蘇州師範專科學校

文 集

·首届理科学术讨论会论文专辑·

要　目

WENJI

目　　录

数　学　专　业

物　理　专　业

生　物　专　业

化　学　专　业

斐波那契数列通项的几种表达式

赵 振 威

斐波那契（Fibonacci）数列，俗名“兔子数列”，它的许多有趣性质，在近代最优化理论中起着重要作用。本文的目的，在于寻求斐波那契数列通项的各种不同表达形式，以从一个侧面，沟通高等数学和初等数学的内在联系，探索高等数学对初等数学的指导作用。

一

数列f_0，f_1，f_2，…，f_n，…如果满足

$$f_0=1,\qquad f_1=1; \tag{1}$$

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \tag{2}$$

$$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,$$

就称为斐波那契数列。其中（1）称为斐波那契数列的初始值；（2）称为斐波那契数列的递推关系；数列中的各项，称为斐波那契数，简称为F数。

下面用五种方法推求斐波那契数列的通项公式。

方法 1 变易递推关系（2）的系数，经过逐项迭代将原题归结为二元一次方程组。令$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$，则递推关系变为

$$f_n=(\alpha+\beta)f_{n-1}-\alpha\beta f_{n-2}.\ (n\geqslant 2)$$

变形后得

$$\begin{cases} f_n-\beta f_{n-1}=\alpha(f_{n-1}-\beta f_{n-2}), \\ f_n-\alpha f_{n-1}=\beta(f_{n-1}-\alpha f_{n-2}). \end{cases}$$

同理，有

$$\begin{cases} f_{n-1}-\beta f_{n-2}=\alpha(f_{n-2}-\beta f_{n-3}), \\ f_{n-1}-\alpha f_{n-2}=\beta(f_{n-2}-\alpha f_{n-3}). \end{cases}$$

……

$$\begin{cases} f_2-\beta f_1=\alpha(f_1-\beta f_0), \\ f_2-\alpha f_1=\beta(f_1-\alpha f_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1-\beta f_0=1-\beta=\alpha, \\ f_1-\alpha f_0=1-\alpha=\beta. \end{cases}$$

把以上各式逐次向上迭代，有

$$\begin{cases} f_n-\beta f_{n-1}=\alpha^n, \\ f_n-\alpha f_{n-1}=\beta^n. \end{cases}$$

消去f_{n-1}，即得

$$f_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

注意到α，β为方程$u^2-u-1=0$ 的两根，有

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad \alpha-\beta=\sqrt{5}.$$

所以，f_n的通项是

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].\qquad (3)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

方法 2 直接利用推求循环数列通项的一般方法来处理。数列$\{f_n\}$是一个二阶循环数列，它的循环方程为

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}.\qquad (n\geqslant 2)$$

所以，特征方程为 $q^2=q+1$，即

$$q^2-q-1=0.$$

从而，特征根为

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

这样，$\{f_n\}$的通项可记作

$$f_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$$

依初始值$f_0=f_1=1$，得

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}C_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}C_2=1. \end{cases}$$

解方程组得

$$C_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\qquad C_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].\qquad (3)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

方法 3 递推关系（2）实际上是一个差分方程，所以也可以用母函数法求解。以F数为系数构造一个形式幂级数：

$$F(t)=f_0+f_1t+f_2t^2+\cdots+f_nt^n+\cdots.\qquad (4)$$

（4）式两边乘t，t^2，分别得到

$$tF(t)=f_0t+f_1t^2+f_2t^3+\cdots+f_{n-1}t^n+f_nt^{n+1}+\cdots,$$

$$t^2F(t)=f_0t^2+f_1t^3+f_2t^4+\cdots+f_{n-2}t^n+f_{n-1}t^{n+1}+\cdots.$$

两式相加，并注意到递推关系（2），有

$$\begin{aligned} &tF(t)+t^2F(t) \\ &=f_0t+(f_1+f_0)t^2+(f_2+f_1)t^3+\cdots+(f_{n-1}+f_{n-2})t^n+\cdots \\ &=f_1t+f_2t^2+f_3t^3+\cdots+f_nt^n+\cdots \end{aligned}$$

$$=F(t)-1.$$

由此可解得

$$F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}.$$

利用部分分式法可得

$$F(t)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-at}-\frac{b}{1-bt}\right).$$

