

弹性结构非线性稳定分析述评

钱若军

原书缺页

(PERTURBATION)。自从KOITER于1945年在他的博士论文中提出了摄动法后,这个方法也已作了修改而得到了发展。第二类是有限元增量/迭代过程。不过早期的工作中,为了计算平衡图形需根据经验预先设置不同的荷载水平,而且平衡路线也只是到临界点之前。从算法的通用性、可行性、稳定性等诸方面的因素综合考虑,目前的研究侧重点显然在基于大型计算机的自分析技术,即增量/迭代过程。因为基于这个方法可以正确有效地确定结构的前屈曲路线,结构处于临界点时的临界荷载,或者处于分枝点时的性状。同时值得指出的是,由于结构的后屈曲,性能特征与其初始缺损的敏感性极有关系,所以对后屈曲路线的探索越来越使人关心且具有实用的意义和价值。

近年来,不少学者在早期的有限元增量/迭代过程的基础上,对结构的非线性平衡路线的分析及跟踪策略作了大量的研究。这些研究主要是关于非线性方程的求解方法、增量/迭代过程中(1) 荷载水平的确定,(2) 临界点的计算方法及判断准则,(3) 后屈曲路线的跟踪方法等等。

本文限于介绍主要是近几年发展起来的较有成效的方法和策略。并且首先简单回顾一下数学力学模型的表达形式,随后对结构的非线性稳定分析的方法和实施加以评述。

二、数学力学模型〔1〕、〔2〕

结构的非线性稳定分析涉及到两个方面的内容,一是系统的数学力学模型,二是非线性分析方法及策略。而数学力学模型的建立是基于以下假定:(1) 结构呈小应变、小转动、大位移的物理几何特性。(2) 结构的材料需有明确的规定,而本文所涉及的方法则适用于弹性结构。(3) 满足有限单元法所作的一切假定。

1. 坐标空间

如同一般, 结构的非线性分析的基本方法是逐步线性化, 这里包含着两个含义, 即可用简单的加载过程来描述加载的历史以及用有限个线性解来逼近真实的非线性解。所以弹性结构的平衡分析和平衡路线的跟踪是在假定结构承受按一定比例变化的荷载下, 在荷载位移空间中进行。于是, 如果经离散化后的结构总自由度为 N , 则结点位移向量为

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_N)^T \in R^N \quad (2.1.1)$$

其中: R^N 为 N 个自由度的位移空间

如果结构承受 M 种荷载, 则荷载参数为

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)^T \in R^M \quad (2.1.2)$$

其中: R^M 为 M 个自由度的荷载空间

迄今为止, 主要的研究尚仍集中在简单荷载情况下的结构非线性失稳分析。这时可用唯一的一个标量因子来描述相关参考荷载向量 P 时的增量荷载, 这种情况下通常采用比例荷载的假定。于是有

$$\Delta P = \lambda^i P \in R^N \quad (2.1.3)$$

式中: λ^i 是某增量荷载步中第 i 次迭代时的荷载参数。

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_N)^T \quad (2.1.4)$$

如果将荷载参数也作为一个自由度, 于是可引入总坐标向量 $\tilde{U}$, 则有 N 个位移自由度和 M 个荷载参数自由度构成共有 $N+M$ 个自由度的总坐标空间——荷载位移空间, R^{N+M} , 即

$$\tilde{U} = (U, \lambda) \in R^{N+M} \quad (2.1.5)$$

在单荷载参数的情况下, 则有

$$\tilde{U} = (U_1, U_2, \dots, U_N, \lambda)^T \in R^{N+1} \quad (2.1.6)$$

在卡达辛坐标系下, 有总坐标向量

$$\bar{U} = U_i e_i + \lambda e_\lambda \quad (2.1.7)$$

2. 有限元法模型

从能量原理可知, 系统的平衡条件等价于系统的总势能驻值条件

$$\frac{\partial \pi(U, \lambda)}{\partial U_i} = 0 \quad (2.2.1)$$

将系统的应变能及外力势能的表达式代入上式, 并将相关的几何条件和物理条件引入。选取适当的位移插值函数, 于是可得基本的有限元增量方程

$$K(U^i, \lambda^i) \delta^i = \lambda^{i+1} P - F(U^i, \lambda^i) \quad (2.2.2a)$$

$$\text{或} \quad K(U^i, \lambda^i) \delta^i = \Delta P^i - F(U^i, \lambda^i) \quad (2.2.2b)$$

