

南 京 大 学

硕士研究生学位论文摘要汇编

理 科 版 (六)



南 京 大 学 研 究 生 院

一九八八年五月

前 言

为了广泛征求各学科专家及同行的评议意见,促进学术交流,并不断总结经验,搞好硕士学位论文质量的检查和评估,进一步提高我校研究生的培养质量,我们编辑出版了《南京大学硕士研究生学位论文摘要汇编》(六)。

这些论文均已通过专家评阅,并已通过论文答辩,我们将其汇编成册,以利于研究生的科研成果得到推广和应用。论文全文在我校科技档案馆均有原稿存档。

本汇编共分三个分册,共收入84级和提前毕业的85级研究生学位论文摘要,按系进行分类,在同一专业中按毕业研究生的姓氏笔划为序排列。

第一分册:文科版(六)包括中国语言文学系、历史学系、哲学系、经济学系、管理学系、外国语言文学系等系各专业。

第二分册:理科版(六)包括数学系、计算机科学系、天文学系、物理学系、信息物理学系、化学系等系各专业。

第三分册:地学版(六)包括环境科学系、生物学系、生物化学系、地球科学系、大地海洋科学系、大气科学系等系各专业。

我们恳请同行专业、学者以及广大读者对论文中存在的问题提出宝贵意见,并对编辑校对工作提出宝贵的意见和建议。

南京大学研究生院

1988年6月

责任编辑:周玲玲

目 录

数 学 系

同态模 $\text{Hom}(A, B)$ 的同调维数	王芳贵 (1)
D-近次正常算子, 近次正常算子与次正常算子	王公宝 (2)
IBN 环和 Grothendieck 群	朱晓胜 (4)
具变重特征双曲算子解的 C^∞ -奇性分析	钱四新 (5)
提高椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题数值解 精度的 Richardson 外推方法	王燕萍 (6)
数值解椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题的亏量校正法	孙小弟 (10)
差分方程奇异摄动问题的渐近方法	孙志忠 (13)
I 一些奇异摄动问题的数值解法	
II 矩阵特征值问题的数值摄动估计	林 平 (19)
非线性方程解的存在唯一性	苏 萌 (21)
I、数值求解常微分方程奇异摄动问题的 Green 函数方法	
II、二阶常微分方程奇异摄动的高价格式	徐志坚 (22)

计 算 机 科 学 系

ITEM: 集成的软件测试系统	王来强 (26)
DdBASE II: 一个基于 dBASE II 的分布数据库系统	冯 燕 (28)
MVS: Modula-2 编译程序的确认系统	叶晓峰 (30)
一个异种机局域网的设计与实现	孙 敏 (32)
分布式数据处理系统中的安全机制	陈 军 (34)
专家系统开发工具的实现和研究	张豪煜 (35)
一个基于关系语义联系的泛关系系统	张 凡 (36)
通用型数据库汉语查询界面	张亚南 (37)
总线式局部网中分布式算法研究	周晓方 (39)
规格说明语言 NUSL 及其支撑系统	姜馨杰 (40)
表格数据库管理系统—FBMS 设计及实现	韩 飞 (42)
Modula-3 集成环境核心	翟成祥 (45)
FCAD 系统用户接口的设计与研究	王 曙 (47)
IAPIS—一个用户接口管理系统的设计与实现	宋 勇 (49)
以太网与 DPsb 机互连系统的设计与实现	陈 珂 (51)
日汉机器翻译系统中的词素分析	陈未竟 (53)

画面自动读取技术的研究	袁春风 (55)
页式汉字识别研究	曹庆凯 (57)
家具辅助设计系统FCAD中消隐视图的生成	赵 沛 (59)

天文学系

QPO现象与吸积盘理论	赵永恒 (61)
三轴椭球星系Schwaryschied模型的可分离形式	朱 涛 (64)
最小二乘拟合推估法在建立协议地球参考系中的应用	李爱珍 (66)
行星运动的ppN效应	韩 楠 (68)
试论地球的定向参数 (EOP) 和自转参数 (EPP)	韩春好 (71)

