

中国科学院原子能研究所

在固定步长下数值解微分方程組 的尤拉改进方法程序

高中昌 宋 威

一九六三年二月

固定步长数值解常微分方程組 的改进尤拉方法程序

一、計 算 公 式

$$\text{方程組} \quad \begin{cases} y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & x \in [a, b] \\ y_i(x_0) = y_{i0}, & (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

現用下面改进的尤拉方法求解:

$$y_{i,k+1}^{[0]} = y_{ik} + hf_{ik}(x_k, y_{1k}, \dots, y_{nk}),$$

$$y_{i,k+1}^{[v+1]} = y_{ik} + \frac{h}{2} \left[f_{ik}(x_k, y_{1k}, \dots, y_{nk}) + f_{i,k+1}(x_{k+1}, y_{1,k+1}^{[v]}, \dots, y_{n,k+1}^{[v]}) \right],$$

其中 n 表示方程的个数, 包括 $\frac{dx}{dx} = 1$ 自变量方程在內, h 为步长; y 的第一个足标表示函数的号碼, 第二个足标表示点的号碼, y 的上标为叠代次数。这样, 上面的第一个式子作零次近似, 第二个式子作叠代。

二、使 用 說 明

本程序仅为实现上面的改进尤拉方法的叠代程序。对于計算右边的 f_i 的子程序以及为实现对結果的傳送、存儲、印刷、下一步的計算、参数和初始值的改变等等的处理程序, 依赖于具体的方程組和要求另外編制。这里設計算 f_i 程序的第一条指令的地址碼为 N_i 。本程序計算时需用三組单元, 分配如下 (令它們从 $a+1$ 开始):

- (1) $a+1 \div a+n$ (放初始值和 $[v+1]$ 次叠代的结果),
 - (2) $a+n+1 \div a+2n$ (放計算 f_i 的变量和 $[v]$ 次叠代的结果),
 - (3) $a+2n+1 \div a+3n$ (放 $y_{ik} + \frac{h}{2} f_{ik}$)。
- ($a+1 \div a+3n$) 三組单元应注意安排或全在 1000 以上的单元, 或全在 1000 以下的单元。

在編制右边 f_i 子程序和处理程序时必须注意下面几点:

- (1) 計算 f_i 的变量須直接用第二組单元 ($a+n+1 \div a+2n$)。
- (2) 对 f_i 的計算結果須放入第一組单元中 ($a+1 \div a+n$), 并在 f_i 子程序的末端必須置放指令。

011	—	—	1007
-----	---	---	------

- (3) 在“处理程序”的恰当位置必須置放指令。

010	—	—	1001
-----	---	---	------

(4) 第 $[v+1]$ 次叠代的积分结果放在第一组单元里 $(a+1 \div a+n)$, 第 $[v]$ 次叠代的积分结果放在第二组单元里 $(a+n+1 \div a+2n)$, 结果输出可直接用此二组单元。

(5) 前后二次叠代的积分结果满足所要求的精确度为:

$$|y_{k+1}^{[v]} - y_{k+1}^{[v+1]}| < \varepsilon = 0.5 \times 10^{-t},$$

ε 应当由计算者预先给定。

(6) 本程序与主程序接通有如下指令:

指令地址	操作码	第一地址	第二地址	第三地址
K_1	10 $\bar{2}$	L_1	—	1004
K_2	01 $\bar{0}$	—	—	101 $\bar{4}$
K_3	00 $\bar{2}$	A	—	101 $\bar{4}$
K_4	00 $\bar{2}$	B	—	101 $\bar{5}$
K_5	10 $\bar{2}$	L_2	—	1006
K_6		送初始值至 第一组单元 $(a+1 \div a+n)$		
K_7				
$\vdots$				
K_n				
K_{n+1}	01 $\bar{0}$	—	—	1001

其中: L_1 为:

—	a	—	n
---	---	---	---

 为造可变指令的初始信息。

A 为: $\frac{h}{2}$ 的单元号码, 放规格化了的二进制数。

B 为: $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-t}$ 的单元号码, 放规格化了的二进制数。

L_2 为:

01 $\bar{1}$	—	—	N_1
--------------	---	---	-------

 为转移去计算 f_1 的指令。

(当然, 上列的表还可根据具体情况来灵活编制)。

(7) 方程个数 n 包括 $\frac{dx}{dx} \equiv 1$ 即自变量 x 为此方程的积分结果, 而不须每次加步长改变自变量。

(8) 本程序可以用代真程序 I 来代真使用, 此时上面(2),(3),(6)中所用指令皆须换成相应的代真后的地址。

三、程序占用单元 (1000 $\div$ 1030)

(1) 1000 为作代真备用,

(2) 1001 清除返回指令,

(3) 1002 $\div$ 1005 实现 $1 \Rightarrow 2$ (第一组单元的内容送至第二组单元, 下同)。

(4) 1006 控制转移至 f_1 子程序,

(5) 1007 $\div$ 1000 实现 $\frac{h}{2} f_{ik}, -\frac{h}{2} f_{i,k+1}^{[v]} \Rightarrow 1$ 。