其中: P 为不变的参考荷载向量, λ^{i+1} 为第 $i+1$ 次迭代过程的荷载水平。

$F(U^i, \lambda^i)$ 为系统在 u^i, λ^i 状态时与各单元内力等效的外荷载向量。

δ^i 为两个荷载水平之间增量位移的改变量。

显然, 由于所引入的几何条件及物理条件中, 已考虑了初始位移、初始应力及位移的高阶量的影响, 所以上述增量方程式 (2.2.3) 中的切线刚度矩阵是由几个矩阵组成的。

$$K = K_e + K_u + K_\sigma = K_e + K_G \quad (2.2.4)$$

其中: K_e 为线性刚度矩阵

K_u 为考虑初始位移的刚度矩阵

K_σ 为考虑初始应力的刚度矩阵

$$\text{而} \quad K_G = K_u + K_\sigma \quad (2.2.5)$$

为几何刚度矩阵。

原则上可以说，非线性稳定全过程分析的方法是适用于一切结构的，所以在很多研究算法及计算策略的文献中一般均不给出具体的力学模型。不过很多算法也是在某些特定的模型下加以研究的，具体地说在非线性分析中，结构的应变中位移的高阶量的影响以及对其影响的估计是很举足轻重的，而同时必须注意的是上述几何刚度矩阵 K_G 中仅包括了位移的一阶量的影响，在不平衡力向量中隐含了位移高阶量的影响。在结构加载过程中，随着结构的平衡路线其切线刚度矩阵 K_e 在不断地改变。因此关于结构稳定的信息是隐含在切线刚度矩阵中，特别是它的正定性直接关联到稳定性。而当系统接近于临界状态时，刚度矩阵趋于奇异。由此，如果采用切线刚度矩阵的近似形式就可以导致错误的平衡态的解以及错误的临界荷载值。

三、非线性结构平衡分析的基本方法〔2〕

(略)

四、结构非线性平衡路线跟踪算法

结构的平衡路线的跟踪在算法和计算策略上都有极大的难度，综合这些难度主要有以下几个方面：

(1) 荷载水平的选取：荷载水平的选取在跟踪策略中是个首要问题，它不仅要求在全过程分析中能自动选取，而且荷载水平的大小要适宜，因为过小的荷载水平会导致计算量的增加，而过大的荷载水平又可能会引起解法难以收敛。

(2) 刚度矩阵的病态而带来运算上的困难 或引起结果的偏离。由于矩阵的病态以及在临界点时的奇异，往往导致一般的通用解法失效。而问题的另一方面是矩阵的病态是一种相对而言的性能，所以在数值分析中难以预见给出一个判断标准，尤其是当平衡图形接

近临界点附近时矩阵的奇异性的判断以及越过临界点的方法都是需要解决的问题。

(3) 全过程分析是一个极其耗费机时的，因此计算的经济问题也很显然成为一个引入注目的问题。

(4) 跟踪整个平衡路线需要进行大量的运算，因此从计算的角度来看，必然会带来精度上的损失，以及由于解的精度损失而造成结构的畸变。这种情况往往是出乎预料的。这是因为误差的累积及将带有累积误差后的位移向量反复修改了结构的几何。这样周而复始的误差传递所致。况且这里所说的误差原来就包含着基本解法的稳定性和误差以及计算机字长的截断误差。

于是非线性平衡路线跟踪方法研究的基本的思想是设法消除或减小上述难度，为此通常采用逐步线性化的过程，也即增量/迭代过程。选择一个独立的参数作为控制参数，很自然，荷载参数是广泛地被选作为控制参数，这不仅是因为在结构的线性分析中荷载增量法已被大家所熟悉，而且在比例荷载的假定下，对于单工况的 N 维荷载向量能用一个简单的标量参数来控制，无疑会使问题极大地简化。从问题的另一个方面来看，所谓的结构非线性性能是具有当荷载有一个微小的扰动将会引起位移较大的改变的特性，因而非线性性能通常被认为类似于几何软化，在这种情况下，动态的控制参数显然具有很大的优越性。所以计算策略问题简言之可以归结为控制参数的选择问题。

综观近年来关于有限元增量方程沿平衡路线的积分方法可归结为两大类：

(1) 在位移荷载空间中，控制参数作为一个独立变量，则平衡路线的描述在 $N+1$ 维空间中进行，这类方法由于明显地破坏了切线刚度矩阵的对称性和带宽的特性，因此在算法上仍具有一定困难。

(2) 在位移荷载空间中, 控制参数不作为一个独立变量, 则平衡路线的描述在 N 维位移空间中进行。这时需要补充一个独立约束方程, 根据一定的准则来确定控制参数, 目前大量的工作是属于这一类。

