数模与电算基础

（化学化工专用）

下　　册

程 光 钺 编 著

一九八〇年六月

0242
1/2

目　　次

下　　册

第三篇　概率论与数理统计基础

第四篇　数学模型的建立

第三篇 概率论与数理统计基础

第十一章 概率论的基本概念

第一节 随机事件的概率

在自然界中的各种现象，概括说来可分为两类。一类称做确定性现象，此类现象的特点是只要实现一定的条件，必然会产生某种确定的结果。另一类称做随机现象，其特点是在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果。或者说，就某一特定的结果而言，它可能出现也可能不出现。对于随机现象，虽然在进行一次观测时会出现这种不确定性或偶然性，但是当人们在同一条件下多次重复观测，就会发现，在偶然性的表面现象背后隐藏着必然性的规律，即统计规律。概率论和数理统计就是研究这些规律的学科。

我们把在一定条件下对随机现象的观测称为试验，并把试验的结果叫做事件。事件常用拉丁字母A、B、C……表示。设进行了n次试验，其中某事件A出现n_A次，则$\frac{n_A}{n}$称做该事件出现的频率记做W｛A｝，即

$$W\{A\}=\frac{n_A}{n} \tag{11—1}$$

对于相同的试验而言，随着试验次数n的增加，人们会发现频率将围绕某一个定数摆动，此定数称为事件A的概率，记做P｛A｝。P｛A｝是事件A出现可能性的数量表征，W｛A｝是P｛A｝的近似值。

根据频率与概率的定义，可以认为对于任何事件A恒有：

$$0\leqslant P\{A\}\leqslant 1 \tag{11—2}$$

在试验中必须出现的事件称为必然事件，一般用U表示。由于$n_U=n$，故

$$W\{U\}=\frac{n}{n}=1$$

于是有

$$P\{U\}=1 \tag{11—3}$$

在试验中一定不出现的事件称为不可能事件，一般用V表示。由$n_V=0$，可知

$$W\{V\}=0$$

因此

$$P\{V\}=0 \tag{11—4}$$

如果有两个事件A与B，则在事件B发生的条件下事件A发生的概率，称做在B条件下A的概率记做$P\{A|B\}$。

现讨论事件A与事件B之间可能存在的几种关系：

（1）包含：如B发生则A必发生，我们就称A包含B记做$B\subset A$。

（2）等价：如A与B相互包含，即$B\subset A$同时$A\subset B$，则称A与B等价，记做$A=B$。

（3）和：A与B至少有一个发生的事件叫做事件A与事件B之和，记做$A\cup B$。类似地可定义n个事件A_1，A_2，……A_n中至少有一个发生的事件为事件A_1，A_2，……A_n的和记做

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cdots\cup A_n$$

或

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

同样可定义可数个事件A_1，A_2，……A_n，……中至少有一个发生的事件为事件A_1，A_2，……A，……的和，记做

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

（4）积：A与B都发生的事件叫做事件A与事件B之积，记做AB。类似地可定义n个事件A_1，A_2，……A_n都发生的事件为事件A_1，A_2，……A_n的积记做

$$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$$

或

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

同样可定义可数个事件A_1，A_2，……A_n，……都发生的事件为可数个事件之积记做

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

（5）互不相容：如A与B不可能同时发生，则称A与B是互不相容的。显然，如A与B互不相容则：

$$AB=V \qquad (11-5)$$

（6）互不相容事件和：若A与B互不相容，则其和记做$A+B$。推广之，若A_1，A_2，……A_n彼此不相容，则其和记做

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} A_i$$

可数个彼此互不相容的事件的和记做

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

（7）对立：事件A不发生的事件，称做A的对立事件，记做$\overline{A}$（读做“非A），显然，A与$\overline{A}$中必有一个发生，而不可能同时发生：

$$A \cup \overline{A} = U \tag{11—6}$$

$$A\overline{A} = V \tag{11—7}$$

（8）定备事件组：如n个事件A_1，A_2，…… A_i中必有一个发生，但任何两个都不能同时发生，则称这n个事件构成一个定备事件组，显然

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n = U \tag{11—8}$$

$$A_iA_j = V \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n,\ j=1,\ 2\cdots\cdots n,\ i \neq j) \tag{11—9}$$