其中$1-t-t^2=(1-at)(1-bt)$，且

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

将$(1-at)^{-1}$，$(1-bt)^{-1}$展开，得

$$F(t)=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}[a(at)^n-b(bt)^n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}t^n. \qquad (5)$$

比较（4），（5）式t^n的系数，即得

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \qquad (3)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

方法 4　把$\{f_n\}$所满足的关系式，看作线性方程组，依克莱姆(Cramer)法则求解。依斐波那契数列的定义，有

$$\begin{cases} f_0=1,\ f_1=1, \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}.\ (n\geqslant 2) \end{cases}$$

把上面的方程组看作关于f_1，f_2，…，f_n的线性方程组，解方程组变形后即得

$$f_n=\begin{cases} 1, & (n=0) \\ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{(n阶)}. & (n\in N) \end{cases} \qquad (6)$$

方法 5　从杨辉三角形入手，通过观察，猜测$\{f_n\}$通项的结构形式，再用数学归纳法推证。观察杨辉三角形（如图１）。

由此可以猜想斐波那契数列通项可能是

$$f_n=\begin{cases} C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}, & (n为偶数) \\ C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}. & (n为奇数) \end{cases} \qquad (7)$$

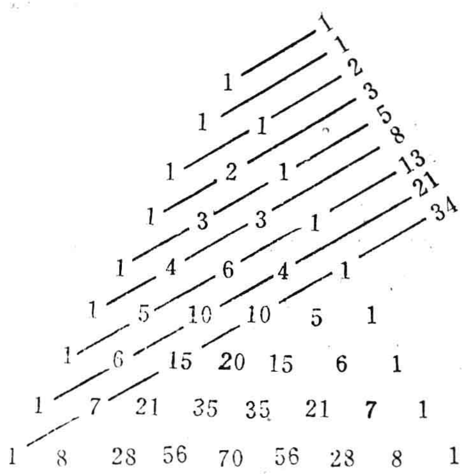

图 1

下面用数学归纳法来证明以上的猜想。

奠基。当n＝0，1时，结论显然成立。

归纳。假定当n＝k，k－1时结论成立，先考察k为偶数的情形，依递推关系（2），有

$$
\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
&= \left(C_k^0 + C_{k-1}^1 + C_{k-2}^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\right) + \left(C_{k-1}^0 + C_{k-2}^1 + C_{k-3}^2 \right. \\
&\quad \left. + \cdots + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1}\right) \\
&= C_k^0 + \left(C_{k-1}^1 + C_{k-1}^0\right) + \left(C_{k-2}^2 + C_{k-2}^1\right) + \cdots + \left(C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}-1}\right) \\
&= C_k^0 + C_k^1 + C_{k-1}^2 + \cdots + C_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}} \\
&= C_{k+1}^0 + C_k^1 + C_{k-1}^2 + \cdots + C_{\frac{(k+1)+1}{2}}^{\frac{(k+1)-1}{2}}.
\end{aligned}
$$

这就表明，当n为偶数时，猜想的结论成立。

同理可证，当n为奇数时，猜想的结论也是正确的。

因此，对一切非负整数，通项公式（7）成立。

二

前面我们用多种方法推求斐波那契数列的通项，得到（3），（6），（7）三种表达式，这些外形迥异的表达式，有着密切的内在联系。这里择要作一剖析。为了节省篇幅，在推求过程中我们将直接利用以下已知恒等式：

1°
$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \end{vmatrix}$$
（n阶）
$$=\frac{(c+\sqrt{c^2-4ab})^{n+1}-(c-\sqrt{c^2-4ab})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}. \quad (8)$$