化学系

I、酸性光亮锡基合金电镀及其镀层机理的研究	
I、电子能谱法研究BTA—Ag(I)防变色膜	王克非 (73)
固相配位化学研究	丛蓉娟 (75)
I、弱酸性光亮镀锌—镍合金的研究	
I、镀层表面氧化膜与钝化膜的研究	华 红 (78)
羧基钴族化合物的合成与结构	孙守恒 (79)
N—氧化吡啶-2-甲醛衍生物的配合物研究	陆 勤 (82)
吗啉双胍配合物的合成、性质和结构研究	汪义军 (83)
I、过渡金属离子与二乙酰基吡啶衍生物的配位反应	
I、电导法求双组份共存型配合物稳定常数	
的电子计算机程序	张鸿昌 (84)
若干大鸟配合物的研究	杨 丹 (86)
钴希夫碱配合物的合成及其氧合机制	周 洪 (88)
I、钨钼钒硅酸盐的合成、表征及稳定性研究	
I、 ¹³ CNMR研究几种有机酸与硅羟基的作用	贾向东 (89)
两银电极上的示波双电位滴定	卜海之 (90)
电分析化学中微机计算方法的应用	田丹碧 (91)
阳极溶出伏安法和单扫示波极谱法对配合物的研究	杭太俊 (92)
席夫碱型、仲胺型双—(苯并18—冠—6)的	
合成及其性质的研究	王登进 (93)
N—取代亚氨酸酯的反应及 ¹³ CNMR研究	石农原 (94)
固-液相转移催化含硫碳正离子的反应及合成应用	许从应 (96)
分子筛在有机合成中的应用	李齐芳 (97)
在聚(4—2烯基吡啶)钨(0)催化下芳基碘化物的乙烯基化反应	苟少华 (99)
I、SMS、SSEM和SXRFS软件的设计和实现	
I：2、4二(甲酰氨基)—3-烷基-1,5-二苯基-1,5-戊二酮	

的合成	洪汇孝(101)
I: 在锰(Ⅲ)或铈(Ⅳ)引发下芳烃与B—二巯基化合物的反应	
I: 在银粉作用下 α -溴化酮和酚的反应	席尚忠(102)
N, N-二甲酰氨基钠在有机合成中的应用	韩应琳(103)
在钼(Ⅱ)和铜(Ⅰ)催化下芳基重氮氟硼酸盐与烯烃的反应	谭鲁石(104)
钼催化下卤代冠醚的乙烯基化反应	廖毅(105)
12-钼磷酸(盐)催化性能的研究	吕德义(106)
氧化钨与氧化物相互作用研究	刘海洋(108)
负载型 $AlPO_4-5$ 、 $HSAPO-5$ 分子筛催化剂催化性能的研究	陈钊(109)
不同模板剂、不同硅铝比及铁浸渍改性的HZSM—5	
沸石上甲醇转化反应的研究	陈蔚(110)
V、Ag、Ni氧化物催化剂对甲苯选择氧化反应的研究	程祥(111)
固载化钼锡氧化物催化剂的研究	柏传盛(112)
载Ni丝光沸石研究	徐金光(113)
载铁氧化铝、氧化钛上氧化物与载体相互作用的研究	高兴涛(114)
Fe、Sn同异晶质取代的 $AlPO_4-5$ 和 $SAPO-5$ 分子筛的合成	
与性质的研究	章方良(116)
负载铁催化剂体系中Fe组份与载体间的相互作用	魏小林(117)
改性PET结晶行为的研究	王铁军(118)
$Me_3SiCl-AgCCO_4$ 体系列引发苯乙烯阳离子聚合动力学及机理研究	李杰(120)
多相高聚物体系的固体核磁研究	陈群(121)
苯乙烯齐聚的高效尺寸排除色谱的研究	严晓虎(123)
有机硅-b-聚醚氨脂/聚脲抗凝血性生物材料的合成研究	姚旭东(126)

信息物理系

八道心电信号的采集与多元分析	刘愷(127)
约瑟夫逊传输线中孤子传播的研究	张永明(129)
微机控制高频心电图的采样与分析	沈德才(130)
超导隧道结高频声子产生及检测的初步研究	龚铮红(131)
液态生物媒质的超声性质研究	王进(132)
生物组织超声背局散射谱研究	王新龙(133)
$SiO_2/127.86^\circ Y-XLiNbO_3$ 结构中瑞利波传播特性的研究	印建华(135)
试听室中声场的计算机模拟和分析	朱峰(137)
音频声波对水雾的凝聚效应	吴端(139)
单光源光热检测的理论和方法	杨匡华(140)
光电显微镜剖析集成电路及其与光声成象检测的比较	徐建生(142)
电声系统音质主客观关系初探	秦伶俐(144)
改进热力学法研究生物媒质非线性声学参量B/A	黄建红(146)