（9）独立：如果事件B的发生与否，对事件A发生的概率无影响：

$$P\{A \mid B\} = P\{A\} \tag{11—10}$$

则称事件A独立于B。

第二节　概率的运算

§2·1：概率的加法法则

概率的加法法则可表述为：

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} \tag{11—11}$$

对此法则可以这样来理解：设如图11—1所示，共进行了n次试验，其中：

A出现而B不出现有n_1次，

A不出现而B出现有n_2次，

A、B都出现有n_3次，

A、B都不出现有n_4次，

由于只可能出现以上四种情况所以

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$$

根据频率之定义并参照图11—1可知

$$W\{A\} = \frac{n_1 + n_3}{n}$$

$$W\{B\} = \frac{n_2 + n_3}{n}$$

$$W\{AB\} = \frac{n_3}{n}$$

$$W\{A \cup B\} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}$$

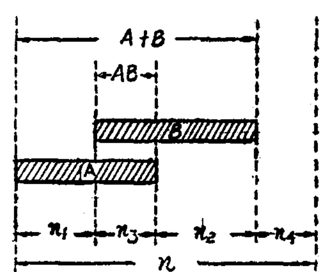

图11—1，概率的加法法则与乘法法则

故

$$W\{A \cup B\} = W\{A\} + W\{B\} - W\{AB\} \tag{11—12}$$

在上式中，把各事件的频率换成它的概率即得（11—11）。

下面给出加法法则的推论：

（1）设A、B是两个互不相容事件，则

$$P\{A+B\}=P\{A\}+P\{B\} \quad (11\text{—}13)$$

证：由假设有$AB=V$，而$P\{AB\}=P\{V\}=0$，由（11—11）即得（11—13）

（2）设A_1，A_2，……A_n是两两互不相容事件，则

$$P\{A_1+A_2+\cdots A_n\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}+\cdots+P\{A_n\} \quad (11\text{—}14)$$

或写成

$$P\{\sum_{i=1}^{n}A_i\}=\sum_{i=1}^{n}P\{Ai\}$$

证：$P\{A_1+A_2+\cdots+A_n\}=P\{A_1+(A_2+\cdots+A_n)\}=P\{A_1\}+P\{A_2+\cdots+A_n\}$

$$=\cdots\cdots=P\{A_1\}+P\{A_2\}+\cdots+P\{A_n\}$$

此外，如我们有可数个两两互不相容的随机事件A_1，A_2，$\cdots A_i$，$\cdots$，则有

$$P\{\sum_{i=1}^{\infty}A_i\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{A_i\}$$

（3）如果$A\subset B$，则

$$P\{A\}\leqslant P\{B\} \quad (11\text{—}15)$$

证：因$B=A+B\overline{A}$，由（11—13）得$P\{B\}=P\{A\}+P\{B\overline{A}\}$，而$P\{B\overline{A}\}\geqslant 0$，故得（11—15）。

（4）
$$P\{A\}=1-P\{\overline{A}\} \quad (11\text{—}16)$$

证：我们有$A+\overline{A}=U$，$A\overline{A}=V$，于是有$P\{A+\overline{A}\}=1$，$P\{A\}+P\{\overline{A}\}=1$

§2·2 概率的乘法法则

概率的乘法法则可表述为

$$P\{AB\}=P\{A\}\cdot P\{B|A\}=P\{B\}\cdot P\{A|B\} \quad (11\text{—}17)$$

自图11—1可知，在事件A发生的条件下，事件B发生频率为$n_3/(n_1+n_3)$，记做$W\{B|A\}$，称做条件频率：

$$W\{B|A\}=\frac{n_3}{n_1+n_3}=\frac{n_3/n}{(n_1+n_3)/n}=\frac{W\{AB\}}{W\{A\}}$$