但是不论属于哪一类方法, NRM 仍是基本的方法, 因此各种不同的跟踪仍与 NRM 或 m NRM 密切相关。也正是基于这个基本方法, 近几年来, 美国、德国、英国挪威等国的学者做了大量的研究, 其中比较有参考价值的方法有人工弹簧法 (ARTIFICIAL SPRING) [5], 位移控制 (DISPLACEMENT CONTROL) 法 [6-7], 等弧长技术 (CONSTANT-ARC-LENGTH-TECHNIQUES) [7-12], 自动荷载增量过程 (AUTOMATIC SOLUTION OF EQUATIONS) [14] 及能量平衡技术 (ENERGY BALANCING TECHNIQUES) [15]。不过仅管非线性稳定分析与所分析的具体对象有极密切的关系, 包括上述各方法在内都满足下列假定:

- (1) 算法适用于弹性结构
- (2) 结构承受保守荷载系统, 且为单一荷载状态
- (3) 所研究的对象是各初始缺损的隔热结构。

1. 人工弹簧法

人工弹簧法首先是由 WRIGHT 和 GAYLORD [4] 提出并用于框架的分析中, 后由 SHARIFI 和 POPOV [5] 用于拱的分析, 继而由 RAMM 推广用于薄壳结构的分析。

人工弹簧法的原理是在结构中人为地加入一个线性的弹簧, 以使处于突然失稳时的系统硬化, 从而变换成正定系统。采用这个方法的一个基本条件是这个问题的可能分离为几个部分, 对每个阶段只能定义一个荷载缩减因子。

图 4—1 显示了人工弹簧法的基本原理。作用于图 4—1 所示

的已修改了的系统的总外荷载向量 j_G 可分解成真实的荷载向量 j_P 和弹簧处的外力 j_f

$$j_G = j_P + j_f \quad (4.1.1)$$

而真实荷载向量的所有分量能通过一个公共的“荷载缩减因子” γ 求得

$$j_P = \gamma j_G \quad (4.1.2)$$

平衡图形 j 所有的分量具有相同的比例, 将式 (4.1.2) 代入式 (4.1.1) 并整理后得

$$\frac{j_{fk}}{j_{Gk}} = 1 - \gamma \quad (4.1.3)$$

接着弹簧装配到所相关荷载自由度上, 且所有弹簧刚度是偶合的。弹簧刚度矩阵 C 由下式定义

$$j_f = C j_U \quad (4.1.4)$$

根据能量原理 C 必须是对称矩阵 ($c_{kl} = c_{lk}$), 如果指定刚度系数 C_{11} , 式 (4.1.3) 可决定矩阵的元素 C_{kl} 。

$$C_{kl} = \frac{j_{Gk} j_{Gl}}{(j_G)^2} C_{11}$$

引入参考荷载向量 P

$$C = \frac{C_{11}}{(P_1)^2} P^T P$$

这时增量方程例为

$$K j_{\Delta U} = j_{\Delta P} + j_F \quad (4.1.7)$$

但可修改为

$$(K + C) j_{\Delta U} = \frac{j_P + j_f}{G} - j_F - C j_U \quad (4.1.8)$$

等式右边表示了不平衡力。经 $j+1$ 次迭代后, 由式 (4.1.2) 确定

真实的荷载

$${}^{j+1}P = {}^{j+1}\gamma {}^{j+1}G, \quad \text{而 } {}^{j+1}G = {}^{j+1}\lambda P \quad (4.1.9)$$

由式(4.1.3)可得荷载缩减因子

$${}^{j+1}\gamma = 1 - \frac{C_u}{{}^{j+1}\lambda P_1^2} P^T {}^{j+1}u \quad (4.1.10)$$

经验表明, 在分析的初期荷载缩减因子为 $0 < {}^{j+1}\gamma < 0.6$ 。

人工弹簧法是修正刚度矩阵的一个方法, 使得一个奇异的刚度矩阵得到修正。但是此值在应用上有很多局限性。

2. 位移控制法

众所周知, NRM用于结构非线性稳定的前屈曲分析中是很有效的, 但在平衡路线中接近临界点时和在后屈曲分析或分枝问题的分析中通常失效了。正如前所述, 这是因为刚度矩阵在临界点是奇异的, 以及同一荷载存在着多个稳定介。这时一个有效的方法是交换自变量和应变量, 采用位移控制的方法。越过临界点以及用于后屈曲分析中, 这个方法首先由 ARGYRIS 提出〔6〕, 后由卡学 (PIAN, T.H.H) 和董平 (TONG, P) 修正。位移控制法的原理很简单, 在接近极限点时采用选择菜单的一个位移分量 作为控制参数, 用指定某自由度方向的位移 Δu_j 的办法来取代常用的荷载增量法。方法仍基于式(2.2.2)所示的有限元增量方程。

设 Δu_j 是指定的位移增量, 将式(2.2.2)重新整理以使 j 为相应于位移向量中最后一个自由度。于是有

$$\begin{bmatrix} K_A & K_{Aj} \\ K_{jA} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta u_j \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} P_A \\ P_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_A \\ F_j \end{bmatrix}$$

