大系統的最优控制与稳定性分析的某些方法

贺建勋　曾昭磐

厦　门　大　学
常微分方程与最优控制教研室
科学技术情报研究室

大系统的最优控制与稳定性分析的某些方法

贺建勋　　曾昭磐

（厦门大学）

§1 引言

所谓大系统，通常指的是一些规模宏大，结构复杂、影响因素众多且有综合功能或多个目标的系统。这些系统可以是工程的或非工程的。例如大型钢铁企业体系，化工联合企业体系，区域性或全国性的电力网络，城市交通网络，大型数字通讯网络，经济计划管理系统，海洋生态系统，资源开发与综合利用系统，污染控制与环境保护系统、大型科研或工程项目的组织与管理系统以及现代化的军事指挥系统等等。这种大系统的数学模型通常要用较多的变量，甚高的阶数和结构十分复杂的关系式来描述，这些关系式不一定都是确定性的和集中型的，它们可以是带迟滞的或分布型的，也可能是具有随机性或模糊性的。但目前研究得比较多的经过简化了的、常见的模型是由常微分方程描述的系统，例如形如

(1.1)　　$\dot{x}=F(x,t)$

或

(1.2)　　$\dot{x}=F(x,u,t)$

的系统，这里 x 是一个维数较高的 n 维的状态向量；F 可以视为是一个结构复杂的向量函数；u 为 m 维控制向量或输入向量、t 表示时间。

一个大系统，通常是由许多具有纵横关系的包含许多不同功能的部分所组成，因此它常可以分解为若干个（例如 N 个）存在

着某种相互关联的子系统。亦即整体系统（1.1）或（1.2）可以分解为N个子系统

(1.3) $$\dot{x}_i = f_i(x_i, t) + g_i(x, t) \quad (i=1,\cdots,N)$$

或

(1.4) $$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, t) + g_i(x, t) \quad (i=1,\cdots,N)$$

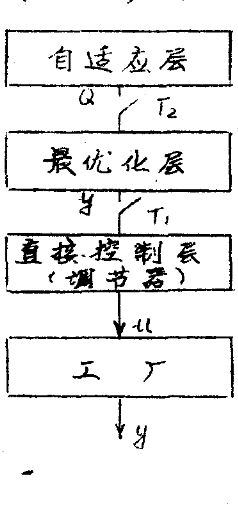
研究分析一个大系统，要考虑的问题是多方面的。关于对大系统的正确理解和在控制理论中的地位以及发展概况可参看文献[22]。有关大系统的各种问题和对部分问题较为详细的文献综述可参看后引文献[1]、[22]。

本文仅就可以描述成为上述形式（1.3）和（1.4）的大系统的最优控制与稳定性分析的某些方法作一介绍。下面§2中叙述目前常采用的实现大系统最优控制的主要途径，即多级递阶控制方法。§3中介绍分析大系统稳定性的两种方法，即向量李雅普诺夫函数方法与输入—输出方法。这里介绍的内容是基本的，仅说明我们对这些方面的学习刚刚开始并打算今后在这些方面将继续工作。

§2 大系统最优控制的多级递阶方法

I. 概述

上节中已经说明，一个复杂的大系统，常由若干相互关联的子系统组成。而这些子系统又不是以集中的方式进行控制的。因为在实际的复杂工业控制系统中，控制系统通常都采用多层结构的形式，这时控制的确定系按不同时标来运算。图1象征性的表示一个三层控制结构[3]。其中工厂控制变量u系由调节器确定，以使将规定的输出变量y在T_1时间内达到其要求的目标值y^d，而在T_2 [$T_2 > T_1$]时间内y^d的值则由最优层来规定。在计算这些数值的T_2时间内，一些环境参数θ都是给定的。自适应层规定每一长为T_2的时间结束时θ的校正值。



为了解决这种多层结构大系统的最优控

制问题，可把这种大系统分解为许多各自较为独立而又相互制约的子系统，先解决这些子系统的最优化；然后由高一级的控制来协调各子系统，以达到全系统的整体最优化的目的，这样，就产生了大系统的所谓多级递阶控制方法。换句话说，将控制向量 u 分成若干子向量 $\{u_i\}$，而每个子向量 u_i 则根据各子系统和子目标来决定，为了使得这样决定的控制和整个系统与其整体目标密切配合，则由高级控制器来不断协调下一级控制器。

下面我们以两级控制结构为例，说明这种最优控制的解法。

Ⅱ．线性大系统的多级递阶控制

为了便于理解这种求解的方法，首先考虑一个线性二次型的大系统的最优控制问题的解法。由于这一方法的核心是分解与协调。下面着重说明这种分解与协调的思想。

设 n 阶线性大系统的状态方程为：

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}
$$

它取性能指标为二次型：

$$
(2.2)\qquad J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^{\tau}Qx+u^{\tau}Ru\right]dt
$$