类似地可得

$$W\{A|B\}=\frac{n_3}{n_2+n_3}=\frac{n_3/n}{(n_2+n_3)/n}=\frac{W\{AB\}}{W\{B\}}$$

把以上两式中各事件的频率换成概率，条件频率换成条件概率即得（11—17），而且有

$$P\{B|A\}=\frac{P\{AB\}}{P\{A\}} \quad (P\{A\}>0)$$

和

$$P\{A|B\}=\frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \quad (P\{B\}>0)$$

下面给出乘法法则的推论

（1）若A独立于B，则

$$P\{AB\}=P\{A\}\cdot P\{B\} \quad (11\text{—}18)$$

证：由$P\{A|B\}=P\{A\}$与$P\{AB\}=P\{B\}P\{A|B\}$即得。

（2）若A独立于B，则B也独立于A。

证：由$P\{AB\}=P\{A\}P\{B\}=P\{A\}P\{B|A\}$得$P\{B|A\}=P\{B\}$。换言之，两事件A、B的独立性是相互的。我们可以把两事件A与B相互独立定义为：若A与B满足条件$P\{AB\}=P\{A\}P\{B\}$则称A与B是相互独立的。

（3）若A与B相互独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立。

证：略

（4）设A_1，$A_2\cdots A_n$是n个事件，i_1、$i_2\cdots i_k$是k个自然数，而且$1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_k\leqslant n$，若

$$P\{A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\}=P\{A_{i_1}\}P\{A_{i_2}\}\cdots P\{A_{i_k}\} \quad (11\text{—}19)$$

$$(k=2,3\cdots\cdots n)$$

则称A_1，A_2，$\cdots A_n$是整体独立的。特别是当$k=n$，即$i_1=1$，$i_2=2$，$\cdots i_n=n$时，有

$$P\{A_1A_2\cdots A_n\}=P\{A_1\}P\{A_2\}\cdots\cdots P\{A_n\} \qquad (11\text{—}20)$$

第十二章　随机变量及其描述

第一节　分布函数与密度函数

试验的结果（特别是在科技领域内）大多借助于试验中某个或某些变量取得之值，用数量的形式表示出来。表徵这种随机试验结果的变量称为随机变量。如果这种随机变量只有一个，则称它是一维随机变量。相反，如果涉及的随机变量有n个（$n>1$），而在所讨论的问题中又把它们作为一组同时加以考虑，则称这一组随机变量为n维随机变量。如随机变量至少在某一区间可连续取值，则称之为连续型随机变量。相反如随机变量只能取有限个或可数多个值，则称之为离散型随机变量。

首先从离散型随机变量讨论起。如前所述随机变量（用ξ表示）是随机事件的数量特徵，故离散型随机变量在某一定条件下的某一次试验中究竟取何值是难以确定的，但若进行大量试验就会发现它取某个值x的频率（取值x的次数与试验总次数之比）围绕某一值摆动，这个值就叫做ξ取值x的概率用$P\{\xi=x\}$表示。对于离散型随机变量ξ，如果我们知道ξ可能取的每个值x_1，$x_2 \cdots\cdots x_r$，……以及分别取每个值的概率

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= P\{\xi = x_1\} \\ p_2 &= P\{\xi = x_2\} \\ &\vdots \\ p_n &= P\{\xi = x_n\} \end{aligned}\right\} \qquad (12-1)$$

