系列丛书




### 8年考研3年模拟(理工类)

本书是一本理工类考研学生备考数学的教材，由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成。

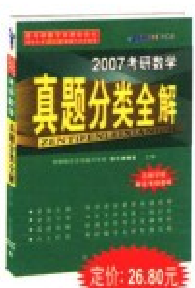
8年考研，优化组合1998-2005年考研数学试题，麻雀式剖析考研真题命题规律；详尽分析考研数学命题规律，努力探究考研数学突破方法；全面总结考研数学所有知识点，以图表形式讲解更加清晰；精选2003-2005年考研数学优秀模拟试题，按照考研题型严格编排，准确把握三年模拟跳动脉搏；基本概念、基本公式和基本方法夯实基础，巩固所学；权威规范解答试题，全面详尽解析试题。




### 8年考研3年模拟(经济类)

本书是一本经济类考研学生备考数学的教材，由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成。

8年考研，优化组合1998-2005年考研数学试题，麻雀式剖析考研真题命题规律；详尽分析考研数学命题规律，努力探究考研数学突破方法；全面总结考研数学所有知识点，以图表形式讲解更加清晰；精选2003-2005年考研数学优秀模拟试题，按照考研题型严格编排，准确把握三年模拟跳动脉搏；基本概念、基本公式和基本方法夯实基础，巩固所学；权威规范解答试题，全面详尽解析试题。




### 考研数学真题分类全解

本书是一本理工类、经济类考研学生备考数学的教材，由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成。在详细研究、系统整理1993-2006年研究生数学考试试题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容对其进行了分类，给出了一般的解题方法和常用技巧。

本书最大特点是紧跟最新考研数学大纲，深入领会大纲精髓，全面覆盖考研知识点，研习和解答历年考研数学真题，使广大考生能够通过对真题的认真演练，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界。




ISBN 7-5011-7340-0
9 787501 173402
02 >


星火图书




ISBN 7-5011-7340-0
定价: 36.80元

Spark 星火书业

2007考研数学备考教材

# 8年考研 3年模拟

BANIANKAOYANSANNIANMONI

## 答案全解全析

主　编　张天德　杨振光
副主编　叶　宏　郑修才　王　玮

新　华　出　版　社

# 答案全解全析·经济类

## 第一篇　高等数学

## 第一章　函数·极限·连续

### 第一单元　函数

**2004 年模拟**

**一、填空题**

1. 应填 $a^{\frac{x}{2}}$，$(-\infty,+\infty)$.

解　令 $\log_a x=t$，则 $x=a^t$. 函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$ 可化为 $f(t)=a^{\frac{t}{2}}$，从而 $f(x)=a^{\frac{x}{2}}$. 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 应填 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1.\end{cases}$

3. 应填 $y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8.\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$

**二、选择题**

4. 应选(B).

解　因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

因此 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**三、计算、证明题**

5. 解　(1) 设 $F(x)=xf(x)$，

则 $F(-x)=(-x)f(-x)=xf(x)=F(x)$，

故 $xf(x)$ 为偶函数.

同理可得(2) $(x^2+1)f(x)$ 为奇函数；

(3) $|f(x)|$ 为偶函数；

(4) $-f(-x)$ 为奇函数；

(5) $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ 为偶函数.

**2005 年模拟**

**一、填空题**

1. 应填 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

解　由已知条件知

$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ (\frac{3x-1}{2})^2\leqslant 1\end{cases}$，　即　$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ -1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}$

解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，因此定义域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

2. 应填 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$.

**二、选择题**

3. 应选(D).

4. 应选(A).

解　由已知条件知

$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

设 $F(x)=f[f(x)]$，则

$F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]$
$=-f[f(x)]$.

所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

**三、计算、证明题**

5. 解　因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$.

**2006 年模拟**

**一、填空题**

1. 应填 1.

分析　因为由已知条件知 $|f(x)|\leqslant 1$，$-\infty<x<+\infty$，所以由 $f$ 及复合函数的定义知 $f[f(x)]=1$，$-\infty<x<+\infty$.

2. 应填 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

解　令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $y=\frac{1+t}{1-t}$，

所以 $t=\frac{y-1}{y+1}$，即 $\sqrt{1-x}=\frac{y-1}{y+1}$，

从而 $x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2}$，

因此反函数为 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

**二、选择题**

3. 应选(A).

**解** 因 $|f(x)|=\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{1+x^2}$

$$\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$$

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.

4. 应选(B).

**解** 易验证(A)为奇函数,(B)为非奇非偶函数,(C)为奇函数,(D)为偶函数.

**三、计算、证明题**

5. **解** 设

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$

则 $f(0)=a_0=1, f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1$

比较两边 $x^8$ 的系数 $a_8=2^8$.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256$.