为方便起见，假定 $n\times n$ 矩阵 A 由分块矩阵 A_{ij} 组成；B，Q，R 都是对角形矩阵，即 $B=diag(B_i)$，$Q=diag(Q_i)$，$R=diag(R_i)$，其中 $i,j=1,\cdots,N$。于是（2.1）和（2.2）式可以分解为 N 个 n_i 阶子系统：

$$
(2.3)\qquad \begin{cases} \dot{x}_i=A_{ii}x_i+B_iu_i+\sum\limits_{j\neq i}^{N}A_{ij}x_j \\ x_i(t_0)=x_{i0} \end{cases}\qquad (i=1,\cdots,N)
$$

和

$$
(2.4)\qquad J_i=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x_i^{\tau}Q_ix_i+u_i^{\tau}R_iu_i\right]dt\qquad (i=1,\cdots,N)
$$

其中

$$
(2.5)\qquad \sum_{i=1}^{N}J_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x_i^{\tau}Q_ix_i+u_i^{\tau}R_iu_i)dt=J
$$

并且 $x=(x_1^{\tau},\cdots,x_N^{\tau})^{\tau}$，$u=(u_1^{\tau},\cdots,u_N^{\tau})^{\tau}$，这里和以后 τ 表示向量或矩阵的转置，于是 x_i 表示第 i 个子系统的 n_i 维状态向量，u_i 为相应的 m_i 维控制向量，且有 $\sum\limits_{i=1}^{N}n_i=n$，$\sum\limits_{i=1}^{N}m_i=m$。

只有当每个子系统的方程和它的性能指标（目标函数）都能摆脱与其他子系统相应的状态变量及其控制变量的影响时，才称得上把大系统分解成了多个独立的子系统。因此在分解时，必须改变子系统的方程（模型法）和它的目标函数（目标法）。在协调时，常用两个原则，即平衡原则和预估原则[2]。下面，首先采用目标法分解而用平衡原则协调；其次用预估原则协调。

在（2.3）式中引入一辅助变量

$Z_i=\sum_{j\neq i}^{N}A_{ij}x_j$，它表示第 i 个子系统与其他子系统之间的相互联系限制向量，于是（2.3）变为：

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_iU_i + Z_i \\ x_i(t_0) = x_{i0} \end{cases}$$

$$(2.7)\qquad Z_i = \sum_{j\neq i}^{N} A_{ij}x_j$$

引进 Lagrange 乘子向量 λ_i，把（2.5）中的性能指标改变为

$$(2.8)\qquad \tilde{J} = \sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{t_f}\Big[\frac{1}{2}(x_i^{\tau}Q_ix_i + U_i^{\tau}R_iU_i) + \lambda_i^{\tau}\sum_{j\neq i}^{N}(A_{ij}x_j - Z_i)\Big]dt$$

这里（2.8）式表明，如果抛开各子系统之间的约束关系式（2.7）不管，则原系统的性能指标将受到惩罚。只有使子系统之间的约束条件满足时，才能达到原系统的最优化目的，即 $J=\tilde{J}$。

在（2.8）式中取 λ_i 为协调变量，把与 x_i，U_i，Z_i 有关的各项分为一组，就得到 N 个分离的子目标函数：

$$(2.9)\qquad \tilde{J}_i = \int_{t_0}^{t_f}\Big[\frac{1}{2}(x_i^{\tau}Q_ix_i + U_i^{\tau}R_iU_i) + x_i^{\tau}\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^{\tau}\lambda_j - Z_i^{\tau}\lambda_i\Big]dt \qquad i=1,\cdots,N$$

这样，我们就将原系统的最优化问题分解为 N 个子系统（2.6）.（2.9）的最优化问题，但是在（2.6）和（2.9）两式中，Z_i 都是以线性关系出现，它将导致最优化的奇异问题。一个避免奇异问题出现的方法是在（2.9）式中引入 Z_i 的二次

型，即将（2.9）变为

$$\tilde{J}_i=\int_{t_0}^{t_*}\left[\frac{1}{2}(x_i^{\tau}Q_ix_i+U_i^{\tau}R_iU_i+Z_i^{\tau}S_iZ_i)+x_i^{\tau}\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^{\tau}\lambda_j-Z_i^{\tau}\lambda_i\right]dt \quad i=1,\cdots,N \tag{2.10}$$