(6) 100 $\bar{1}$ 返回指令。

(7) 100 $\bar{2}$ $\div$ 1012 实现 $y_{ik} + \frac{h}{2} f_{ik} \Rightarrow 3, y_{ik} + \frac{h}{2} f_{ik} + \frac{h}{2} f_{ik} \Rightarrow 2$ 。

(8) 1013 为转移指令。

(9) 1014 ÷ 1017 实现 $y_{ik} + \frac{h}{2} f_{ik} + \frac{h}{2} f_{i,k+1}^{[v]} \Rightarrow 1$ 。

(10) 1018 ÷ 1012 实现比较 $|e = 0.5 \times 10^{-l}| < |y_{i,k+1}^{[v]} - y_{i,k+1}^{[v+1]}|$ ，

(11) 1013 返回主程序，

(12) 1014 ÷ 1036 造可变指令，它们执行后造成可变指令，不自行恢复。以后 1014, 1015 分别放 $\frac{h}{2}$, e , 1020 为 $(y_{i,k+1}^{[v]} - y_{i,k+1}^{[v+1]})$ 。

(13) 1037 返回中央，并作改变地址常数。

(14) 1038, 1039, 为改变地址常数，1030 放本程序的检查和。

013	0005	0213	0162
-----	------	------	------

或写为 013 ⊕ 21359962。

1000	011	0037	1013	1001					
1				1001	$0, \Rightarrow 1$				
2		1027		1004					
3	012	1004	1037	1004					
4	.				<table><tr><td></td><td>a</td><td></td><td>n</td></tr></table> $1 \Rightarrow 2$		a		n
	a		n						
5	015	1004	1028	1003					
6					<table><tr><td>011</td><td></td><td></td><td>N₁</td></tr></table>	011			N ₁
011			N ₁						
7		1025		1009					
8	012	1009	1037	1009	$\left. \begin{aligned} h/2 f_{ik} &\Rightarrow 1; h/2 f_{i,k+1}^{[v]} \Rightarrow 1 \\ &(\nu=1,2,\dots) \end{aligned} \right\}$				
9	003		1014						
0	114	1009	1030	1008					
1					1				
2		1031		1010					
3		1032		1011					
4	012	1010	1038	1010	$\left. \begin{aligned} y_{ik} + h/2 f_{ik}^{[0]} &\Rightarrow 3 \\ y_{ik} + h/2 f_{ik}^{[0]} + h/2 f_{ik}^{[1]} &\Rightarrow 2 \end{aligned} \right\}$				
5	012	1011	1038	1011					
1010	001								
1	002								
2	015	1011	1034	1004					
3	011		1001	1006					
4		1033		1016					
5	012	1016	1038	1016	$\left. \begin{aligned} y_{ik} + h/2 f_{ik}^{[0]} + h/2 f_{i,k+1}^{[1]} &\Rightarrow 1 \\ &(\nu=1,2,\dots) \end{aligned} \right\}$				
6									
7	015	1016	1034	1015					
8		1035		1010					
9	012	1010	1039	1010					
0	002			1020	$(y_{i,k+1}^{[v]} - y_{i,k+1}^{[v+1]}) \Rightarrow \alpha$				
1	015	1015	1020	1002	$P(\varepsilon = 0.5 \times 10^{-t} < \alpha ^{1002})$				
1012	015	1010	1036	1019					
3					<table><tr><td>011</td><td></td><td></td><td>N₂</td></tr></table>	011			N ₂
011			N ₂						
4	111	1004	0056	1014					
5	111	1014	0016	1015					

1020	111	1014	0001	1020											
1	012	1014	1015	1021											
2	111	1004	0016	1022											
3	111	1022	0056	1023											
4	012	1022	1023	1024											
5	012	1020	1022	1025											
6	012	1020	1023	1026											
7	012	1021	1023	1027	<table><tr><td>—</td><td>a</td><td>—</td><td>a+n</td><td>l_1</td></tr><tr><td>—</td><td>a+n</td><td>—</td><td>a+n</td><td>l_2</td></tr></table>	—	a	—	a+n	l_1	—	a+n	—	a+n	l_2
—	a	—	a+n	l_1											
—	a+n	—	a+n	l_2											
8	012	1021	1024	1028											
9	012	1026	1028	1029											
0	012	1025	1028	1020											
1	012	1021	1022	1021											
2	012	1025	1021	1022											
3	012	1022	1022	1023											
4	012	1015	1025	1024											
5	012	1009	1021	1025											
1030	012	1009	1028	1030											
1	012	1010	1029	1031											
2	012	1010	1020	1032											
3	012	1010	1022	1033											
4	012	1010	1023	1034											
5	012	1010	1024	1035											
6	012	1011	1022	1036											
7	019	0001		0001											
1038		0001	0001	0001											
9		0001	0001												
0	013	0005	0213	0162	(或为 013 21359962)										

003	a	$\frac{h}{2}$	a	l_3
003	a+n	$\frac{h}{2}$	a+n	l_4
001	a+n	a	a+2n	l_5
001	a+2n	a	a+n	l_6
001	a+2n	a	a	l_7
001	a+3n	a	a	l_8
002	a+n	a	a	l_9
002	a+2n	a	a	l_{10}