或

$$p_i = P\{\xi = x_i\} \qquad (i = 1、2\cdots\cdots n)$$

那么从统计意义上来讲，我们就已对离散型随机变量进行了描述。

上式称为离散型随机变量ξ的概率分布。根据此式及概率的加法法则不难看出，随机变量小于某x值的概率$P\{\xi<x\}$是随机变量等于诸x_i（而x_i满足$x_i<x$）的概率之和$\sum\limits_{x_i<x} P\{\xi=x_i\}$。由此可见$P\{\xi<x\}$是x的函数，称作$\xi$的分布函数，记作$F(x)$，于是

$$F(x) = P\{\xi<x\} = \sum_{x_i<x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{x_i<x} P_i \qquad (12-2a)$$

显然，当ξ只取有限个值x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$时，$F(x)$是一个阶梯型的函数，如图12—1所示

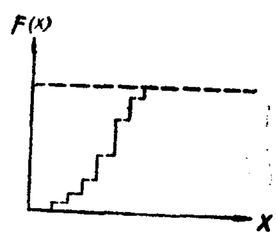

图12—1　离散型随机变量的分布函数

自（12—1）和（12—2a）不难看出

$$\begin{aligned} P\{x_i \leqslant \xi < x_j\} &= P\{\xi<x_j\} - P\{\xi<x_i\} \\ &= F(x_j) - F(x_i) \qquad (12-2b) \end{aligned}$$

随着离散型随机变量每相邻值的间隔逐渐减小，图12—1中每一阶梯的宽度也逐渐减小。当相邻值间隔趋于零时，离散型随机变量就过渡到连续型随机变量，而分布函

数曲线的形式也由阶梯过渡到一光滑曲线（图12—2），于是（12—2a）右端的和$\sum\limits_{x_i<x} P_i$过渡到积分 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$，其中$f(x)\geqslant 0$。

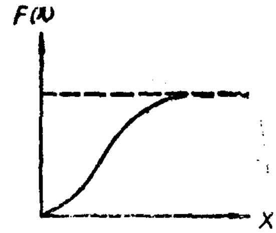

图12—2　连续随机变量的分布函数

设F（x）是随机变量ξ的分布函数，如果存在非负函数f（x）使得

$$F(x)=P\{\xi<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (12\text{—}3)$$

则称ξ作连续型随机变量，f（x）称作连续型随机变量ξ的密度函数（或分布密度）。在f(x)连续区有

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \qquad (12\text{—}4a)$$

其次，当$x_1<x_2$时又有

$$P\{x_1\leqslant\xi<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (12\text{—}4b)$$

当dx很小时，有

$$P\{x\leqslant\xi<x+dx\}=\int_{x}^{x+dx} f(x)dx=f(x)dx \qquad (12\text{—}5)$$

如果$dx\to 0$，　由（12—5）可得

$$P\{\xi=x\}=0 \qquad (12\text{—}6)$$

由（12—3）还可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=P\{\xi<\infty\}=1$$

分布密度（密度函数）具有如图12—3之形式，自上式可知曲线与x轴所夹之面积等于1。

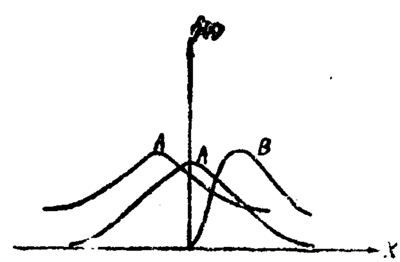

图12—3　常见的连续型随机变量密度函数示意图　A对称型　B非对称型

关于多维随机变量，我们只讨论二维的情况。设有二维随机变量（ξ，η），如存在有非负的函数f（x，y），使得事件ξ<x与事件η<y同时发生的概率（即P{ξ<x，η<y}）满足以下关系式

$$P\{\xi<x,\ \eta<y\}=F(x,y)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy \qquad (12\text{—}7)$$