这种子系统的分解方法是通过改变目标函数而实现的（目标法）。

由（2.6）和（2.10）所决定的子系统的最优化问题为：求出一组 $x_i^*(t)$，$U_i^*(t)$，$Z_i^*(t)$，使 $\tilde{J}_i$ = 最小，并满足方程（2.6）。这可以用通常求最优控制的任何一种方法求解。现用最小值原理，作哈密顿函数：

$$H_i=\frac{1}{2}[x_i^{\tau}Q_ix_i+U_i^{\tau}R_iU_i+Z_i^{\tau}S_iZ_i]+x_i^{\tau}\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^{\tau}\lambda_j-Z_i^{\tau}\lambda_i+\psi_i^{\tau}[A_{ii}x_i+B_iU_i+Z_i] \tag{2.11}$$

由此立刻得出最优化解的必要条件：

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H_i}{\partial \psi_i^{\tau}}=A_{ii}x_i+B_iU_i+Z_i \quad （状态方程） \tag{2.12}$$

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H_i}{\partial x_i^{\tau}}=-A_{ii}^{\tau}\psi_i-Q_ix_i-\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^{\tau}\lambda_j \quad （伴随方程） \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial U_i}=R_iU_i+B_i^{\tau}\psi_i=0 \quad （控制方程） \tag{2.14}$$

最小值

$$\frac{\partial H_i}{\partial Z_i}=S_iZ_i+\psi_i-\lambda_i=0 \quad （辅助变量方程） \tag{2.15}$$

和边界条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}, \qquad \psi_i(t_*)=0 \tag{2.16}$$

于是我们可以由（2.12）～（2.16）求出下列形式的最优控制：

$$U_i(t)=-R_i^{-1}B_i^{\tau}\psi_i(t) \tag{2.17}$$

这里对线性二次型问题，可以令

$$\psi_i(t)=P_i(t)x_i(t)-\xi_i(t) \tag{2.18}$$

来解我们的问题，将（2.18）代入（2.13）之后得下面两个等式：

$$\begin{cases}\dot{P}_i(t)=-P_i(t)A_{ii}-A_{ii}^{\tau}P_i(t)+P_i(t)[B_iR_i^{-1}B_i^{\tau}+S_i^{-1}]P_i(t)-Q_i\\ P_i(t_*)=0\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_i(t) = [P_i(t)(B_i R_i^{-1} B_i^{\tau} + S_i^{-1}) - A_{ii}^{\tau}]\xi_i(t) + P_i(t) S_i^{-1}\lambda_i(t) \\
\qquad + \sum\limits_{j\neq i}^{N} A_{ji}^{\tau}\lambda_j(t) \\
\xi_i(t_f) = 0
\end{cases}
$$

这就把问题化为求解一个黎卡迪矩阵微分方程和一个线性向量微分方程了。其中黎卡迪方程和状态变量及协调变量都无关，因此整个问题只要一次求解就够了。

为了校正协调变量 λ_i，可以采用最速上升的梯度法：

(2、19) $$\lambda_i^{j+1} = \lambda_i^{j} + \beta\, grad_{\lambda_i^j} H$$

其中 $H = \sum\limits_{i=1}^{N} H_i$，$grad_{\lambda_i^j} H = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i^j} = [\sum\limits_{k\neq i}^{N} A_{ik} x_k^j - Z_i^j]$；$\beta > 0$；$x_i^j(t)$ 和 $Z_i^j(t)$ 为第 j 步时 i 子系统的最优化递推解。

这个校正协调过程要进行到 $\sum\limits_{k\neq i}^{N}[A_{ik} x_k^j(t) - Z_i^j(t)] \approx 0$ 为止，这时各子系统之间的相互制约关系才完全满足，从而也就得到了大系统的最优控制问题的解。

这种协调方法实际上运用了平衡原则，即当各子系统之间的约束条件得到平衡时，我们便得到了大系统的最优解。

现在我们采用预估原则来协调。

把（2．3）式改写为

(2、20) $$\dot{x}_i(t) = A_{ii} x_i(t) + B_i U_i(t) + \varphi_i(t)$$

(2．21) $$\varphi_i(t) = \sum_{j\neq i}^{N} m_{ij}(t)$$

(2、22) $$m_{ij} = A_{ij} x_j(t)$$

重新引入 Lagrange 乘子将原系统的目标函数改变为：

(2.23) $$\tilde{J} = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_f} [\frac{1}{2}(x_i^{\tau} Q_i x_i + U_i^{\tau} R_i U_i) + \sum_{j\neq i}^{N} \lambda_{ij}^{\tau}(A_{ij} x_j - m_{ij})]\,dt$$

现在取 λ_{ij} 和 m_{ij} 为协调变量，并从（2、23）式中分离出

第 i 个子系统的目标函数：

$$(2.24)\qquad \tilde{J}_i=\int_{t_0}^{t_*}\Big[\frac{1}{2}\left(x_i^\tau Q_i x_i+U_i^\tau R_i U_i\right)+\sum_{j\neq i}^{N}\lambda_{ij}^\tau A_{ji} x_i-\lambda_{ji}^\tau m_{ji}\Big)\Big]dt$$