物理学系

相干光反馈系统及其应用于解二元偏微分方程的研究	薛 晖(148)
TGS晶体中铁电畴界运动及其产生的内耗研究	牛钟明(150)
Nb/Cu准周期金属超晶格的研究	田 强(152)
NiTi(Fe)合金中的无公度相变研究	袁 方(154)
Ni—12at.%B合金的原子探针场离子显微镜的研究	曹燕妮(156)
射频电流驱动下具有平方阻尼项的Josephson结中分岔与混沌现象的研究	肖 扬(158)
二维超导阵列的K—T相变	程 鹰(160)
包钴超细铁微粒的磁性研究	毛兴宇(162)
气相急冷Fe—Pd非平衡合金的构造与磁性	张胜良(163)
a—Si ₂ H/a—SiN _x :H超晶格	毛国民(164)
—aSi ₂ HN _x :H超晶格薄膜的光学性质的研究	冯小梅(165)
连续氩离子激光再结晶Poly—Si/SiO ₂ 界面性质研究	陈 坚(166)
氢化非晶硅SOI结构的研究	顾 清(168)
聚合物半导体的特性研究	黄振春(169)
MOCVDAl ₂ O ₃ -InP界面的研究	韩 平(170)
磁场中双层空心超导圆柱体的性质	王思慧(171)
一维准晶体晶格振动的声子态和谱及其输运性质的研究	陈 蕊(174)
IBM的连续变量表示及其与BMM的比较	郑世平(177)
分形结构的研究	施森炎(179)
微机多道分析系统研究	华建伟(181)
秩无关SU _m ×SU _n 因分系数的计算	
——大型Fortran程序微机化的一些方法	吴雄彪(183)
相互作用的S, P, d玻色子系统	沈肖雁(186)
“氯化球团料”水分密度的精确测量	罗成林(188)
锡氧化物薄膜和催化剂的内转换电子穆斯堡尔研究	唐 虹(189)
在线正电子寿命谱仪系统的建立及用于对CuO/ZnO甲	
醇合成催化剂固溶特性的研究	戴国欢(191)
本征非晶硅和微晶硅隙态密度分布的高频DLTS和	
光致瞬态谱(PITS)测量新方法的研究	王 晋(193)

同态模 $\text{Hom}(A, B)$ 的同调维数

基础数学专业84级硕士生 王芳贵

指导教师 周伯壖教授 佟文廷副教授

本学位论文由以下两篇短文组成

(1) 同态模 $\text{Hom}(A, B)$ 的同调维数。

(II) 凝聚环上模的FP-内射维数。

在第一篇中, 我们借助于双函子 $- \otimes -$ 与 $\text{Hom}(-, -)$ 之间的联系, 讨论了域 K 上一组模 (A_R, B) 的同态模 (作为 $R \otimes S$ -模) $\text{Hom}(A, B)$ 的弱维数与投射维数。主要结论为:

设 K 是域, R, S 是 K -代数, 若下列条件有 $-$ 成立:

(a) $[R : K] < \infty$, A 是有限生成右 R -模;

(b) $[R : K] < \infty$, S 是右凝聚的;

(c) $[S : K] < \infty$, R 是右 Noether 的;

则有

$$l.\text{wd}_R \otimes_S \text{Hom}(A, B) = r.\text{id}_R A + l.\text{wd}_S B.$$