## 第二单元 极限

### 2004 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 $\frac{1}{3}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

2. 应填 $-\frac{1}{2}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

3. 应填 $-3$.

**解** 原式

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-1}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}=-3.$$

4. 应填 $\frac{3}{2}$.

**解** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$.

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{3(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2ax^2}{3x^2}=\frac{2}{3}a$$

所以 $a=\frac{3}{2}$.

5. 应填 0.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}$

$$=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

**二、选择题**

6. 应选(C).

7. 应选(A).

**解** 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$,

当 $x\to0$ 时,

$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right)$,

所以 $n=5$.

**三、计算、证明题**

8. **解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{6}$$

9. **解** 由于 $x\to0$ 时, $ax-\sin x\to0$, 且极限 $c$ 不为零, 所以当 $x\to0$ 时, $\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt\to0$, 故必有 $b=0$. 由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{a-\cos x}{x^2}=c$$

$(c\neq0)$

故必有 $a=1$, 从而 $c=\frac{1}{2}$.

10. **证明** $x_0=\sqrt{2}, x_1>\sqrt{2}$

所以 $x_n>\sqrt{2}$ $(n=1,2,\cdots)$.

而 $x_{n+1}<x_n$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设为 $A$

可得 $A=\sqrt{2}+\dfrac{A-1}{\sqrt{2}+A}$,所以 $A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11. **解** (1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$,

且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 $\pi$ 为周期的函数,在每个周期上积分值相等,所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx=2(n+1)$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$$

(2) 由(1)知,当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

令 $x\to+\infty$,由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

## 2005 年模拟

### 一、填空题

1. 应填 $\dfrac{1}{3}$.

**解** 因 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1^2}{n^3+1}+\dfrac{2^2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}\leqslant\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}$

即 $$\frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)}{n^2+1}\leqslant\frac{1^2}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\leqslant\frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^3+1}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3}$$

由夹逼准则得所求极限为 $\dfrac{1}{3}$.

2. 应填 $\dfrac{m}{n}$.

**解** 由 $m\neq n$

则原式 $=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m}{n}.$

3. 应填 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

**解** 原式 $=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{x+2}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

4. 应填 $\dfrac{4}{3}$.

**解** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x+xf(x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

### 二、选择题

5. 应选(A).

6. 应选(B).

**解** 因为 $\displaystyle\lim_{x\to0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0$

所以 $c=1$

又 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0$

即 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

所以 $a=1,b=0$.

### 三、计算、证明题

7. **解** $|\arctan(n!)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$$

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arctan(n!)\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=0$

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}=3$$

所以原式 $=-3$.

8. **证明** $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0$

所以 $\{x_n\}$ 单增

又 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$

所以$\{x_n\}$有上界.

故$\{x_n\}$收敛.

9. **证明** 由题设可得

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\quad(k=1,2,\cdots)$$

因此
$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\Big[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\Big]+f(n)\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

即数列$\{a_n\}$有下界,又

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,故由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

10. **解** 原式
$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

11. **证明** 只需证存在惟一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使

$$\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$$

由题设和洛必达法则,从

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)}{2h}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)}{2}\\&=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)\end{aligned}$$

知$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq0$$

所以上述方程组的解存在且惟一,即存在惟一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当$h\to0$时,$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

## 2006年模拟

### 一、填空题

1. 应填$\frac{1}{2}$.

**解** 因为$\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

而$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$.

2. 应填0.

**解** 令$x=\frac{1}{y}$,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y}\\&=\lim_{y\to0^+}\left[\frac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+\frac{2(1-\sqrt{1+y})}{y}\right]\\&=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+2\lim_{y\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+y}}{y}\\&=1-1=0.\end{aligned}$$

3. 应填$\frac{n(n+1)}{2}$.

**解** 原式

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)+(\cos^2x-1)+\cdots+(\cos^nx-1)}{\cos x-1}\\&=\lim_{x\to0}[1+(\cos x+1)+\cdots+(\cos^{n-1}x+\cos^{n-2}x+\cdots+1)]\\&=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

4. 应填$\frac{3}{2}$.

**解** 原式
$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})+\frac{1}{2}\ln x}{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})+\frac{1}{3}\ln x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})}{\ln x}+\frac{1}{2}}{\frac{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})}{\ln x}+\frac{1}{3}}\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

二、选择题

5. 应选(D).

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

6. 应选(C).

**解** $$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cos x}$$

$$=5\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{e}$$

故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但不等价无穷小.