由（2.20），（2.21），（2.24）作哈密顿函数：

$$H_i=\frac{1}{2}x_i^\tau Q_i x_i+\frac{1}{2}U_i^\tau R_i U_i+\sum_{j\neq i}^{N}\left(\lambda_{ji}^\tau A_{ji}x_i-\lambda_{ji}^\tau m_{ji}\right)+\psi_i^\tau\Big(A_{ii}x_i+B_iU_i+\sum_{j\neq i}^{N}m_{ij}\Big)$$

就得第 i 个子系统最优化的必要条件：

$$(2.25)\qquad \dot{x}_i=\frac{\partial H_i}{\partial \psi_i}=A_{ii}x_i+B_iU_i+\sum_{j\neq i}^{N}m_{ij}(t)$$

$$(2.26)\qquad \dot{\psi}_i=-A_{ii}^\tau\psi_i-Q_ix_i-\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^\tau\lambda_{ji}(t)$$

$$(2.27)\qquad \frac{\partial H_i}{\partial U_i}=R_iU_i+B_i^\tau\psi_i=0$$

和边界条件

$$(2.28)\qquad x_i(t_0)=x_{i0}\quad,\quad \psi_i(t_*)=0$$

和在平衡法中一样，若令

$$\psi_i(t)=P_i(t)x_i(t)-\xi_i(t)$$

代入（2.26），就得到下面形式的黎卡提矩阵和向量方程：

$$\begin{cases}\dot{P}_i(t)=P_i(t)A_{ii}-A_{ii}^\tau P_i(t)+P_i(t)B_iR_i^{-1}B_i^\tau P_i(t)-Q_i\\ P_i(t_*)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\xi}_i(t)=\left(P_i(t)B_iR_i^{-1}-A_{ii}^\tau\right)\xi(t)+P_i(t)\sum_{j\neq i}^{N}m_{ij}(t)\\ \qquad\qquad+\sum_{j\neq i}^{N}A_{ji}^\tau\lambda_{ji}(t)\\ \xi_i(t)=0\end{cases}$$

由此，和上面平衡法中一样，就可以求出各子系统的最优反馈控制 $U_i^*(t)$ 来。

这里的协调方法是使 m_{ij} 和 λ_{ij} 两变量满足哈密顿函数的鞍点条件。如果采用梯度法，可得

$$m_{ij}^{k+1}=m_{ij}^{k}-\alpha\frac{\partial H}{\partial m_{ij}}$$

$$\lambda_{ij}^{k+1}=\lambda_{ij}^{k}+\beta\frac{\partial H}{\partial \lambda_{ij}}$$

其中 $\alpha\beta>0$， $H=\sum_{i=1}^{N}H_i$ 。

参数 m_{ij} 和 λ_{ij} 的这种数值更新的方法叫做预估方法，而协调器都把参数的预估值送到子系统里去。

Ⅲ．一般非线性大系统的多级递阶控制．

现在我们来考虑一般的非线性大系统：

(2.29) $\begin{cases}\dot{x}=F(x,u,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$

设它由 N 个子系统．

(2.30) $\dot{x}_i=f_i(x_i,u_i,t)+g_i(x,t)$

(2.31) $x_i(t_0)=x_{i0}$

组成，其中 $x\in R^n$，$x_i\in R^{n_i}$，$u_i\in R^{m_i}$·并且假定控制 u 的选取受不等式：

(2.32) $u(t)\in U(x(t),t)=\{u\,|\,q(x(t),u,t)\le 0\}$

的约束。其性能指标为：

(2.33) $$J(u)=S(x(t_*))+\int_{t_0}^{t_*}E(x(t),u(t),t)\,dt$$

我们的目的要求一个 $u^*(t)\triangleq(u_1^{*}(t)\cdots,u_N^{*}(t))^T$ 满足约束条件 (2.30)～(2.32) 并使 J 取极小值。

在所有这些方法中，通常要求函数 g_i，q，S 和 E 具有某种分离性。亦即下列关系式中某些个成立：

(2.34) $$g_i(x,t)=\sum_j g_{ij}(x_j,t)$$

(2.35) $$q(x,u,t)=\sum_j q_j(x_j,u_j,t)$$

(2.36) $$S(x)=\sum_j S_j(x_j)\qquad E(x,u,t)=\sum_j E_j(x_j,u_j,t)$$

现在设所有这些关系式都成立，并假定控制约束（2.35）是

去耦的，则原来最优控制问题（2.29）、（2.32）、（2.33）可以改写成在约束条件

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, t) + Z_i(t) & (i=1,\cdots,N) \quad (2.37)_1 \\
x_i(t_0) = x_{i0} & (i=1,\cdots,N) \quad (2.37)_2 \\
Z_i(t) = \sum_j g_{ij}(x_i, t) & (i=1,\cdots,N) \quad (2.37)_3 \\
g_j(x_i, u_i, t) \le 0 & (i=1,\cdots,N) \quad (2.37)_4
\end{cases}
$$