这里 K_A 不再是奇异的了, 将上式展开得

$$K_A \Delta u_A = \lambda P_A + F_A - K_{Aj} \Delta u_j \quad (4.2.2a)$$

$$K_{jA} \Delta u_A = \lambda P_j + F_j - K_{jj} \Delta u_j \quad (4.2.2b)$$

式中 Δu_A 为未指定的位移向量

解式 (4.2.2a) 得 Δu_A , 再将 Δu_A 代入式 (4.2.2b) 整理后得

$$\lambda = \frac{F_j - K_{jA} A - K_{jj} \Delta u_j}{K_{jA} B - P_j} = \frac{\Delta P_j^I}{\Delta P_j^{II}} \quad (4.2.3)$$

式中: $A = K_A^{-1} (F_A - K_{Aj} \Delta u_j)$

$$B = K_A^{-1} P_A$$

$$P_j = K_{jA} A + K_{jj} \Delta u_j$$

实际上, 在运算的过程中, 并不一定需要将刚度矩阵重新分块排列, 而可以采用引入边界条件的办法, 分别求得 A 和 B 以及 P_j 。具体的步骤是这样的, 首先令 $P_A = 0$, 仅在 j 点给出一个控制位移 Δu_j 作为边界条件, 计算 j 点的反力 ΔP_j^I 和 A 。然后令 $\Delta u_j = 0$, 设系统在参考荷载 P_A 作用下求出 B , 及相应的 j 点处的反力 ΔP_j^{II} 。还需存储刚度矩阵 K 的第 j 行元素 K_{jA} , 以便在式 (4.2.3) 中用到。

可以看到, 在计算模型上位移控制与荷载控制是一样的, 只是在接近临界点时控制参数的选择不一样。接近临界点时刚度矩阵 K 趋于奇异。但是矩阵 K_A 并不奇异。因此采用位移控制的办法实际上是将奇异点剔除掉。所以从方法的本质上与人工弹簧法有相似之处, 都是以边界条件的形式来修正刚度矩阵。

文献 (7) 给出了一些数字例子, 从这些例子中可以发现, 当遇到一个对称结构时很容易地选结构的中点作为位移控制点。但遇到

不对称结构或对称结构 在不对称荷载作用下就存在一个奇异点的搜索问题。

3. 等弧长技术

等弧长法 (constant-arc-length-method) 是行之有效的跟踪平衡路线全过程的一种算法, 是结构的非线性稳定分析中主要的一种方法。弧长法最初由 Riks (8-9) 和 Wempner (10) 提出, 继而由 Crisfield (11-12) 和 Ramm (7) 加以修正和发展, Crisfield 在 1982 年引进了直线搜索和加速度法并得到很好的解 (12)。

弧长法的基本概念

设 λ 为标量荷载水平变量, 故某增量步中第 i 次迭代的 $\lambda^{(i)}$ 的取值标志着该步的荷载水平。由于将 λ 处理成为一个变量, 因此对一个 N 维问题的分析时, 问题控制方程仍如式 (2.2.2) 所示为