三、计算、证明题

7. **解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{4}.$$

8. **解** 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$

$$\cdot\frac{x^4}{4\left(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-e^{x^2}}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-e^{x^2}}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{12}.$$

9. **解** 因 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)$$

$=2-1=1$

由极限存在的充要条件得

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

10. **解** 原式

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x})}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos2x}\cdot\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos2x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos2x}(1-\sqrt[3]{\cos3x})}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{(\cos2x-1)+1}}{x^2}$$

$$+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos3x-1)+1}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{2x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

11. **解** 由题设条件知

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]$$

$$=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\neq0$,故必有 $a+b-1=0$

又由洛必达法则,有

$$0=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$$

$$=(a+2b)f'(0)$$

因 $f'(0)\neq0$,故 $a+2b=0$

于是得 $a=2,b=-1$.

## 第三单元 连续

### 2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $b+a$.

**解** 根据 $F(x)$ 在点 $x=0$ 连续的充要条件知

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0}F(x)=F(0)=A$$

而 $$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+a\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=b+a.$$

2. 应填 0.

**解** $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{x},$$

所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$.

二、选择题

3. 应选(D).

**解** 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{a+e^{bx}}=0$ 知 $a+e^{bx}$ 应为 $\infty$,

故 $x\to-\infty$ 时，$b<0$.

若 $a<0$，则 $f(x)$ 应有间断点 $x=\dfrac{\ln(-a)}{b}$，这与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续矛盾，故 $a\geqslant 0$.

**三、计算、证明题**

4. **解** $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处，$f(\dfrac{\pi}{4}+0)=+\infty$，在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处，$f(\dfrac{5\pi}{4}+0)=+\infty$，故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{4}\pi$ 为第二类（或无穷）间断点；

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}f(x)=1$；在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}f(x)=1$，故 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7}{4}\pi$ 为第一类（或可去）间断点.

5. **证明** 不妨设 $a_0>0$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=-\infty$$

所以存在 $X>0$，使 $p(X)>0$，$p(-X)<0$，又因为 $p(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，由连续函数的零点定理知，在 $(-X,X)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $p(\xi)=0$，即奇次多项式 $p(x)$ 至少有一个实根．

## 2005 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 $e^{-\frac{1}{2}}$.

**解** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\exp(\dfrac{\ln\cos x}{x^2})$

$=\lim\limits_{x\to0}\exp(\dfrac{\cos x-1}{x^2})=e^{-\frac{1}{2}}$.

而 $f(0)=a$ 所以 $a=e^{-\frac{1}{2}}$.

**二、选择题**

2. 应选(D).

**解** $f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(4-x)=3$，

$f(x)$ 的右极限 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$，

因此 $f(x)$ 的左、右极限都存在，但不相等，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 点间断.

3. 应选(D).

**解** 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 处无定义，因此是间断点.

又因 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点；而 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点.

**三、计算、证明题**

4. **解** (1) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ (x+16)/12, & x>8\end{cases}$

(2) 讨论 $x=-1$ 及 $x=8$ 点处的左、右极限得 $f^{-1}(x)$ 在 $x=-1$ 及 $x=8$ 均连续，故函数 $f^{-1}(x)$ 无间断点.

5. **证明** 令 $f(x)=x^3-9x-1$

因为 $f(-3)=-1<0$，$f(-2)=9>0$，

$f(0)=-1<0$，$f(4)=27>0$

又 $f(x)$ 在 $[-3,4]$ 上连续

所以 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$，$(-2,0)$，$(0,4)$ 各区间内至少有一零点. 即 $x^3-9x-1=0$ 至少三个实根. 又因为它是一元三次方程，所以方程恰有三个实根.

## 2006 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 $a\neq b$.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$.

2. 应填 $-2$.

**解** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x}{\frac{x}{2}}=-2$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^{2x}=a$

由连续定义知 $a=-2$.

**二、选择题**

3. 应选(B).

**解** $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x\leqslant-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$

可见 $x-1$ 为间断点.

4. 应选(D).

**解** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\dfrac{1}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\dfrac{2}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-\dfrac{2}{\pi}$.

**三、计算、证明题**

5. **证明** 构造辅助函数 $F(x)=f(x+L)-f(x)$，

它在$[0,L]$上连续，且$F(0)=f(L)-f(0)$，$F(L)=f(2L)-f(L)$.

因为$f(0)=f(2L)$，若$f(L)=f(0)$或$f(2L)=f(L)$，则$x=0$或$x=L$即为方程的根，若不然，$F(0)$和$F(L)$必异号，由连续函数介值定理的推论知，至少存在一个$\xi\in(0,L)$，使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f(\xi+L)$.

6. **证明**　令$F(x)=f\left(\frac{b-a}{2}+x\right)-f(x)$，

则$F(x)$在$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$上连续.

$$F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a),$$

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

又$f(a)=f(b)$，所以$F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$

所以至少存在一点$x_0\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$使$F(x_0)=0$，

即有$\alpha=x_0,\beta=\frac{b-a}{2}+x_0$，且$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，

$\beta-\alpha=\frac{b-a}{2}$，使$f(\alpha)=f(\beta)$.