则称（ξ，η）为二维连续型随机变量，F（x，y）称为（ξ，η）的联合分布函数，f(x，y)称为其联合密度函数。

$F(x, y)$和$f(x, y)$具有如下性质：

(1) $1 \geqslant F(x, y) \geqslant 0$

$f(x, y) \geqslant 0$

(2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y)$

(3) $F(-\infty, y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$

$F(x, -\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$

$$F(\infty, \infty) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y)$$

$$= P\{\xi < \infty, \eta < \infty\} = 1$$

(4) $F(x, \infty) = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$

$$= P\{\xi < x, \eta < \infty\} = P\{\xi < x\} = F_1(x) \qquad (12—8)$$

在这里$F_1(x)$为随机变量ξ取值小于x（η 可取任意值）之概率，因此就是ξ的分布函数，也可称为(ξ, η)的边际分布函数

令
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \qquad (12—9)$$

则

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy]\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx$$

由此可知$f_1(x)$就是ξ的密度函数

同理

$$F(\infty, y) = P\{\xi < \infty, \eta < y\} = P\{\eta < y\} = F_2(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{y} [\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx]\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\, dy$$

式中$F_2(y)$为η的分布函数，或(ξ, η)的边际分布函数。$f_2(y)$为η的密度函数。

(5) 如果对于任何实数 x，y，事件$(\xi < x)$和事件$(\eta < y)$独立，则称ξ与η为独

立的随机变量，此时

$$P\{\xi<x,\ \eta<y\} = P\{\xi<x\}\cdot P\{\eta<y\}$$

$$F(x,\ y) = F_1(x)F_2(y)$$

$$f(x,\ y) = f_1(x)f_2(y)$$

$z=f(x,\ y)$ 是一张曲面，称为密度函数曲面（见图12—4）它的形状象是一顶草帽。曲面与 xy平面所夹之面积等于 1 。在该图中所绘柱体之体积等于随机变量取值于 S 范围内的概率。

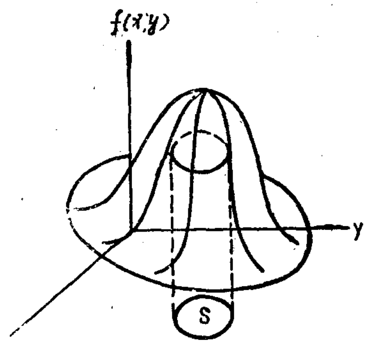

图12—4　二维随机变量的密度函数曲面示意图

第二节　随机变量的数字特征

§2·1数学期望

为了简便地描述随机变量概率的分布情况，有时我们可以不必给出其分布函数或密度函数，而只给出它们的一些特徵量。这些特徵量中最常用的就是数学期望和方差。

随机变量ξ的数学期望又叫做均值，记做E｛ξ｝。对离散型随机变量，其定义为：

$$E\{\xi\} = x_1\cdot P\{\xi=x_1\} + x_2\cdot P\{\xi=x_2\} + \cdots\cdots + x_n\cdot P\{\xi=x_n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \qquad (12—10)$$

从这一定义可以看出：数学期望就是随机变量ξ所取的诸值x 的以 P_i 为权的加权平均（注意 $\sum_{=1}^{\infty} P_i = 1$ ）。

与此相应，对连续型随机变量，其E｛ξ｝之定义为：

$$E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (12—11)$$

显然它也是在ξ的全部可能取值范围（$-\infty$，∞）内，考虑到x 为不同值时密度函数不同这一情况，所求之平均值。

对于连续型随机变量之函数，也有类似的定义。

设g(ξ)是ξ的连续单值函数，则g(ξ)之数学期望为

$$E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \qquad (12—12)$$

设g（ξ）是二元随机变量（ξ，η）的连续单值函数，则g（ξ，η）之数学期望为

$$\{g(\xi,\ \eta)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\ y)f(x,\ y)dxdy \qquad (12—13)$$

数学期望有如下的性质：

(1)设k为常数，k可以看作是一个恒取值为k的随机变量ξ，$P\{\xi=k\}=1$，于是有

$$E\{k\}=E\{\xi\}=kP\{\xi=k\}=k \qquad (12\text{—}14)$$

以下性质只就连续型随机变量加以证明。

（2）设k是一个常数，则

$$E\{k\xi\}=kE\{\xi\} \qquad (12-15)$$

证：按（12—12）有

$$E\{k\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty}kxf(x)dx$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=kE\{\xi\}$$