$$K(u, \lambda) \delta^i = \lambda^{i+1} P - F(u, \lambda) \quad (4.3.1)$$

但当需补充一个约束方程以确定 λ , 于是有

$$f(\lambda^i) = 0 \quad (4.3.2)$$

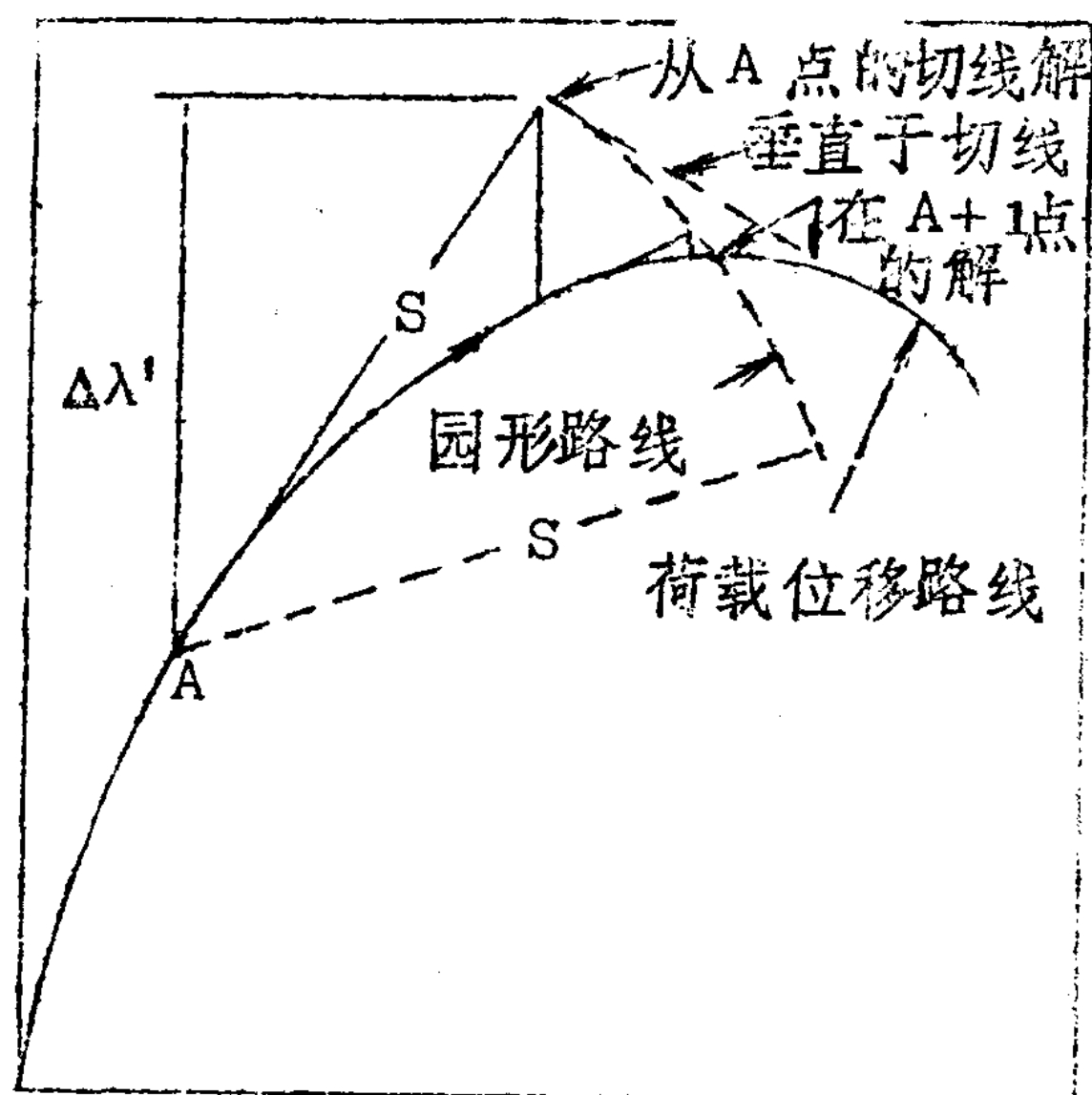
这时问题就归结为关于确定荷载水平变量 λ^i 的方法及其与标准的求解过程之间的组合关系。

如前所说当将式 (4.3.1) 与式 (4.3.2) 在 $N+1$ 维空间中联立求解时, 由于破坏了结构刚度矩阵的自然特性而带来运算上很大困难, 因而往往试图寻找其他的途径, 譬如通过确定某一准则而独立地求解式 (4.3.2) 以得到 λ 值。而等弧长即是求解式 (4.3.2) 的一个准则之一。