# 第二章　一元函数微分学

## 第一单元　导数与微分

### 2004 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 1.

**解**　$f(x)$是分段函数，按定义分别求$f(x)$在点$x=0$处的左、右导数.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{1+e^x}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^x}=1$$

因为左、右导数存在且相等，所以导数存在，$f'(0)=1$.

2. 应填$2x+y-1=0$.

**解**　$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}$$

$$=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}$$

$x=0$时，$t=0$. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$. 法线斜率$k=-2$

则曲线在$(0,1)$处法线方程为$y-1=-2x$，即$2x+y-1=0$.

3. 应填$(4,8)$.

**解**　$y'(a)=\frac{3}{2}\sqrt{a}=3$

故$a=4$，即点$(4,8)$处，$y=x^{\frac{3}{2}}$的切线与$y=3x-1$平行.

4. 应填$\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$.

**解**　方程两边关于$x$求导，得

$$1=e^{y\ln y}\left[y'\ln y+y\frac{1}{y}y'\right]$$

则　$$y'=\frac{1}{y^y(1+\ln y)}=\frac{1}{x(1+\ln y)},$$

$$dy=y'dx=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$$

5. 应填 3.

**解**　这是一道参数方程所确定的函数的求导问题，其中$y$又是关于$t$的复合函数.

令$u=e^{3t}-1$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{[f'_u(u)3e^{3t}]}{f'_t(t)}$$

当$t=0$时，$u=0$，因此

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{f'(0)\cdot3}{f'(0)}=3.$$

**二、选择题**

6. 应选(B).

**解**　$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=2.$$

7. 应选(B).

**解**　由于$f(x)$在$x=0$处可导，由导数定义知：

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

由于$(0)=0,f'(0)\neq0$，所以

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq f(0)$$

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq f(0)$$

因此$x=0$是$F(x)$的第一类间断点.

8. 应选(B).

**解**　$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(0)}{3\sin x}\cdot\frac{3\sin x}{x}$$

$$-\lim_{x\to0}\frac{f(2\arctan x)-f(0)}{2\arctan x}\cdot\frac{2\arctan x}{x}$$

$$=3f'(0)-2f'(0)=f'(0)=2.$$

9. 应选(B).

**解** 因为

$$dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x.$$

10. 应选(C).

**解** 因为

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\right]$$
$$=f'(0)+f(0).$$
$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)-f(0).$$

**三、计算、证明题**

11. **证明** 因为 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 且 $f(x)$ 非零,令 $y=0$,

便得 $f(x)=f(x)f(0)$,于是 $f(0)=1$.

对任意 $\in(-\infty,+\infty)$,$f(x+\Delta x)=f(x)\cdot f(\Delta x)$. 根据导数的定义,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=f(x)f'(0)=f(x).$$

12. **解** $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\{f'(x^2)\cos[f(x^2)]+2x^2f''(x^2)\cos[f(x^2)]-2x^2[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$$
$$=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$$

13. **解** (1) 
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x}=0=f(0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^3}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x}{6x}=\frac{2}{3}$$

(2) 因为 $x\neq0$ 时,$f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2x}+\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

$$\text{故 } f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\cos x}{\sin^2x}+\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{2}{3}, & x=0.\end{cases}$$

14. **解** (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^a\sin\dfrac{1}{x^b}=f(0)=0\Rightarrow a>0$;

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b}\Rightarrow a>1$;

(3) $f'(x)=$

$$\begin{cases}ax^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b}+(-b)x^{a-b-1}\cos\dfrac{1}{x^b}, & x\neq0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

要使 $f'(x)$ 有界,则必须 $\begin{cases}a-1>0\\ a-b-1\geqslant0\end{cases}$,从而 $a\geqslant b+1$.

## 2005 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 $(2t+1)e^{2t}$.

**解** 先利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 求出 $f(t)$ 的表达式,然后求 $f'(t)$

$$f(t)=\lim_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}=t\left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\right]^{2t}=te^{2t}$$

$$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(2t+1)e^{2t}.$$

2. 应填 $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

**解** 
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(t+1)(3t+2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{dx/dt}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

3. 应填 1.

**解** 
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$$
$$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1.$$

4. 应填 $f'(t)=(2t+1)e^{2t}$.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x=e^{2t}$

故 $f'(t)=(2t+1)e^{2t}$.

5. 应填 $10\times2^{10}$.