下，求一组控制向量 $u_1^*(t), \cdots, u_N^*(t)$，使

$$(2.38) \quad J = \sum_{i=1}^{N} \left[S_i(x_i(t_*)) + \int_{t_0}^{t_*} E_i(x_i, u_i, t)\, dt \right]$$

取极小值。这样，我们就通过利用相关变量 $Z_i(t)$，把原来的问题化为一组形式上暂时独立的 N 个子问题了。

下面，我们首先分解为 N 个独立的子问题求解，这时视 Z_i 是可以用于第 i 个控制器的控制变量的一部分。协调器用来修正每个局部控制的目标函数，应用 Lagrange 二重性定理[8]，就可以不断修正 λ 的值，最后达到全系统的最优。

引进 Lagrange 量

$$
\begin{aligned}
L(x_i, u_i, Z_i, \lambda) &= \sum_{i=1}^{N} \Big\{ S_i(x_i(t_*)) + \int_{t_0}^{t_*} [E_i(x_i, u_i, t) + \\
&\qquad \lambda_i^{\tau} (Z_i - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(x_i, t))]\, dt \Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} L_i
\end{aligned}
$$

显然，其中

$$
\begin{aligned}
L_i(x_i, u_i, Z_i, \lambda_i) = S_i(x_i(t_*)) + \int_{t_0}^{t_*} [E_i(x_i, u_i, t) + \\
\lambda_i^{\tau} (Z_i - \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(x_i, t))]\, dt
\end{aligned}
$$

于是在第一级上首先对于给定的 λ 值，将 Lagrange 量分离为 N 个独立的最小化问题，即分别求出

$$(2.39) \quad \min_{x_i, u_i, Z_i} L_i = \min_{x_i, u_i, Z_i} \Big\{ S_i(x_i(t_*)) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_*}[E_i(x_i,u_i,z_i)+\lambda_i(z_i-\sum_{j=1}^{N}g_{ij}(x_i,t)]dt\}$$

同时要求满足约束条件

$$(2.40)\quad\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(x_i,u_i,t)+z_i(t)\\ x_i(t_0)=x_{i0}\\ q_{ri}(x_i,u_i,t)\leq 0\end{cases}$$

实际上就是在这一级暂时给定λ的值，分别求出每个子系统的最优化问题 $\min L_i \triangleq \phi_i(\lambda)$，然后令

$$(2.41)\quad \phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\min L_i=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\lambda)$$

由 Lagrange 二重性定理[8]得出：

$$(2.42)\quad \min_{u_i} J(u)=\max_{\lambda}\phi(\lambda)$$

根据上面（2.39）～（2.42）的讨论，在协调级（第二级）里，只要对第一级求出的 $\phi(\lambda)$ 进行最大化，即求 $\max\limits_{\lambda}\phi(\lambda)$ 就得出新的λ值。

这里所谓求出新的λ值，实际上就是对第一级里暂时给定的λ值进行校正。把校正过的λ值又代回到第一级里，使上述的两级计算过程重新开始。这是一个递推运算过程。λ的值可以用梯度法（最速上升法）进行计算，也就是从 j 到 $j+1$ 的递推过程如下：

$$\lambda^{j+1}=\lambda^{j}+\alpha^{j}d^{j}$$

其中 $d^{j}=\mathrm{grad}\,\phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}[z_i-\sum_{j=1}^{N}g_{ij}(x_i,t)]$ 表示 $\phi(\lambda)$ 的梯度，$\alpha^{j}>0$。

上述递推过程要进行到 $d^{j}\to 0$ 时为止，也就是说，只有当各子系统之间的相互约束条件（2.37）式得到满足时，各子系统的最优化才代表了全系统的整体最优化。两级控制器的结构如图2所示：