（3）设ξ，η是随机变量，则

$$E\{\xi+\eta\}=E\{\xi\}+E\{\eta\} \qquad (12\text{—}16a)$$

证：按（12—13）有

$$E\{\xi+\eta\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx+\int_{-\infty}^{\infty}y\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy$$

$$=E\{\xi\}+E\{\eta\}$$

推广：设ξ_1，ξ_2……ξ_n是n个随机变量，则

$$E\{\xi_1+\xi_2+\cdots\cdots\xi_n\}=E\{\xi_1\}+E\{\xi_2\}+\cdots\cdots+E\{\xi\} \qquad (12\text{—}16b)$$

（4）设ξ，η是独立随机变量，则

$$E\{\xi\eta\}=E\{\xi\}E\{\eta\} \qquad (12\text{—}17)$$

证：由（12—13）得

$$E\{\xi,\eta\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_1(x)f_2(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy$$

$$=E\{\xi\}\cdot E\{\eta\}$$

§2·2 方差

数学期望作为随机变量ξ的特徵量，描述出平均讲来ξ值为多少。但由于ξ是散布在一定范围之内的，因此还需要一个特征量来描述其分散程度。为此常采用方差，并记做$V\{\xi\}$。

对离散型和连续性随机变量，其定义分别为：

$$V\{\xi\}=E\{(\xi-E\{\xi\})^2\}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E\{x\})^2\cdot P_i \quad (12—18)①$$

$$V\{\xi\}=E\{(\xi-E\{\xi\})^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\{x\})^2f(x)dx \quad (12—19)①$$

由定义可看出，其意义是先求各种可能的x值与数学期望值（均值）E｛x｝之差，然后求这些差数平方，最后再按（12—10）或（12—11）的方法对这些差数之平方求平均。显然x在其平均值E｛x｝左右分散程度越高，V｛ξ｝越大，反之则越小。因此方差V｛ξ｝可以表征出随机变量之分散程度。

对于二元连续随机变量（ξ、η），除了ξ与η各有自己的方差V｛ξ｝和V｛η｝外，还可以定义所谓协方差COV｛ξ，η｝如下

$$COV\{\xi,\eta\}=E\{(\xi-E\{\xi\})(\eta-E\{\eta\})\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\{x\})(y-E\{y\})f(x,y)dxdy \quad (12—20)$$

方差具有如下性质：

（1）设k为常数，则

$$V\{k\}=0 \quad (12—21)$$

（2）设k为常数，ξ为随机变量，则

$$V\{k\xi\}=k^2V\{\xi\} \quad (12—22)$$

证：自（12—19）有

$$V\{k\xi\}=E\{k\xi-E\{k\xi\}\}^2$$
$$=E\{k(\xi-E\{\xi\})\}^2$$
$$=k^2E\{\xi-E\{\xi\}\}^2=k^2V\{\xi\}$$

（3）设ξ，η为两随机变量，则

$$V\{\xi+\eta\}=V\{\xi\}-2COV\{\xi,\eta\}+V\{\eta\} \quad (12—23)$$

证：$V\{\xi+\eta\}=E\{\xi+\eta-E\{\xi+\eta\}\}^2$
$$=E\{\xi-E\{\xi\}\}^2-2E\{(\xi-E\{\xi\})(\eta-E\{\eta\})\}$$
$$+E\{\eta-E\{\eta\}\}^2$$
$$=V\{\xi\}-2COV\{\xi,\eta\}+V\{\eta\} \quad (12—22)$$