**解** 原式

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{(2+\tan x)^{30}-2^{10}}{\sin x}+\frac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2+\tan x)^{10}-2^{10}}{\tan x}+\lim_{x\to0}\frac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}$$
$$=[(2+x)^{10}]'|_{x=0}+[(2+x)^{10}]'|_{x=0}$$
$$=10\times2^{10}.$$

## 二、选择题

6. 应选(B).

**解** 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)$$

所以 $f'(1)=-2$

7. 应选(B).

**解** 对 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,

令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)+2x\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+2x=f'(0)+2x.$$

8. 应选(A).

**解** 
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-1)}{x-1}=1,$$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{1}{3}}{x-1}$ 不存在.

9. 应选(C).

**解** 由 $|f(x)|\leqslant x^2$,令 $x=0$ 得 $f(0)=0$

又 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|$

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$

## 三、计算、证明题

10. **解** 
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{[f(x_0+x)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-3x)]}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+3\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-3x)-f(x_0)}{-3x}$$
$$=f'(x_0)+3f'(x_0)$$
$$=4f'(x_0)$$

**注** 本题有个常见的错误做法:

令 $x_0-3x=t$,则 $x_0=t+3x$,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(t+4x)-f(t)}{x}=4\lim_{x\to0}f'(t)$$
$$=4\lim_{x\to0}f'(x_0-3x)=4f'(x_0)$$

因为题目中只设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导,没说在 $x_0$ 及其邻域内可导,更没假定 $f'(x)$ 在 $x_0$ 点连续,所以上面做法是无根据的. 在学习数学时,一定要注意数学的严谨性,给了什么条件,只能用什么条件.

11. **证明** 因为 $f(x_0)=0$,

所以 
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\sin^a(x-x_0)}{x-x_0}=\begin{cases}g(x_0), & a=1\\ 0, & a>1\end{cases}$$

所以,$f(x)$ 在 $x_0$ 处可导.

12. **解** $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,所以

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=f'(a),$$

且当 $n$ 充分大时,$f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)>0$

故 
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}$$

13. **证明** 当 $f(x_0)\neq0$ 时,记 $|f(x_0)|'$ 为 $|f(x)|$ 在 $x_0$ 处的导数,因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}[|f(x)|+|f(x_0)|]$$
$$=2|f(x_0)||f(x_0)|' \text{ 存在}$$

所以 
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{f(x)+f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{|f(x_0)|}{f(x_0)}|f(x_0)|'$$

当 $f(x_0)=0$ 时,

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=|f(x)|'=A$ 存在

所以 $A=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\geqslant 0$

$A=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\leqslant 0$

故 $A=0$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=0$

综上所述，$f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且

$$f'(x_0)=\begin{cases}|f(x_0)|'\dfrac{|f(x_0)|}{f(x_0)}, & f(x_0)\neq 0\\ 0, & f(x_0)=0.\end{cases}$$

**2006 年模拟**

**一、填空题**

1. 应填$\dfrac{1}{e}$.

**解** 曲线在(1,1)处的切线斜率

$$k=f'(1)=n$$

故切线方程为 $y-1=n(x-1)$

令 $y=0$，得与 $x$ 轴的交点 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$.

2. 应填$\dfrac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

**解** 方程两边求关于 $x$ 的导数，得

$$e^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$$

解出 $y'$ 即为所求.

$$y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$$

3. 应填$\dfrac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$.

**解** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4tf(t^2)\cdot f'(t^2)}{f(t^2)}=4tf'(t^2)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$$

4. 应填$\dfrac{3\pi}{4}$.

**解** $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left.\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)'\right|_{x=0}$

$=\left.\left[\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}\right]\right|_{x=0}$

$=\dfrac{3\pi}{4}$.

5. $\dfrac{(-1)^n2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

**解** 因为 $f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1$

所以 $f'(x)=-2(1+x)^{-2}$

$f''(x)=2\times 2(1+x)^{-3}$

$f'''(x)=-2\times 3!(1+x)^{-4}$

……

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

**二、选择题**

6. 应选(C).

**解** 因为对任意 $x$ 都有

$f(1+x)=af(x)$

令 $x=0$，得 $f(1)=af(0)$

所以 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a[f(x)-f(0)]}{x}$

$=af'(0)=ab$.

7. 应选(A).

**解** 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x\in(-\infty,0)$

所以 $f'(x)=f'(-x)(-x)'$

$=-f'(-x)<0$

$f''(x)=-f''(-x)(-x)'$

$=f''(-x)<0$.

8. 应选(B).

**解** 取 $f(x)=x+1$，易知(A)，(C)都不正确.

取 $f(x)=x^2$，易知(D)不正确.

9. 应选(B).

**解** 当 $n\geqslant 2$ 时

$f''(x)=[(f(x))^2]'=2f(x)f'(x)$

$=2[f(x)]^3$

$f'''(x)=3![f(x)]^2f'(x)$

$=3![f(x)]^4$

…

$f^{(n)}(x)=(n-1)![(f(x))^n]'$

$=n![f(x)]^{n-1}f'(x)$

$=n![f(x)]^{n+1}$.