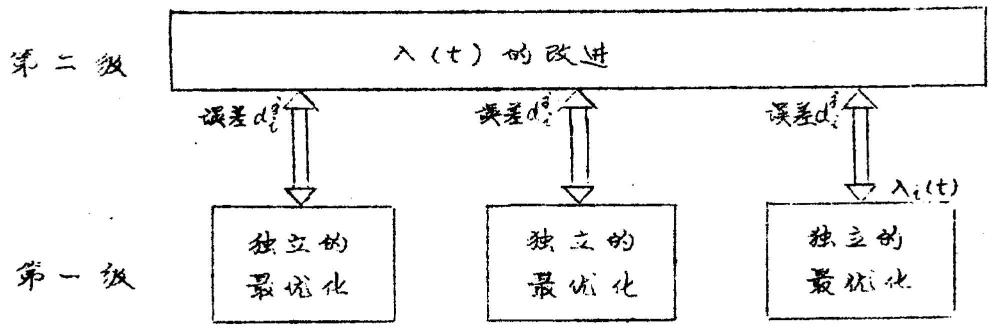


图 2　两级控制器结构

我们可把大系统的分级递阶控制方法归纳如下：

i）在第一级上把大系统分解为多个子系统，在暂时割断各子系统的相互联系的条件下，分别求出各子系统的对应于某些暂时确定的协调变量的最优控制（分解问题）；

ii）在第二级上把各子系统的分解控制再联系起来进行协调（协调问题）。在理论上，可以设计出这样的协调器，以使 $\sum_{i=1}^{N}\left[Z_i-\sum g_{ij}(x_i,t)\right]=0$ 也就是各子系统之间的相互制约关系得到满足时，才能求出大系统的最优控制；

iii）分解和协调是一个问题的两个方面，是相对而存在的。每一步递推迭代过程都是上下两级交错，穿插进行的。

V、注记

1．我们此处采用的是目标分解和平衡协调（或预估协调）的方法，这是比较一般通行的方法，此种方法原则上不难推广到更多级的分级递阶控制中去。至于将大系统已分解为去耦的子系统之后，可以根据实际情况采用通常最优控制理论的办法来求解。经过反复协调，最后就可以达到整个系统的最优化。

2．分解的目的就是要把高阶的复杂的大系统分解为低阶的较简单的若干子系统，并引进某些辅助参量以使各子系统之间能暂时去掉相互关联（去耦）。文［7］中提出了“非可行分解”和可行分解”两种方法；文［5］中指出可采用“非可行分解”（目标法），“可行分解”（模型法）和“混合分解”（目标—模型法）三种方法进行分解。但正如文［1］中所指出，对控制问题

来说，可行分解方法通常都是用不上的，因为它要求 u_i 的维数超过相关变量的维数。

3. "协调"的目的是使各子系统的动作互相协调，彼此配合，以使整个大系统逐步地实现整体最优化。通常采用"平衡原则"和"预估原则"来达到协调的目的，文[22]中对此两种原理采用了图示的方法加以说明，想进一步了解这些方法的读者可参看此文第235页。

4. 对各级递阶控制采用分解与协调的方法有一个突出的优点，就是当整体的大问题超过可实现的基本存储要求时，这时即使对大问题不能直接求解，但只要对于每个子问题都有足够的存储时，此种方法就可以应用。

5. 从上述方法可以看出，不论是局部控制器或者是协调器，都无需要求了解全局问题的信息，尤其是无需了解整个系统的整体模型。我们对模型的了解，可以是分散的，当 N 很大时，如果每个独立系统的模型相对于第 i 个控制器来说都是内部的，这个优点就特别突出了。

§3 大系统的稳定性分析方法

I. 概述

在控制系统理论的研究和实践中，稳定性理论一直是一个活跃的重要课题，它某些时候虽不如最优控制理论那样引人注目，但其理论和方法一直在实践中受到重视，并不断得到发展。特别是随着大系统理论的研究和发展，稳定性理论的研究就显得更为重要和突出了。因为分析设计任何一个大型的复杂系统，首先必须认真地进行稳定性的分析，这是整个系统能够正常稳定运行的必要条件。否则，要是某些环节或某个局部发生问题，其后果不堪设想。

有两种不同类型的稳定性：一类考虑系统没有任何输入的情况下，研究由初始状态激励而引起的系统内部状态随时间变化的规律，亦即研究系统内部状态特性的稳定性。一类考虑了输入的作用，研究在零初始条件下，对系统的每一个有界输入是否产生一个有界输出，亦即研究系统输入输出特性的稳定性。这种研究

把系统视为其输入输出信号所在的赋范空间之间的映象，根据映象的有界性，从而确定系统的稳定性．可以说，前者是以初始状态的变化当作系统的干扰，后者是以输入信号当作系统的干扰．两者有着本质上的区别。对于控制系统这样需要解决与系统结构密切相关的稳定性问题时；后者更为重要。但是后面将看到，两者又有着密切的关联。

根据两种不同的稳定性，就产生了分析大系统稳定性的两类方法，即向量 Ляпунов 函数方法与输入输出方法．下面在Ⅱ中叙述向量 Ляпунов 函数方法；在Ⅲ中介绍输入输出方法；在Ⅳ中比较上面两者的结果，讨论它们之间的联系。

我们这里分析大系统的稳定性的方法，都是指的将一个大系统分解成若干较小的子系统，先分析每一个子系统的稳定性，然后综合起来讨论整体系统的稳定性．亦即所谓"复合系统的方法"[9]．