在第二篇中, 通过推广 Auslander 引理, 我们研究了模范畴 $\mathcal{M}$ 中任一模 A 的FP-内射维数与内射维数之间的关系, 证明了对左凝聚环 R , 若其每一左理想是 λ - $\mathfrak{S}$ -生成的, 则有

$$l.\text{FP-id}_R A \leq l.\text{id}_R A + n + 1$$

D-近次正常算子, 近次正常算子与次正常算子

基础数学专业84级硕士生 王公宝
指导教师 马吉溥教授

本文在算子理论中首次引入D-近次正常算子与近次正常算子的概念, 研究了它们的基本性质, 并给出了判别定理。特别, 专们借助Moore—Penrose广义逆等工具, 通过近次正常性, 给出了次正常算子的一个新充要条件; 作为应用, 我们给出了两个有趣的例子, 其中一个为亚正常的非近次正常算子, 另一个是近次正常的非次正常算子; 从而, 我们更进一步地简便地解决了Idalmos的第160问题[3]。现将主要结果陈述如下:

[定义1] 设 $A, D \in \beta(H)$, $D \geq 0$, 若存在常数 $M > 0$, $\exists D \geq MA^*DA$, 则称 A 为D-近次正常算子; 简记为D-N.S.

[命题1] A 为D-N.S.算子的充要条件是存在常数 $m > 0$, 使得 $\|D^{1/2}Ax\| \leq m \|D^{1/2}x\|$ 对一切 $x \in H$ 成立,

[定理2] A 为D-N.S.算子的充要条件是 $B \triangleq D^{1/2}AD^{1/2} \in \beta(H)$ 及 $N(D) \in Lat A$.

[定义2] 设 A 是亚正常算子, 记 $Q_A \triangleq A^*A - AA^*$, 如 A 是 Q_A -N.S.算子, 则称 A 是近次正常算子; 以N.S.记之。

[命题4] (平移不变性)

设 A 是N.S.算子, 则对 $\forall \lambda \in D$, $A - \lambda I$ 也是N.S.算子。

[定理4] 若 A 是次正常算子, 则 A 是N.S.算子。

由定义2及定理4, 我们有如下包含关系: $\{\text{亚正常算子}\} \supseteq \{N.S.算子\} \supseteq \{\text{次正常算子}\}$; 下面的例1说明存在非N.S.的亚正常算子。

[例1] 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 H 中的标准正交基, A 为单侧加数移位算子: $Ae_n = a_n e_{n+1}$, ($n \geq 1$);

这里

$$a_n = \begin{cases} (1 - \frac{1}{n+1})^{1/2}; & \text{若 } n = 2k-1, \\ (1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)!})^{1/2}; & \text{若 } n = 2k, \end{cases}$$

上式中 $k = 1, 2, \dots$ 。则 A 是亚正常算子, 但 A 不是N.S.算子。

现设 A 为次正常算子, 令 $D_0 = Q_A (\geq 0)$, $B_0 = A$, $B_1 = D_0^{1/2} B_0 D_0^{1/2}$, $\dots$
 $B_n = D_{n-1}^{1/2} B_{n-1} D_{n-1}^{1/2}$, $D_n = Q_{B_n} + D_{n-1}$, 其中 $D_n \geq 0$ 。

现在我们给出本文的一个主要结果:

[定理5] A 是次正常算子的充要条件为: $D_n \geq 0$, 并且存在常数 $M > 0$, 使得: $D_n \geq M (B_n * D_n B_n + D_n^2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

作为定理 5 的应用, 我们再给出如下两个例子。

[例2] H 同例 1 所设, A 为单侧加权移位算子: $Ae_n = a_n e_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$,

其中
$$a_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则 A 是次正常算子。

[例3] H 同例 1 所设, A 为单侧加权移位算子: $Ae_n = a_n e_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$,

其中
$$a_n = \sqrt{2 - 2^{-n}}, \quad n \neq 4;$$

$$a_4 = \sqrt{2 - \frac{1}{2^{3.3}}}.$$

则 A 是 $N. S.$ 算子, 但不是次正常算子。

由定理 4, 例 1 及例 3, 我们立得:

[命题5] (关于算子类的真包含关系) $\{\text{亚正常算子}\} \supsetneq \{N. S. \text{算子}\} \supsetneq \{\text{次正常算子}\}.$