10. 应选(C).

**解** 因为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, x\geqslant 0\\ 2x^3, x<0\end{cases}$

所以 $f'(x)=\begin{cases}12x^2, x>0\\ 0, x=0\\ 6x^2, x<0\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}24x, x>0\\ 0, x=0\\ 12x, x<0\end{cases}$

又 $f'''_+(0)=24, f'''_-(0)=12$

故 $f''(0)$ 存在，$f'''(0)$ 不存在.

三、计算、证明题

11. **解** 由已知得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$

解方程组 $\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}\\ bf(x)+af\left(\frac{1}{x}\right)=cx\end{cases}$

得 $f(x)=\dfrac{\frac{ac}{x}-bcx}{a^2-b^2}$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(-\dfrac{ac}{x^2}-bc\right)$

$=-\dfrac{bcx^2+ac}{x^2(a^2-b^2)}.$

12. **解** 因为当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，$f(x)$ 均为多项式，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上连续、可导.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则应有

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(ax+b)=b$$

但 $f(0)=3$

所以，$b=3$.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则应有

$$f'_-(0)=f'_+(0)$$

但 $f'_-(0)=(x^2+2x+3)'|_{x=0}=2$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{ax+b-3}{x}=a$$

所以，$a=2$.

故当 $a=2,b=3$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

13. **证明** $f(x)=\begin{cases}-\sin^3x, & x\in[-1,0)\\ \sin^3x, & x\in[0,1]\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-3\sin^2x\cos x, & x\in[-1,0)\\ 3\sin^2x\cos x, & x\in(0,1]\end{cases}$

且 $f'(0)=0$.

$f''(x)=\begin{cases}3\sin^3x-6\sin x\cos^2x, & x\in[-1,0)\\ -3\sin^3x+6\sin x\cos^2x, & x\in(0,1]\end{cases}$

且 $f''(0)=0$.

$f'''(x)=\begin{cases}21\sin^2x\cos x-6\cos^3x, & x\in[-1,0)\\ -21\sin^2x\cos x+6\cos^3x, & x\in(0,1]\end{cases}$

而 $f'''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-3\sin^3x+6\sin x\cos^2x}{x}=6$

$f'''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3\sin^3x-6\sin x\cos^2x}{x}=-6$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数不存在，又

$$\lim_{x\to0^-}f'''(x)=\lim_{x\to0^-}(21\sin^2x\cos x-6\cos^3x)=-6$$

$$\lim_{x\to0^+}f'''(x)=\lim_{x\to0^+}(-21\sin^2x\cos x+6\cos^3x)=6$$

故 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的第一类间断点.

14. **解法一** 令 $u=\dfrac{x+1}{x-1},(x\neq1)$

则 $\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

$$=\frac{2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm1).$$

**解法二** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，

$$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

故 $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm1).$

## 第二单元　微分中值定理

### 2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $[1,+\infty)$.

**解** $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，其中仅在区间 $[1,+\infty)$ 上恒有 $f'(x)\equiv0$，即 $f(x)=c$.

又由 $f(1)=\arcsin1=\dfrac{\pi}{2}$，知应取 $[1,+\infty)$.

二、选择题

2. 应选(B).

**解** 因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 故 $f'(1)>f'(0)$. 而由拉格朗日中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)$. 其中 $\xi$ 介于 0 与 1 之间.

则 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$.

三、计算、证明题

3. **证明** 作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，从而在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi).$$

可见，$\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$

4. **证明** 设 $F(x)=f(a)e^{-x}f(x)$，

则 $F(a)=f^2(a)e^{-a}>0,F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$$= f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)e^{-\frac{a+b}{2}} < 0,$$

$F(b) = f(a)f(b)e^{-b} > 0.$

所以由零点定理知存在 $\xi_1 \in \left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$，使 $F(\xi_1)=0$，$F(\xi_2)=0$. 再在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用罗尔定理即得结果.

5. **证明**　在柯西中值定理中分别取 $g(x)=x,x^2,x^3$，则在 $(a,b)$ 内存在 $x_1,x_2,x_3$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(x_1)}{1}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

则　$f'(x_1)=(b+a)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}$

$$=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

## 2005 年模拟

### 一、填空题

1. 应填 3.

**解**　在 $[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$ 中分别应用罗尔定理，可知 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，而 $f'(x)=0$ 是三次方程，至多有三个根，故 $f'(x)=0$ 恰有三个实根.

### 二、选择题

2. 应选(D).