(1) 等弧长法

RIKS 和 WEMPNER 首先提出了等弧长技术, 他们的工作是基

荷载参数 λ

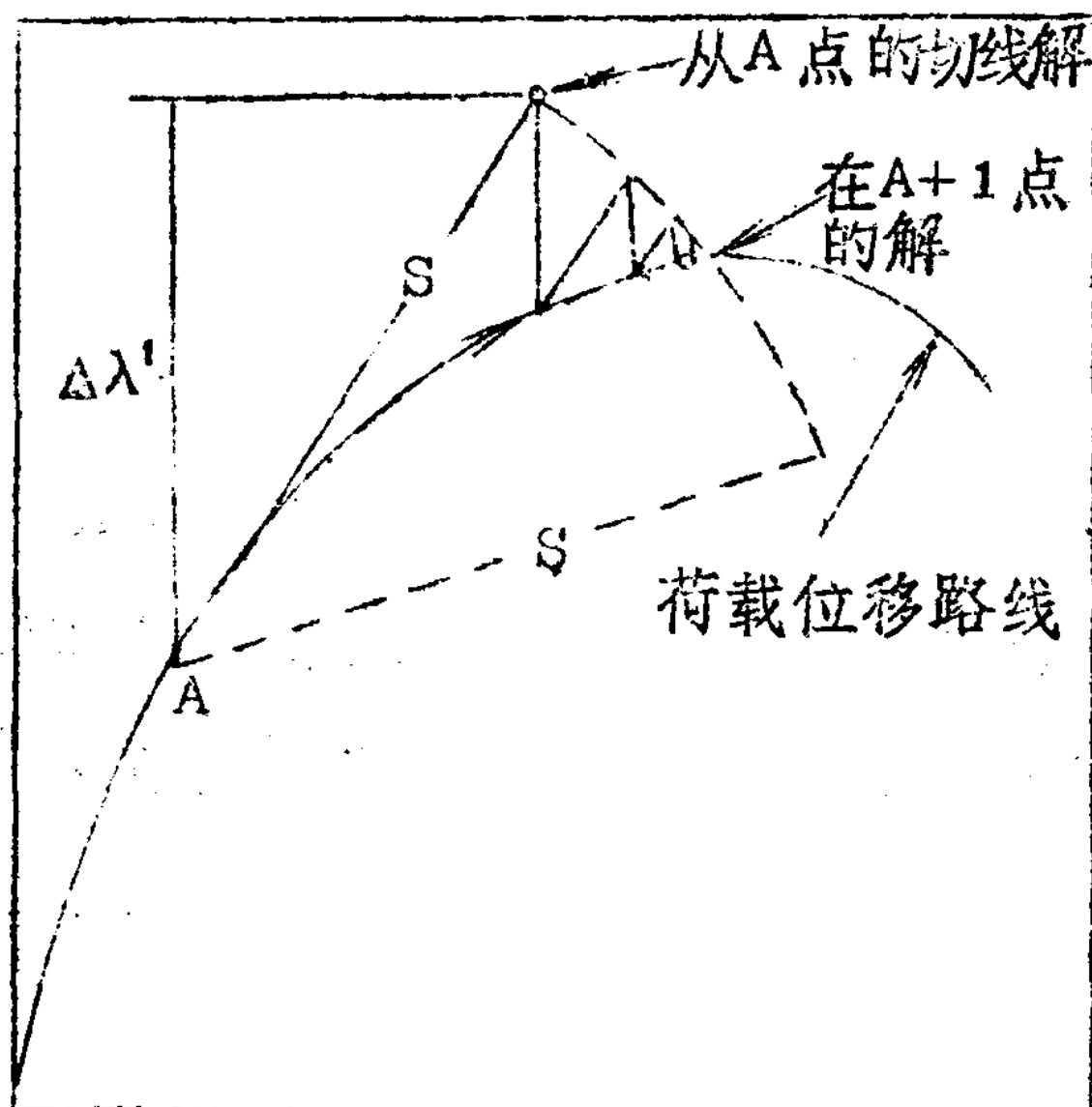


位移 U

(a) With Newton-Raphson Technique

图 4 — 3

荷载参数 λ



位移 U

(b) With Modified Newton-Raphson Technique

图 4 — 4

于线性关系的约束方程。

对某增量步，该增量步内，荷载参数的第一次迭代值 $\Delta\lambda^{(1)}$ 需满足约束方程

$$(\Delta u^1)^T \Delta u^1 + (\Delta \lambda^1)^2 = S^2 \quad (4.3.3)$$

这也就是所生成的切于平衡路线上 A 点的弧长固定于某一预先指定值 S，然后迭代路线沿着垂直于切线的平面进行(图4.2)。所以与平衡路线相切于 A 点的切线向量 $\vec{t}^1$ 与包含了未知荷载参数和位移增量的向量 $\vec{\delta}^1$ 的数积必须等于零。