Ⅱ．向量 Ляпунов 函数方法

这一段介绍研究大系统内部状态特性的稳定性的向量 Ляпунов 函数方法．这里考虑的稳定性是 Ляпунов 意义下的稳定性的推广．大范围稳定性．所采用的数学模型是由常微分方程组（1．1）所描述的系统。

假定整体系统（1、1）可以分解为 N 个子系统

(S) $$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_i,t)+g_i(u,t);\quad i=1,\cdots,N$$

这里状态变量 $x\in R^n$，$x^t=(x_1^t,\cdots,x_N^t)^t$，$n=n_1+\cdots+n_N$．系统（S）中，$g_i(x,t)$ 叫做关联项，它反映子系统间的相互影响，即互相耦合的性质和大小．

我们把系统

(SSi) $$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_i,t)\qquad i=1,\cdots,N$$

叫做孤立子系统．其中关联项不出现．

在系统（1.1），（S），（SSi）中假定函数 $F:R^n\times J\longrightarrow R^n$，$f_i:R^{n_i}\times J\longrightarrow R^{n_i}$ 和 $g_i:R^n\times J\longrightarrow R^{n_i}$，都连续且满足保证相应系统的初值问题的解唯一的条件，其中 $J=[0,\infty]$．此外设

(3.1) $$F(0,t)\equiv 0,\quad f_i(0,t)\equiv 0,\quad g_i(0,t)\equiv 0$$

用向量 Ляпунов 函数方法研究系统（S）的稳定性，通常是

先对各子系统（SS_i）作函数 $V_i(x_i,t)$，它为连续、定正、渐减（decrescent）和径向无界，简称 PDU。函数 $V_i(x_i,t)$ 为 PDU 的充分必要条件是：存在比较函数 ϕ_{ij}（$i=1,\cdots,N$；$j=1,2$）：$R^1_+ \longrightarrow R^1_+$（$R^1_+$为正半直线），连续，关于变元严格单调增加，$\phi_{ij}(0)=0$，$\phi_{ij}(r)\to\infty$（$r\to\infty$），使

（3.2）
$$\phi_{i1}(\|x_i\|)\leq V_i(x_i,t)\leq\phi_{i2}(\|x_i\|),\quad \forall x_i\in R^{n_i};\ t\in J$$

这里 $\|x_i\|$ 为 x_i 的欧氏模。

以下，除非特别声明，我们都假定函数 $V_i(x_i,t)$，$V(x,t)$ 连续，关于 x 局部地满足李氏条件。

函数 $V_i(x_i,t)$ 沿系统（SS_i）的运动 $x_i(t)$ 的右上全导数定义为

（3.3）
$$D^+V_i\Big|_{(SS_i)}=\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}\{V_i[x_i(t)+hf_i(x_i,t),t+h]-V_i(x_i,t)\}$$

如果 $V_i(x_i,t)$ 连续可微，则 D^+V_i 就与通常的 $\frac{dV_i}{dt}$ 一样即：

$$\frac{dV_i}{dt}\Big|_{(SS_i)}=\frac{\partial V_i}{\partial t}+grad\ V_i\cdot f_i(x_i,t)$$

分析整体系统（S）的稳定性时，要求出函数 $V_i(x_i,t)$ 沿系统（S）的运动 $x(t)$ 的右上全导数：

（3.4）
$$D^+V_i\Big|_{(S)}=\lim_{h\to 0^+}\sup\frac{1}{h}\{V_i[x_i(t)+hf_i(x_i,t)+hg_i(x,t),t+h]-V_i(x_i,t)\}$$

假定存在函数 $\alpha_i(x_i,t)$ 和 $W_i(x,t)$，使

（3.5）
$$D^+V_i\Big|_{(S)}\leq-\alpha_i(x_i,t)+W_i(x,t).$$

其中 $\alpha_i(x_i,t)$ 只与第 i 个独立子系统有关，且 $D^+V_i\big|_{(SS_i)}\leq-\alpha_i(x_i,t)$；$W_i(x,t)$ 依赖于关联项 $g_i(x,t)$。

假设不等式（3.5）的右端函数可表示为函数 $V_i(x_i,t)$ 的函数，即

（3.6）
$$D^+V_i\Big|_{(S)}\leq h_i(V_1(x_1,t),\cdots,V_N(x_N,t),t]$$

其中 $V_i(x_i, t)$ 为定正函数，且 $h_i(0, \cdots 0, t) \equiv 0$

有了形如（3.6）的估计之后，必须对 h_i，V_i 加上适当条件，使当 $t \to \infty$ 时，$V_i(x_i(t), t) \to 0$。于是根据 $V_i(x_i, t)$ 的 PDV 性质，就可推出整体系统（S）的零解的全局渐近稳定性。