**解**　由罗尔定理的条件可知(A)、(B)、(C)不满足. 只有(D)正确.

### 三、计算、证明题

3. **证明**　设 $F(x)=\sin\ln x$，$G(x)=\ln x$，则 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[1,e]$ 上满足柯西中值定理条件. 由于

$F(1)=\sin\ln 1=0$，　$F(e)=\sin\ln e=\sin 1$

$G(1)=\ln 1=0$，　$G(e)=\ln e=1$

$F'(x)=\cos\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$，　$G'(x)=\dfrac{1}{x}$

故由柯西中值定理至少存在一个 $\xi\in(1,e)$，使得

$$\frac{F(e)-F(1)}{G(e)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即　$\sin 1=\dfrac{\cos\ln\xi\cdot\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi.$

4. **证明**　在 $\left[a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=f'(\xi)\left[-\frac{f(a)}{k}\right],\ a<\xi<a-\frac{f(a)}{k}$$

即有 $f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)=f(a)+f'(\xi)\left[-\dfrac{f(a)}{k}\right]$

$$=f(a)\left[1-\frac{f'(\xi)}{k}\right]<0$$

故由连续函数的介值定理知，在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内至少存在一点 $\eta$，使 $f(\eta)=0$，即 $f(x)=0$ 至少有一实根.

又由 $f'(x)<0$，知 $f(x)$ 为单减函数，故 $f(x)$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一实根.

5. **证明**　令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$G(x)=\dfrac{1}{x}$.

根据柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

整理即得 $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$

## 2006 年模拟

### 一、填空题

1. 应填 $\pm\dfrac{1}{2}$.

**解**　容易验证 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 中满足拉格朗日中值定理的条件，且

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2x, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

故存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1.$

由 $2x=1$ 得 $\xi_1=\dfrac{1}{2}$，由 $-2x=1$ 得 $\xi_2=-\dfrac{1}{2}$.

### 二、选择题

2. 应选(D).

**解**　(A)显然不对；(B)和(C)分别意味 $f(x)$ 的严格单增性和严格单减性，也被排除掉了. 在区间 $(0,1)$ 取一点 $\xi$ 使 $f(\xi)\neq f(0)$，显然 $(f(\xi)-f(0))$ 与 $(f(1)-f(\xi))$ 异号，而由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi_1,\xi_2$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$ 显然 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 异号.

### 三、计算、证明题

3. **证法一**　令 $c=\dfrac{a+b}{2}$，作过三点 $(a,f(a))$，$(c,$

$f(c)),(b,f(b))$ 的抛物线

$$y=g(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a)$$
$$+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$$

存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=g''(\xi)$，而

$$g''(\xi)=\frac{4}{(b-a)^2}f(a)+\frac{4}{(b-a)^2}f(b)$$
$$-\frac{8}{(b-a)^2}f(c)$$

所以 $\frac{(b-a)^2}{4}f''\xi=f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)$

**证法二** 用泰勒公式. 记 $\frac{a+b}{2}=c$，

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_1),$$

$\xi_1\in(a,c)$

$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_2),$$

$\xi_2\in(c,b)$

$$f(a)+f(b)=2f(c)+\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right]$$

则

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).\ \xi\in$$

$(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$

4. **证明** 直线 $AB$ 的方程是

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

则显然 $g(a)=f(a),g(b)=f(b),g(c)=f(c)$ 所以由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=g''(\xi)$，而 $g''(x)=0$，则 $f''(\xi)=0$.

5. **证明** 因为 $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，所以由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)=g'(\xi_1)$.
记 $h(x)=f'(x),k(x)=g'(x)$，在 $[a,\xi_1]$ 上考虑 $h(x),k(x)$，由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,\xi_1)\subset[a,b]$，使得 $h'(\xi)=k'(\xi)$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

6. **证明** 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

易知 $F(a)=F(b)=0$，且当 $a<x<b$ 时，$F(x)\neq0$（因为 $f(x)$ 为非线性函数）. 设在 $c_1(a<c_1<b)$ 点，$F(c_1)\neq0$，不妨设 $F(c_1)>0$. 在 $[a,c_1]$ 与 $[c_1,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，可知存在 $\xi_1\in(a,c_1)$ 使

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c-a}>0$$

$\xi_2\in(c_1,b)$ 使

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}-\frac{F(c_1)}{b-c_1}<0$$

因而 $f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由此可知当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant0$ 时，

$$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

而当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时

$$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

## 第三单元 导数的应用

### 2004 年模拟

#### 一、填空题

1. 应填 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

**解** $y=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2},y'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$；
$y''=2\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right]$. 令 $y''=0$ 得拐点的横坐标 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，故拐点为 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

2. 应填 $\frac{4}{3},\frac{5}{2},2$.