2°
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}$$
（n阶）
$$=\begin{cases} C_n^0 a^n + C_{n-1}^1 a^{n-2} + C_{n-2}^2 a^{n-4} + \cdots + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}, & (n\text{为偶数}) \\ C_n^0 a^n + C_{n-1}^1 a^{n-2} + C_{n-2}^2 a^{n-4} + \cdots + C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n-1}{2}} a. & (n\text{为奇数}) \end{cases}$$

3°
$$C_{n+1}^{2k+1} C_k^k + C_{n+1}^{2k+3} C_{k+1}^k + \cdots + C_{n+1}^{n+1} C_{\frac{n}{2}}^k$$
$$=2^{n-2k} C_{n-k}^k. \ (n\text{为偶数}) \quad (10)$$

4°
$$C_{n+1}^{2k+1} C_k^k + C_{n+1}^{2k+3} C_{k+1}^k + \cdots + C_{n+1}^{n} C_{\frac{n+1}{2}}^k$$
$$=2^{n-2k} C_{n-k}^k. \ (n\text{为奇数}) \quad (11)$$

利用恒等式1°—4°，容易从（6）式推出（3）、（7）式，从（3）式推出（7）式。

1. （6）$\Longrightarrow$（3）

从（6）式推导（3）式，实质上就是计算由（6）式给出的n阶行列式。依恒等式1°，在（8）式中令$a=c=1$，$b=-1$，有
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
（n阶）
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$
$$n=1, 2, \cdots.$$
上式右边当$n=0$时其值为$1(=f_0)$，于是

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\qquad (3)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

2. （6）$\Longrightarrow$（7）

从（6）式推导（7）式，就是寻求行列式的组合数表达式。依恒等式2°，在（9）式中令$a=1$并注意到$C_0^0=1(=f_0)$，便得

$$f_n=\begin{cases} C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}, & (n\text{为偶数}) \\ C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}. & (n\text{为奇数}) \end{cases}\qquad (7)$$

3. （3）$\Longrightarrow$（7）

从（3）式推导（7）式，关键在于将（3）式展开，当n为偶数时，依二项式定理，并利用恒等式3°，有

$$\begin{aligned} f_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ &=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\Big[\Big(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1\sqrt{5}+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}(\sqrt{5})^{2k+1}+\cdots+ \\ &\quad +C_{n+1}^{n+1}(\sqrt{5})^{n+1}\Big)-\Big(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1\sqrt{5}+\cdots-C_{n+1}^{2k+1}(\sqrt{5})^{2k+1} \\ &\quad +\cdots-C_{n+1}^{n+1}(\sqrt{5})^{n+1}\Big)\Big] \\ &=\frac{1}{2^n}\left[C_{n+1}^1+C_{n+1}^3\cdot 5+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}\cdot 5^k+\cdots+C_{n+1}^{n+1}\cdot 5^{\frac{n}{2}}\right] \\ &=\frac{1}{2^n}\Big[C_{n+1}^1+C_{n+1}^3(1+4)+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}(1+4)^k+\cdots+ \\ &\quad +C_{n+1}^{n+1}(1+4)^{\frac{n}{2}}\Big] \\ &=\frac{1}{2^n}\Big[\Big(C_{n+1}^1+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}\Big)+4\Big(C_{n+1}^3C_1^1+ \\ &\quad +C_{n+1}^5C_2^1+\cdots+C_{n+1}^{2k+1}C_k^1+\cdots+C_{n+1}^{n+1}C_{\frac{n}{2}}^1\Big)+\cdots+4^k\Big(C_{n+1}^{2k+1}C_k^k \\ &\quad +C_{n+1}^{2k+3}C_{k+1}^k+\cdots+C_{n+1}^{n+1}C_{\frac{n}{2}}^k\Big)+\cdots+4^{\frac{n}{2}}C_{n+1}^{n+1}\Big] \\ &=\frac{1}{2^n}\left[2^n+2^2\cdot 2^{n-2}C_{n-1}^1+\cdots+2^{2k}\cdot 2^{n-2k}C_{n-k}^k+\cdots+2^nC_{n+1}^{n+1}\right] \\ &=C_n^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-k}^k+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