如果ξ，η是独立的，则不难证明

$$COV\{\xi,\eta\}=0$$

于是$V\{\xi+\eta\}=V\{\xi\}+V\{\eta\}$ （12—24）

以上结果可推广至n维随机变量。即若ξ_1，$\xi_2\cdots\xi_n$两两独立，则

$$V\{\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_n\}$$
$$=V\{\xi_1\}+V\{\xi_2\}+\cdots V\{\xi_n\} \quad (12—25)$$

（4）方差与数学期望间存在有如下的关系

$$V\{\xi\}=E\{\xi^2\}-(E\{\xi\})^2 \quad (12—26)$$

---

① E｛(ξ—E｛ξ｝)²｝今后简记为E｛ξ—E｛ξ｝｝²。

证： $V\{\xi\}=E\{\xi-E\{\xi\}\}^2$

$$=E\{\xi^2-2\xi E\{\xi\}+(E\{\xi\})^2\}$$

$$=E\{\xi^2\}-2E\{\xi\}E\{\xi\}+(E\{\xi\})^2$$

$$=E\{\xi^2\}-(E\{\xi\})^2$$

（5）方差与数学期望间的另一个重要关系称作 Чебышев （契贝谢夫）不等式（证明从略）：

$$P\{\ |\xi-E\{\xi\}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{V\{\xi\}}{\varepsilon^2}$$

式中 ε 为一个任意的正实数。这个不等式表示随机变量与其数学期望的差的绝对值不小于某一数值 ε 之概率不超过 $V\{\xi\}/\varepsilon^2$。

§2·3　随机变量的标准化变换

记随机变量 ξ 的数学期望 $E\{\xi\}$ 为 μ，方差为 σ^2，则随机变量

$$\eta=\frac{\xi-\mu}{\sigma} \qquad (12—27)$$

称为 ξ 的标准化随机变量。自 ξ 变换为 η 称为 ξ 的标准化变换。可以证明随机变量 η 的数学期望为0，方差为1。

$$E\{\eta\}=E\{\frac{\xi-\mu}{\sigma}\}=\frac{1}{\sigma}E\{\xi-\mu\}$$

$$=\frac{1}{\sigma}(E\{\xi\}-\mu)=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0 \qquad (12—28)$$

由（12—26）与（12—28）可得

$$V\{\eta\}=E\{\eta^2\}-(E\{\eta\})^2$$

$$=E\{(\frac{\xi-\mu}{\sigma})^2\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}E\{(\xi-\mu)^2\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1 \qquad (12—29)$$

随机变量的标准化变换是很重要的，在后面我们常会遇到。

第三节　随机变量的几种重要分布

下面介绍几种重要的分布。这对以后的讨论是必不可少的。

§3·1　正态分布及其计算程序

正态分布是连续型随机变量概率分布中的一种，也是最重要的一种。它不仅反映出随机现象的普遍规律性之一，而且实践证明大多数科技范围内的实验测定值及其误差都服从这一分布。

正态分布的定义是这样的：若连续型随机变量 ξ 的密度函数具有如下形式

$$\phi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0,\ -\infty<x<\infty)\tag{12—30}$$

则称ξ服从μ和σ为参数的正态分布。正态分布记做N（μ，σ）。随机变量ξ服从正态分布可记做

$$\xi\sim N(\mu,\sigma)\tag{12—31}$$

只须进行如下的参量变换

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma}\tag{12—32}$$

并利用几个数学公式①，便可以证明式（12—30）中的μ和σ^2就是服从正态分布的随机变量ξ的数学期望和方差：

$$E\{\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty}x\phi_{\mu,\sigma}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{②}{=}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma u)e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}+0$$

$$=\mu\tag{12—33}$$

$$V\{\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\phi_{\mu,\sigma}dx$$

$$\overset{③}{=}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2u^2e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sigma^2\tag{12—34}$$

---

① $\int_{\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}$，$\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-u^2/2}du=0$，$\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}$

②自式（12—32）可知$x=\mu+\sigma u$，$dx=\sigma du$，$(x-\mu)^2=\sigma^2u^2$