IBN环和Grothendieck群

基础数学专业84级硕士生 朱晓胜

指导教师 周伯璠教授、佟文廷副教授

本文在§2中给出了 k_0R 中所有与 Z 同构的子群所成集合的势的界, ($R \in \text{IBN}$)。在§3中得到: $R \in \text{IBN}$ 时, K_0R 模去 K_0R 中所有与 Z 同构的子群所得到的商群是零群。同时给出了非IBN子及IBN环 R 的非IBN的序型的定义, 讨论了非IBN子 I 及其序型的性质, I 的序型与 $[R/I]$ 在 $k_0(R/I)$ 中的阶数之间的关系以及非IBN子的升链与它们的序型之间的关系。并将这些性质推广到了张量积上, 得到了一些相应的结果。在§4中给出了强IBN代数的定义, 讨论了一些相关性质。得到: 如果 R 是可换酉环 K 上的代数, 且不存在 $m \neq n$, 使得 ${}_KR^m = {}_KR^n$, 则 R 的包络代数 $R \otimes_K R^{\text{op}} \in \text{IBN}$ 。

K

具变重特征双曲算子解的 C^∞ -奇性分析

基础数学专业84级硕士生 钱四新

指导教师 仇庆久教授

本文由两部分组成，第一部分是讨论一类典型的非实效变重特征双曲算子的边界 C^∞ 奇性分叉现象，建立了类似于Lax-Nirenberg的奇性反射定理，由所得结果知道，在同一组“反射族”中，当其中一部分次特征视为传播奇性的入射线时，此族中余下的次特征并不一定全部是传播奇性的反射线，也就是说，余下的次特征中可能有些不反射奇性，我们将此现象称为奇性分叉反射，奇性分叉反射在单特征及常重特征算子的Lax-Nirenberg奇性反射定理中是没有的。第二部分是关于一类实效双曲算子边界奇性分叉现象的讨论，本文主要是论述此类算子在 $0 \leq s \leq t \leq T$ 时的Cauchy问题拟基本解 $E_0(t, s)$, $E_1(t, s)$ 的构造，由此，讨论此类算子Cauchy问题解的奇性，得出它们也有类似的出现分叉反射现象的可能性。

提高椭圆—抛物偏微分方程奇异摄动问题数值解精度的Richardson外推方法

计算数学专业84级硕士生 王燕萍
指导教师 苏煜城教授、吴启光副教授

本文讨论了椭圆—抛物偏微分方程第一边值问题:

$$(2.1) \quad \begin{cases} L\varepsilon u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + (x, y)u = f(x, y), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

这里, $D = \{(x, y) | (x, y) \in (0, d) \times (0, T)\}$, a, c, f, φ 是充分光滑函数, 且满足条件

$$(2.2) \quad a(x, y) > d_0 > 0, \quad C(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D$$

问题(2.1)在边界 $\tau_1 = \{y = T, 0 \leq x \leq 1\}$ 附近产生边界层, 边界层函数为 $e^{-\sqrt{a(x,T)}(T-y)/\varepsilon}$

利用问题(2.1)解 $u(x, y)$ 的渐近展开, 可以对 $u(x, y)$ 关于 x 和 y 的各阶导数作出估计:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 u(x_i, y_h)}{\partial x^3} \right)_x^\alpha &\leq M \\ \left(\frac{\partial^3 u(x_i, y_h)}{\partial y^3} \right)_y^\beta &\leq M (H\varepsilon^{-1} e^{-d_0} \eta_{k+1}) \end{aligned}$$

其中

$$\left(f(x, y) \right)_x^\alpha = \begin{cases} A(x, y) & 0 < \alpha < 1 \\ |f(x, y)| & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$A(x, y) = \sup_{(x, y) \in \bar{n}} \frac{|f(x, y) - f(x', y)|}{|x - x'|^\alpha}$$

$\left(f(x, y) \right)_y^\beta$ 同样定义。

为了数值解问题(2.1), 我们在均匀网格 W_h^r 上构造迎风差分格式:

$$\begin{aligned}
 \Delta Z_{ik} &= \frac{Z_{i+1,h} - 2Z_{i,k} + Z_{i-1,h}}{h^2} + \varepsilon \frac{Z_{i,h+1} - 2Z_{i,k} + Z_{i,h-1}}{j^2} \\
 (3.1) \quad &- a_{i,k} \frac{Z_{i,h} - Z_{i,h-1}}{\tau} + C_{i,h} Z_{i,h} = f_{i,h} \\
 &Z_{i,h}/T_h \tau = \varphi_{i,h}
 \end{aligned}$$