**解** $y'=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4[3(x-2)(x-3)+4(x-1)(x-3)+5(x-1)(x-2)]$
$=2(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(2x-5)(3x-4)$.

3. 应填 $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

**解** 由 $y'=-\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$ 可知 $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

#### 二、选择题

4. 应选(B).

**解** $y'_x=(x-1)(x-2),y'\Big|_{x=0}=2$

故切线方程为 $y=2x$.

5. 应选(C).

**解** 由 $\frac{EQ}{Ep}=\frac{\mathrm{d}\ln Q}{\mathrm{d}p}$

将(C)代入有 $\frac{EQ}{Ep}=a$ 与 $p$ 无关.

6. 应选(C).

**解** 由 $f'(x_0)=0$ 知 $x_0$ 为驻点.
又 $y''|_{x=x_0}=(-y'+e^{\sin x})|_{x=x_0}=e^{\sin x_0}>0$.

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值.

7. 应选(C).

**解** $y'=2[(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)]$

$y''=4(3x^2-12x+11)=0$.

解得 $y''=0$ 有两个根且根两侧二阶导数符号变号.

**三、计算、证明题**

8. **证明** 不妨设 $f'''(x_0)>0$,

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0.$$

所以根据保号性存在 $x_0$ 的某邻域,使

$$\frac{f''(x)}{x-x_0}>0,$$

即 $x>x_0$ 时,$f''(x)>0$;$x<x_0$ 时,$f''(x)<0$. 从而 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线的拐点.

而 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$,

故 $f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$,

即 $x>x_0$ 时,$f(x)>f(x_0)$;$x<x_0$ 时,$f(x)<f(x_0)$. 故 $x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

9. **证明** 因为 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

由泰勒公式有 $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ 其中 $\xi$ 介于 $x$ 与 $x_0$ 之间

即 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$

因为 $f^{(n)}(x)$ 在 $x_0$ 连续,且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,所以必存在 $x_0$ 的某一邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,使对于该邻域内任意 $x$,$f^{(n)}(x)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号,进而 $f^{(n)}(\xi)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号,于是,在 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号确定后,$f(x)-f(x_0)$ 的符号完全取决于 $(x-x_0)^n$ 的符号.

(1) 当 $n$ 为偶数时,$(x-x_0)^n\geqslant 0$. 所以,

当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x)-f(x_0)\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant f(x_0)$,从而 $f(x_0)$ 为极大值;

当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x)-f(x_0)\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant f(x_0)$,从而 $f(x_0)$ 为极小值.

(2) 当 $n$ 为奇数时,若 $x<x_0$,则 $(x-x_0)^n<0$;若 $x>x_0$,则 $(x-x_0)^n>0$. 所以不论 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号如何,当 $(x-x_0)$ 由负变正时,则 $f(x)-f(x_0)$ 的符号也随之改变,因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不取得极值.

10. **证法一** 令 $f(x)=(1-x)e^{2x}-(1+x)$,则

$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$,$f''(x)=-4xe^{2x}$,

当 $0<x<1$ 时,$f''(x)<0$,所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少,且 $f'(0)=0$,

故 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)<f(0)=0,\quad x\in(0,1)$

$$(1-x)e^{2x}-(1+x)<0$$

即 $\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}\quad x\in(0,1)$.

**证法二** 原不等式等价于

$$\frac{1+x}{1-x}>e^{2x},\quad x\in(0,1)$$

$$\frac{1+x}{1-x}=(1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+\cdots\quad x\in(0,1)$$

$$e^{2x}=1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{2^2x^n}{n!}+\cdots$$

左边的一般项为 $2x^n$,右边的一般项为 $\frac{2^nx^n}{n!}$ 显然当 $n\geqslant 3$ 时,

$$2>\frac{2^n}{n!}$$

所以当 $n\geqslant 3$,$0<x<1$ 时,

$$2x^n>\frac{2^n}{n!}x^n$$

所以 $1+\sum_{n=1}^{\infty}2x^n>1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}$,

即 $\frac{1+x}{1-x}>e^{2x}$, $x\in(0,1)$.

## 2005 年模拟

**一、填空题**

1. 应填 $-3e^3$,$e^4$.

**解** 由 $f'(x)=-(x+3)(x-2)e^{-x}$ 可知驻点为 $x=-3$ 和 $x=2$ 两点,另外,在边界点 $x=-4$ 处,$f(-4)=e^4$,$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. 我们得知最小值为 $f(-3)=-3e^3$,最大值为 $f(-4)=e^4$.

2. 应填 $-\frac{1}{\ln 2}$.

**解** 由 $y'=2^x(1+x\ln 2)$ 可求得极小值点与极小值.

3. 应填 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**解** 由 $y''=4e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$ 可知,当且仅当 $|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$y''<0$.