当n为奇数时，利用恒等式4°，同理可得

$$\begin{aligned} f_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ &=C_n^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-k}^k+\cdots+C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

这样我们就从（3）式得到了（7）式。

三

纵观斐波那契数列通项的各种推导方法和不同表达式，我们可以得到不少有益的启示。

首先，斐波那契数列通项的五种推导方法，各有其不同的特点，就所用的知识而论，方法 1 和方法 5 大体上是在初等数学范围内活动的；方法 2 属于函数论范畴；方法 3 以组合数学的基础理论为背景；方法 4 则是涉及到线性代数的基本知识。

从解题思路和适用范围来分析，方法 1 灵活巧妙富于技巧性，但其本身有一定的局限性，为什么令 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$，往往只能从配凑法的角度来解释。方法 2 直接套用现成公式，解法比较呆板，适用范围甚广，有关循环数列的通项问题，一般都可按此求解。方法 3 构思活泼，前景广阔，母函数的思想方法还可以处理组合数学和概率统计中的其它问题。方法 4 充分注意递推关系的线性特征，用线性方程组理论处理，方法灵活别致。方法 5 循着“观察——归纳——猜想——证明”的思路求解，在数学的学习和研究中具有普遍的意义。

由此可见，高等数学和初等数学，在内容上和方法上都是密切联系的，同一个数学问题常常可以从各个不同的领域，通过不同的途径进行求解。

其次，斐波那契数列通项的三种不同表达形式也各有其长处，（3）式是封闭型表达式，容易由n确定f_n的值，（6）式和（7）式结构简洁，便于记忆，分别沟通了斐波那契数列与行列式、组合论的联系，为利用线性代数和组合数学理论处理斐波那契数列性质开辟了新的道路。

例如，n阶连分行列式通常是这样定义的：

$$(a_1,a_2,\cdots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

（12）式按前k行展开整理后得

$$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_k)(a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n)+(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})(a_{k+2},a_{k+3},\cdots,a_n). \qquad (13)$$

在（13）式中，令$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，$n=2k$，并注意到（6）式，即得斐波那契数列的一个重要性质：

$$f_{2k}=f_k^2+f_{k-1}^2.$$

即斐波那契数列两相邻项的平方之和，也是一个斐波那契数列。

又如，连分行列式与连分数有以下联系：

$$\frac{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{(a_2,a_3,\cdots,a_n)}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}. \qquad (14)$$

在（14）式中令$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，即得

复变函数教材中的典型错误分析

施庭训

在部份新出版的复变函数教材中存在若干错误。本文目的是分析与纠正这些错误。但在正文中，为了缩短篇幅，只纠正其中一个典型错误。其它问题，放在附录中讨论。

在正文中，为了讨论“复数乘积的幅角的集合所应满足的有关等式”，笔者一开始就提出了该等式所必须遵循的笛卡儿积（直积）的原则。然后根据这一原则，对错误的等式进行分析、比较和检验。

文中的例子主要引自下列书籍：

〔1〕余家荣《复变函数》人民教育出版社。

〔2〕王省富《复变函数》，国防工业出版社。

〔3〕陆庆乐《复变函数学习方法指导书》人民教育出版社。

〔4〕张楚廷《复变函数论学习指导》湖南科技出版社

一

从实轴正向到非零复数$z=x+iy$所对应的向量$\overrightarrow{oz}$向的夹角θ合于

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots+\cfrac{1}{1}}}.$$

这就建立了斐波那契数列和连分数的联系，这样利用连分数的性质易得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