从不等式（3.6）求出保证 $t \to \infty$ 时 $V_i(x_i(t), t) \to 0$ 的条件，有两种办法：利用比较原理（微分不等式）的方法和加权模方法。

1．利用比较原理的方法：

这种方法的主要工具是下述比较原理：

基本引理 I [12]　设向量函数 $V(x, t): R^n \times J \to R_+^N$ 连续，关于 x 局部地满足李氏条件，它沿系统（S）的运动的右上全导数满足不等式

$$D^+ V|_{(S)} \leqslant g(V, t)$$

其中 $g(u, t): R^N \times J \longrightarrow R^N$；连续，对固定的 $t \in J$ 关于 u 拟单调不减注)。

设 $\gamma(t, t_0, u_0)$ 为初值问题

$$\frac{dV}{dt} = g(U, t), \quad U(t_0) = U_0 \geqslant 0, \quad t_0 \in J$$

在 t_0 右边的最大解，如果 $x(t, t_0, x_0)$ 为系统（S）的满足 $V(x_0, t_0) \leqslant U_0$ 的任意解，则对使 $x(t)$ 存在的 $t \geqslant t_0$，下列不等式成立：

$$V[x(t, t_0, x_0), t] \leqslant \gamma(t, t_0, x_0)$$

由此可得

定理 1　假定对系统（SS_i）存在 N 个 PDV 函数 $V_i(x_i, t)$，使不等式（3.6）成立，其中 $V_i(x_i, t) = V_i(x_i, t)$　$i = 1, 2, \cdots, N$。函数 $h_i(V_1, \cdots V_N, t) \equiv h_i(V, t)$ 关于 V 拟单调不减，这里

$$V(x, t) = (V_1(x, t), \cdots, V_N(x_N, t))^T \tag{3.7}$$

为 N 维向量函数，而且 N 阶系统

$$\frac{dy_0}{dt} = h_i(y_1, \cdots, y_N, t) \qquad i = 1, \cdots, N$$

注）所谓拟单调不减，指的是：若 $u_i' = u_i''$，$u_j' \leqslant u_j''$（$j = 1, \cdots, N$，$j \neq i$）则 $g_i(u', t) \leqslant g_i(u'', t)$，$i = 1, \cdots, N$。

的零解关于 $y_{1i}\geq 0$，…，$y_{Ni}\geq 0$ 全局渐近稳定，则整体系统（S）的零解全局渐近稳定。

满足定理1条件的N维向量函数（3．7）称为系统（S）的向量 Ляпунов 函数。这时 $V(x,t)$ 的每一个分量为 PDU，但不一定都是对应的孤立子系统（SS_i）的 Ляпунов 函数。

从定理1可以推出许多有用的稳定准则。

定理2 如果对系统（S）存在 PDU 的 $V_i(x_i,t)\in C^1$（$i=1,\cdots,N$），使不等式（3．6）取形式

（3．8）
$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{(S)}\leq-\sum_{j=1}^{N}a_{ij}V_i(x_i,t)\quad i=1,\cdots,N.$$

这里 a_{ij} 为常数，而且方阵 $A=(a_{ij})$ 的一切非对角元素非正，则从线性系统

（3．9）
$$\frac{dy}{dt}=-Ay$$

零解的渐近稳定性，可以推出系统（S）零解的全局渐近稳定性。

对于非对角元素非正的矩阵，如果其一切特征值实部皆为正（或一切顺序主子式全为正），则这种矩阵称为M矩阵。M矩阵是一类很重要的矩阵，它是研究大系统稳定性的重要工具，其主要性质可参阅〔9〕。在定理2的条件下，系统（3．9）的零解渐近稳定的充要条件是A为M矩阵。

如果在定理2的条件下，加上 $a_{ii}>0$（$i=1,\cdots,N$）的假设，则意味着孤立子系统（SS_i）是渐近稳定的。文〔13〕就加了这一假定。

满足上述条件的 a_{ij}（$i\neq j$）给出了对系统（S）的互相关联项所应加的限制。

文〔13〕最先用向量 Ляпунов 函数的比较原理方法研究大系统的稳定性。该文假定互相关联为线性函数，孤立子系统的 Ляпунов 函数取二次型，比较系统也是线性的。王慕秋〔14〕取 V_i 为二次型，并利用不等式

$-a\xi^2+b\xi\leq-\frac{a}{2}\xi^2+\frac{b^2}{2a}$（$a>0$，$b\geq 0$，$0\leq\xi<\infty$）具体求出了一类非线性控制系统的形如（3．9）的比较系统的具体表达式，并把它用于飞机纵向运动方程的研究中，得到较好的绝对稳定条件。