$$\vec{t}^1 \cdot \vec{\delta}^1 = 0 \quad (4.3.4)$$

从图4.2中可见 RIRS 和 WEMPNER 的等弧长技术实质上是当前的迭代向量

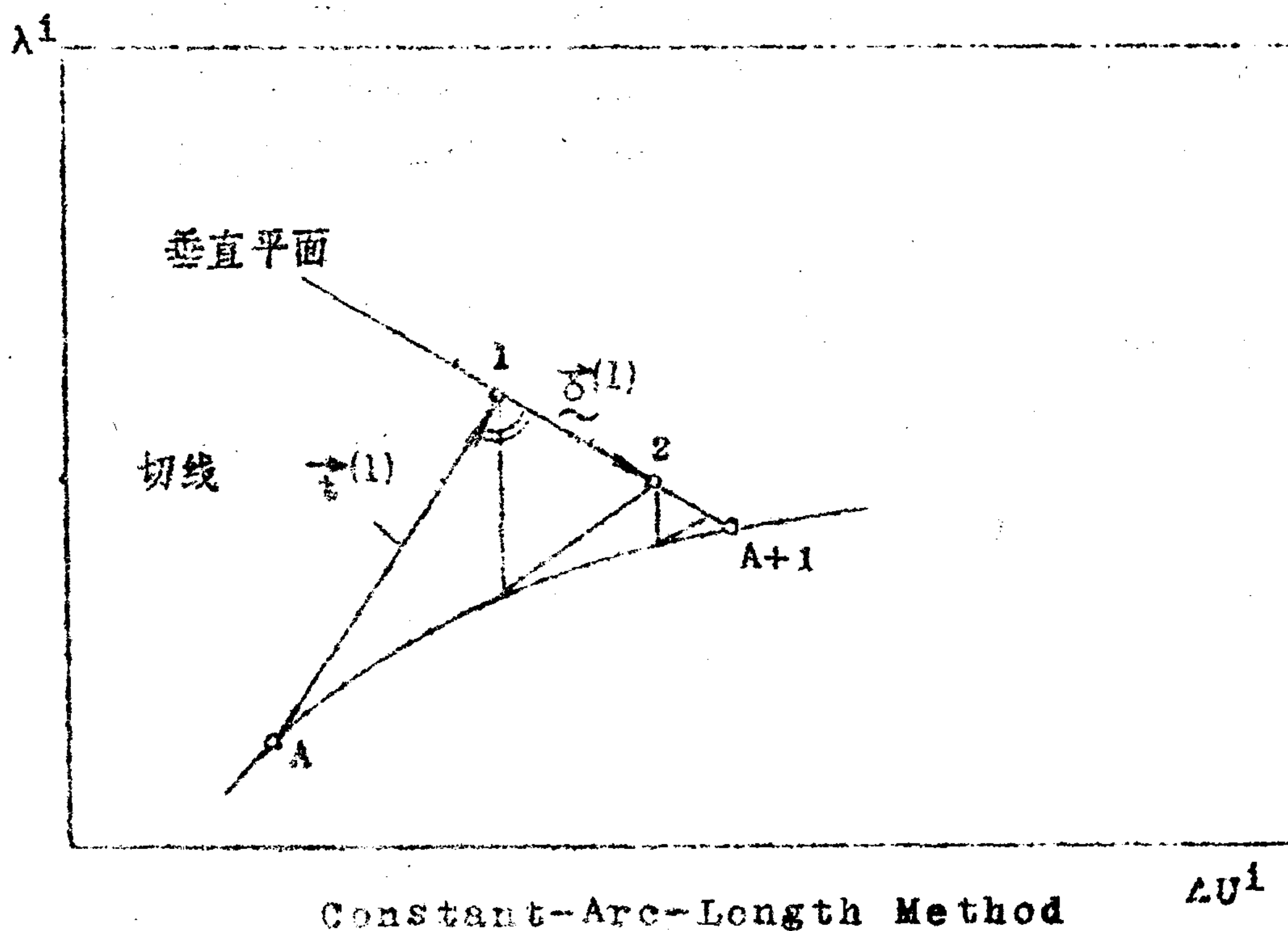


图 4—2

$\{0^0, \delta\lambda^0\}$ 与前次迭代解向量 $\{\Delta u^{i-1}, \Delta\lambda^{i-1}\}$ 的正交化过程, 可见当采用 NRM 时, 约束方程式 (4.3.4) 用矩阵的表达形式为:

$$(\Delta U^{i-1})^T \delta^i + \Delta\lambda^{i-1} \delta\lambda^i = 0 \quad (4.3.5)$$

而当采用 m NRM 时, 切线刚度矩阵只需在每一荷载增量步的初始时刻时形成, 形成以后在本增量步内的各次迭代过程中均保持不变, 图 4.4, 4.5。这时约束方程式用矩阵的表达形式为

$$(\Delta U^i)^T \delta^i + \Delta\lambda^i \delta\lambda^i = 0 \quad (4.3.6)$$

显然向量 $\{\Delta u^i, \Delta\lambda^i\}$ 即是 A 点的切线向量 $\tilde{\tau}_0$ 。而 δ^i 和 $\delta\lambda^i$ 的意义在图 4.5 中可见。

(2) 球面等弧长法

Crisfield 和 Ramm 提出了一种修改的等弧长技术, 即球面等弧长法。按照这个方法迭代是沿着半径为 Δl 的球面进行的 (图 4.5) 的代替沿着垂直于切线向量的平面内进行。这时, 约束方程 (4.3.2) 具有如下的形式。

$$\begin{aligned} (\Delta u^i)^T \Delta u^i + (\Delta\lambda^i)^2 &= (\Delta u^{i+1})^T \Delta u^{i+1} \\ &+ (\Delta\lambda^{i+1})^2 = S^2 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