这就表明，斐波那契数列通项的不同表达式，是沟通数学事物内部联系的有力杠杆，是由此及彼的桥梁。

第三，从上面的讨论中，我们还不难看出，熟悉方法2或方法3，就容易解释在方法1中，为什么要令$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$；了解通项的不同表达式就便于拓宽视野，沟通数学知识的纵横联系；并且，恰当地把高等数学和初等数学知识结合起来考察，还可以推进求异思维，发展思维的灵活性和创造性。凡此种种，从一个侧面表明了高等数学对于初等数学潜在的指导意义。因此，作为一位称职的中学数学教师，不仅要熟悉初等数学，弄通中学数学教材，而且应掌握和通晓高等数学的基础理论。只有这样，在工作中才能左右逢源，不断创新，始终保持着开拓前进的后劲。

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

称为复数z的辐角，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z$$

由于任一非零复数z有无穷多个辐角，故以argz表示其中一特定值，并称合于

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的那一个是Argz的主值（主辐角）。

显然有：

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

为了给出复数乘积辐角的正确表达，我们必须对两个辐角无穷集合之相加作出定义。

设 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$

显然有

$$\mathrm{Arg}z_1=\arg z_1+2k_1\pi \qquad k_1=0,\ \pm1,\ \cdots$$
$$\mathrm{Arg}z_2=\arg z_2+2k_2\pi \qquad k_2=0,\ \pm1,\ \cdots$$

此处 $\arg z_1$，$\arg z_2$均为主值。

关于“$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$”之定义：

为了定义“$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$”，我们首先要给出于$\mathrm{Arg}z_1$、$\mathrm{Arg}z_2$的笛卡儿积（直积）：

$$\mathrm{Arg}z_1\times'\mathrm{Arg}z_2$$
$$=\{(x,\ y)\mid x\in\mathrm{Arg}z_1,\ y\in\mathrm{Arg}z_2\}$$

而后给出$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$之定义为：

$$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=\{x+y\mid(x,\ y)\in\mathrm{Arz}_1\times\mathrm{Arg}z_2\}$$

在这两个幅角和集合的笛卡儿直积的定义中，我们应注意到，$\mathrm{Arg}z_1$，$\mathrm{Arg}z_2$ 虽然都是数集，然而$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$并非通常的两个集合之并，即：在一般情况下，

$$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\neq\mathrm{Arg}z_1\cup\mathrm{Arg}z_2$$

在这里，笛卡儿直积是一项原则，它体现在两复数相乘其辐角所满足的等式中：

设 $z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$$z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2]+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$=r_1r_2[\cos\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

复数相乘就是它们的模相乘，而辐角相加。

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

等式（1）的两端是无穷多值的，于是（1）应理解为这等式的左端的值的集合和其右端的值的集合完全一样。显然（1）式之成立符合笛卡儿直积之定义。当然，等式（1）的成立说明下列事实：

不等于零的两个复数z_1及z_2，它们乘积的辐角是这样的一个无穷值集，它恰与在笛卡儿直积定义下的z_1及z_2辐角和这个无穷值集完全一致。

例如 $\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，$\arg z_2=\frac{\pi}{4}$

则 $\operatorname{Arg} z_1=\{\frac{\pi}{6}+2n\pi\}\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\operatorname{Arg} z_2=\{\frac{\pi}{4}+2m\pi\}\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\{\frac{5}{12}\pi+2k\pi\}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

这时，等式（1）左边集合中任取一个数，相当于取定一个k值，必定可以在右边的集合中分别取n与m的值，使右边的和数等于左边的值；反过来当然也对。

关于n个辐角和"$\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n$"的笛卡儿积的定义：

为了定义"$\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n$"（$z_1\neq0\quad z_2\neq0,\cdots,z_n\neq0$），我们同样要作出n个集合$\operatorname{Arg} z_1$，$\operatorname{Arg} z_2$，…，$\operatorname{Arg} z_n$的笛卡儿积：

$$\operatorname{Arg} z_1\times\operatorname{Arg} z_2\times\cdots\times\operatorname{Arg} z_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in\operatorname{Arg} z_1,\ x_2\in\operatorname{Arg} z_2,\cdots,x_n\in\operatorname{Arg} z_n\}$$

因此，$\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n$按笛卡儿积的原则应定义为：

$$\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n=\{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\operatorname{Arg} z_1\times\operatorname{Arg} z_2\times\cdots\times\operatorname{Arg} z_n\}$$

事实上，当n个复数相乘时，设$z_1\neq0$，$z_2\neq0$，…，$z_n\neq0$

$$z_i=x_i+iy_i=r_i(\cos\theta_i+\sin\theta_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$

同样可得

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots|z_n|$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2\cdots z_n)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n$$

上述等式的含意与等式（1）相同，显然，也符合笛卡儿积的定义。这就是说，不等于零的n个复数z_1，z_2，…z_n，它们乘积的辐角所组成的集合是与该n个复数按笛卡儿定义下的幅角和集合相等的。

二

在余家荣编《复变函数》中有这样一段：

$$z_1=|z_1|(\cos\operatorname{Arg} z_1+i\operatorname{sn}\operatorname{Arg} z_1)$$

$$z_2=|z_2|(\cos\operatorname{Arg} z_2+i\sin\operatorname{Arg} z_2)$$

由乘法的定义得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2)+i\sin(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2)]$$

由此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2\quad(2.7)$$

……………………

最后考虑复数的乘幂·先考虑$z \neq 0$的情形。设n是整数，z^n表示n个z的乘积，由乘法规则得

$$z^n = |z|^n [\cos(n\mathrm{Arg}z) + i\sin(n\mathrm{Arg}z)]$$

……………………

现在我们来研究上面最后一个等式，并记之为

$$z^n = |z|^n [\cos(n\mathrm{Arg}z) + i\sin(n\mathrm{Arg}z)] \qquad (2)$$

在〔4〕中P.12—P.15得出了下列错误等式：

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}z \qquad (3)$$

为证明(3)式之错误我们先依据笛卡儿定义给出正确表达：

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{\text{共n个}} = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{\text{共n个}} [\cos(\underbrace{\theta + \theta \cdots + \theta}_{\text{共n个}}) + i\sin(\underbrace{\theta + \cdots + \theta}_{\text{共n个}})]$$

$$= r^n [\cos(\underbrace{\mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z + \cdots + \mathrm{Arg}z}_{\text{共n个}})$$

$$+ i\sin(\underbrace{\mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z + \cdots + \mathrm{Arg}z}_{\text{共n个}})] \qquad (4)$$

由(4)可得到(5)

$$\mathrm{Arg}z^n = \underbrace{\mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z + \cdots + \mathrm{Arg}z}_{\text{共n个}} \qquad (5)$$

(5)式作为两边完全相同集合的等式，它是复数乘积辐角的正确表达。

(3)式是错误的，而不能认为(2)式也是错误的。因此，不能认为(3)是(2)的推论。

对于(3)式，当取$n=2$时，可以更明显地看出错误。

由(5)，$\mathrm{Arg}z^2 = \underbrace{\mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z}_{\text{共二个}}$ ……(6)

$$= \{(x+y) \mid (x,y) \in \mathrm{Arg}z \times \mathrm{Arg}z\}$$

若 $\arg z = \theta$

则 $\mathrm{Arg}z^2 = 2\theta + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \cdots$

$\mathrm{Arg}z = \theta + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \cdots$

$\mathrm{Arg}z = \theta + 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \cdots$

显然可见，等式(6)的两边的无穷数值之集合亦是完全一致的。

然而，$\mathrm{Arg}z^2 = 2\mathrm{Arg}z$ ……(7)