式中: Δu^i 是第 $i-1$ 次迭代后的增量位移

$\Delta\lambda^i$ 是本增量步内第 i 次迭代后增量荷载水平

S 为预定的增量长度

此外, 从图 4.5, 4.6 可知:

u^0 为前次增量过程终止时的位移向量, 显然有 $\Delta U^0 = 0$,

λ^0 为前次增量过程终止时的荷载水平。

$$\text{而 } \lambda^{i+1} = \lambda^0 + \Delta\lambda^{i+1} = \lambda^i + \delta\lambda^i \quad (4.3.8)$$

$$U^{i+1} = U^0 + \Delta U^{i+1} = U^i + \delta^i \quad (4.3.9)$$

及 $\Delta U^{i+1} = \Delta U^i + \delta^i, \Delta \lambda^{i+1} = \Delta \lambda^i + \delta \lambda^i \quad (4.3.10)$

在增量步内，非线性方程组的求解方法是m NRM。于是在每个增量步之初形成了切线刚度矩阵 K_α 后，在这个增量步内的所有迭代过程中 K_α 皆保持不变。为了克服运算上的困难Crisfield和Ramm采用了分两个阶段的间接求解过程，也就是通过计算不同荷载水平时增量位移的改变量 δ^i 来完成全过程分析。由基本增量方程 (4.3.9)

$$K_\alpha \delta^i = \lambda^{i+1} P - F$$

显然上式可改写为

$$K_\alpha (\lambda^{i+1} \delta_T) = \lambda^{i+1} P \quad (4.3.11)$$

$$K_\alpha \delta_F^i = -F \quad (4.3.12)$$

$$\therefore \delta^i = \lambda^{i+1} \delta_T + \delta_F^i \quad (4.3.13)$$

其中, $\lambda^{i+1} \delta_T = K_\alpha^{-1} P \quad (4.3.14)$

不过式 (4.3.14) 求解时有时仍有困难，但注意到在增量步内各迭代步的位移之间呈线性关系，于是有

$$\delta^0 = K_\alpha^{-1} \Delta \lambda, P = \Delta \lambda, K_\alpha^{-1} P \quad (4.3.15)$$

所以有 $\delta_0 = \Delta \lambda, \delta_T \quad (4.3.16)$

于是 δ_T 可由上式求得。将式 (4.3.10) (4.3.13) 等代入球面约束方程式 (4.3.7) 并整理后得以 λ^{i+1} 为未知数的一元二次方程式

$$a_1 (\lambda^{i+1})^2 + 2a_2 \lambda^{i+1} + a_3 = 0 \quad (4.3.17)$$

式中: $a_1 = (\delta_T)^T \delta_T + 1$

$$a_1 = (\delta_T)^T \Delta u^i + (\delta_F)^T \delta_F^i - \lambda_0$$

$$a_2 = (\delta_F^i)^T \delta_F^i + 2(\delta_F^i)^T \Delta u^i$$

$$+ ((\Delta u^i)^T \Delta u^i + (\lambda^0)^2 - \Delta \ell^2)$$

解上述一元二次方程即可求荷载水平 λ^{i+1} ，但方程式 (4.3.17)

有二个根 λ_1^{i+1} , λ_2^{i+1} 。从这两个根中选择一个根的原则是使在当前的迭代之前的增量位移向量 Δu^i 和当前迭代之后得到的增量位移向量 Δu^{i+1} 之间的夹角应为正，也就是为了避免出现沿着平衡路线滞退的现象。根据向量运算法则可得两向量之间的夹角的余弦为：

$$\cos \theta = \frac{(\Delta u^{i+1})^T \Delta u^i}{\|\Delta u^{i+1}\| \|\Delta u^i\|} \quad (4.3.18)$$

所以
$$\cos \theta = \frac{(\Delta u^i)^T \Delta u^i + (\delta_F^i)^T \Delta u^i}{\|\Delta u^{i+1}\| \|\Delta u^i\|}$$

则
$$\cos \theta = 1 + \frac{(\lambda^{i+1} \delta_T + \delta_F^i)^T \Delta u^i}{\Delta \ell^2} \quad (4.3.19)$$

则当 $\cos \theta$ 为正时的 λ^{i+1} 即为欲求的荷载水平。不过如果所得到的两个 λ^{i+1} 皆为正时，Crisfield 建议挑选这样的 λ^{i+1} ，即该 λ^{i+1} 最接近于式 (4.3.17) 的线性解

$$\lambda_{\text{线性}}^{i+1} = -a_1/a_2 \quad (4.3.20)$$

现在再回顾一下式 (4.3.16)，在增量步内的各项迭代过程中，实际上只要求计算向量 δ_F^i ，而由于切线刚度矩阵 K_0 在这个增量步内是不变的，所以主要的运算仅是根据 (u^i, λ^i) 时的单元内力生成等效的外荷载向量，并继之以回代过程。

图 4.7 所示等弧长法计算框图。