并不完全一致。

$$\mathrm{Arg}z^2 = \{2\theta + 2k\pi\}$$

$$= \{2\theta, 2\theta \pm 2\pi, 2\theta \pm 4\pi, 2\theta \pm 6\pi$$

$$2\theta \pm 8\pi, 2\theta \pm 10\pi, 2\theta \pm 12\pi, \cdots\}$$

而 $2\mathrm{Arg}z = (\theta + 2n\pi)\} = \{2\theta + 4n\pi\}$

$$= \{2\theta, 2\theta \pm 4\pi, 2\theta \pm 8\pi, 2\theta \pm 12\pi, \cdots\}$$

显然，当 Arg^2中取$\{2\theta \pm (2\pi + 4n\pi)\}_{n=0,1,2,3}$

$= \{2\theta \pm 2\pi, 2\theta \pm 6\pi, 2\theta \pm 10\pi, 2\theta \pm 14\pi, \cdots\}$时，

这些值在2Argz中取不到。也就是说（7）式并非为两边数值集合的等式 。

可以进一步证明，当$n\geqslant 2$（n为自然数）时，（5）式是正确的（3）式是错误的。

再看王省富编《复变函数》一书P＝140：

记 $$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

$-\pi<\arg z\leqslant\pi$，通常称lnz为Lnz的主值枝。

容易验证，对数函数具有下列四个性质：

1．$\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$

2．$\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$

3．$\mathrm{Ln}(z^n)=n\cdot\mathrm{Ln}z$

4．$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\dfrac{1}{n}\mathrm{Ln}z$

实际上，上面第三个等式不成立。先看，当$n=2$时，按第三个等式，有：

$$\mathrm{Ln}(z^2)=2\mathrm{Ln}z \qquad (8)$$

然而，式（8）是否成立呢？

$$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}|z_1z_2|+i\mathrm{Arg}(z_1z_2)$$

$$\mathrm{Ln}z_1=\mathrm{Ln}|z_1|+i\mathrm{Arg}z_1$$

$$\mathrm{Ln}z_2=\mathrm{Ln}|z_2|+i\mathrm{Arg}z_2$$

从而$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$作为两旁各是无穷集合的等式是成立的。因为该等式的含意实质上已转化为对

$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$的理解。

但是，当$z_1=z_2=z$时，只能正确表述为

$$\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z \qquad (9)$$

而对等式（9）成立的理解实质应转化为：对

$\mathrm{Arg}z^2=\mathrm{Arg}z+\mathrm{Arg}z$的理解

而等式（9）的成立不能转化为对

$\mathrm{Arg}z^2=2\mathrm{Arg}z$等式成立的理解。

因此，式（8）是错误的。

同样，$\mathrm{Ln}(z^n)=n\mathrm{Ln}z(n\geqslant 2)$也是错误的。

但是，显然，只有

$$\mathrm{Ln}(z^n)=\underbrace{\mathrm{Ln}z+\cdots+\mathrm{Ln}z}_{\text{共}n\text{个}} \qquad (10)$$

才是正确的表述式。

有一道题目，是个悖论题目：

下列推论有错吗？如果有错，错在哪里？

（1）因为　$(-z)^2=z^2$，

（2）所以　$\mathrm{Ln}(-z)^2=\mathrm{Ln}z^2$，

（3）于是　$\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$

（4）所以　$2\mathrm{Ln}(-z)=2\mathrm{Ln}z$

（5）故得　　$\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z$

上述题目的错误不在第二步到第三步，实际上，

$$\mathrm{Ln}(-z)^2=\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)$$

是正确的

$$\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$$

也是正确的，从而

$$\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$$

亦正确，但是

$$\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)\neq 2\mathrm{Ln}(-z)$$

因此

$$\ln z+\ln z\neq 2\ln z\neq 2\ln z$$

$$2\mathrm{Ln}(-z)\neq 2\mathrm{Ln}z$$

在陆庆乐编《复变函数学习方法指导书》P64上正确地指出：

"但对等式

$$n\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(z^n)$$

情形就不一样（n为正数），我们以$n=2$为例来看。因为，如果设$z=re^{i\theta}$，得

$$2\mathrm{Ln}z=2\mathrm{Ln}r+i(2\theta+4k\pi)\qquad k=0,\pm1,\cdots$$

而从$z^2=r^2e^{i2\theta}$，得

$$\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}r^2+i(2\theta+2m\pi)\qquad m=0,\pm1,\cdots$$

所以两者的实部虽相等，而虚部可能取的值却不尽相同。例如对k的各值，虚部中π的系数为

$$0,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm12,\ \cdots$$

而对m的各值，π的系数为

$$0,\pm2,\pm4,\pm6,\pm8,\pm10,\pm12,\cdots$$

所以等式两端可能取的值从全体看不一致。"

此外，还有一些书上能举些数字说明$\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$不成立。但是，这些书上往往未能说明不能成立的原因，即，不能说明不能将n个辐角Argz在笛卡儿积定义下的和集合看作是nArgz；其次，这些书上也往往不能恰当地说明积的辐角之集合与各因子的辐角和集合之间的相互关系，以致在客观上忽视了等式（5）及等式（10）的存在性。

四

我们对下列"等式"进一步讨论：

$$\mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z$$

正如上面已分析过的，这个等式并不成立。但是，如果想运用它来部份表达复数乘积的辐角时，那义，必须注明，两边作为无穷值的集合，等式只能部份表达它们之间数值的相等关系。。而不相等的数值其间相差2π的整数倍。

这种"加注"的做法，在国外某些书上是有先例的。例如：伦兹和艾尔斯哥尔兹著《复变函数与运算微积初步》一书中P7与P28用两个注记说明上述等式和$\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$等式立的限制条件。

高等几何对中学几何教学的指导意义

席振伟

高等几何是师范专科学校数学专业的重要基础课之一，开设这门课程对学生毕业后从事中学几何教学具有怎样的指导意义，这是每一个学习高等几何的师专学生想要搞清的。本文从三个方面论述这一问题。

一、研究中学几何教材观点的提高

几何学的研究，有静的观点和动的观点两种，公理法建立几何学是研究几何的静的观点，变换群下对应的几何学是研究几何的动的观点，这两种观点是贯穿高等几何教材内容的两条主线。

高等几何教材的几何基础部分，就是讨论怎样用公理法来建立几何学的。学习这部分内容，可使学生具体地认识几何公理和公理化体系在几何研究中的重要作用，以加深对中学几何教材的理解。

首先，公理化方法说明，不同公理体系可以建立不同几何学，从而说明任何几何学和几何定理都是相对于某种公理系统而言的，因而它们只是具有相对的真理性，不是永恒的绝对真理。事实上，若将希尔伯特公理体系的平行公理换成罗巴切夫斯基——波里埃公理，而保持其余的公理不变，便得双曲型非欧几何。历史上，从公元前320年欧几里德《几何原本》问世后，到公元1826年2月23日非欧几何诞生为止，围绕欧氏第五公设的一场持续两千多年的争论，要解决的就是这样一个问题。确立上述观点，教学上就能避免犯绝对化和形而上学的错误。同时，掌握几何公理和公理化方法，也有利于学生了解和认识欧氏几何的历史发展过程，以利于全面地、整体地把握中学几何。

其次，几何中许多问题的透彻理解，必须依赖公理化方法。例如，射影几何中为什么成立对偶原理而在欧氏几何中却不可能？其原因是射影几何三组公理的对偶命题都成立，而在欧

加注以后，可以避免等式无条件成立的错误。但是，仍有以下几个缺点：

第一：它不是复数乘积的辐角所应满足等式的完整表述；

第二：左端的无穷值集合中仍有无穷个值设有右端集合中的值与之对应；

第三：最主要的缺点是：由于忽略了笛卡儿积的原则，客观上造成以讹传讹，以致后来有些编写者，有意或无意地在不加注记的条件下误认为错误的等式可以无条件成立，因而读者和学生接受了不正确的表述。

因此，我们建议，对今后复变函数的这部份内容，要进行认真探讨，纠正错误，并且按笛卡儿积的原则加以完善。

附录：略