(3.1) 为正型格式, 满足离散的极大值原理。

为了对差分解进行外推, 利用差分算子的展开式, 建立差分解关于步长 h, τ 的展开式。

$$Z_{ik} = u_{i,k} + \sum_{k \in V(q)} V^{(s,j)}(x_i, y_k) h^{2s} \tau^j + \eta_{i,h}(v, q) \quad (x_i, y_h) \in w_{h\tau}$$

这里, $R(r, q)$ 是下面整数向量 (s, j) 的集合:

$$K(r, q) = \left\{ (s, j) / \begin{array}{ll} 0 \leq s \leq v(v/2) & 0 \leq j \leq v(q) \\ s, j \text{ 为整数} & 1 \leq 2s + j \leq v(\max(v, q)) \end{array} \right\}$$

$V^{(s,j)}$ 是与 h, τ 无关的连续函数, $V^{(s,j)} \in H^p, p = 1 + 2 - 2s - j$

且有导致估计式

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^s V^{(s,j)}(x_i, y_h)}{\partial x^s} \right)_x &\leq M(1 + e^{-J_0 e^{-d_0 \eta_n}}) \\
 \left(\frac{\partial^s V^{(s,j)}(x_i, y_h)}{\partial y^s} \right)_y &\leq M(1 + e^{-J_0 (s+\beta)^{-\alpha_0} \eta_{h+1}})
 \end{aligned}$$

余项 $\eta_{i,h}(v, q)$ 满足差分方程

$$\begin{cases} N\eta_{i,h}(r, q) = -\sigma_{i,h}(u, v, q) - \sum_{k \in R(r, q)} h^{2s} \tau^j \sigma_{i,h}/v^{(s,j)} \gamma_{i, q_1} \\ \eta_{i,h}/T_{hr} = 0 \end{cases}$$

由差分解的展开式, 我们将一组网格序列上的差分解线性组合, 消去所有的 $h^{2s} \tau^j$ 项, 则组合后的解能以更高阶的精度逼近于原微分方程问题的解 $u(x, y)$ 。

设 $\{w(h^{(n)}, \tau^{(n)})/m, n=0, 1, \dots\}$ 为一网格序列, $Z^{(n, s)}$ 为差分方程问题 (3.1) 在 $w(h^{(n)}, \tau^{(n)})$ 上的解, 设 $Q(r, q)$ 为 (m, n) 的某一集合, $w(Q) = \bigcap_Q (h^{(n)}, \tau^{(n)})$,

(设 $w(Q) = \phi$)。将 $w(Q)$ 中各网格上的差分解线性组合。

$$Z^{r,q}(x, y) = \sum_{Q(r, q)} v^{(n, s)} Z^{(m, n)}(x, y) \quad (x, y) \in w(Q)$$

如果组合系数满足线性代数方程组

$$\begin{cases} \sum_{(m, n) \in Q} v^{(n, s)} = 1 \\ \sum_{(m, n) \in Q} v^{(n, s)} (h^{(n)})^{2s} (\tau^{(n)})^j = 0 \end{cases} \quad (s, j) \in R(r, q)$$

取 $Q(r, q)$ 使此方程组未知量个数与方程个数相同。利用离散极大值原理, 可得到外推解 $Z^{(r, q)}(x, y)$ 的误差估计:

$$|Z^{(r, q)}(x_i, y_h) - u(x_i, y_h)| \leq \begin{cases} M[h^r + \tau^q(1 + e^{-\alpha} e^{-\alpha \eta_h})] & \tau \leq \varepsilon \\ M[h^r + \tau^q + e^{-\alpha} \frac{T - y_{n+1}}{\alpha \tau + \varepsilon}] & \tau > \varepsilon \end{cases}$$

分析此估计式, 在除去边界层附近处, 外推解以高价收敛于精确解, 而在边界层附近误差为 $O(h^r + \tau^q \sqrt{\varepsilon^q})$ 。因此采用这样的非均匀网格, 在边界层附近加密网格, 可以提高误差的精度。

在区域 D 上构造非均匀网格:

$$w(h) = \{x_i | x_i = ih, i = 1 \dots N-1, Nh = d\}$$

$$w(\tau) = \{y_k | y_k = \lambda(t_k), k = 1, \dots, k-1, t_k = h\tau, \tau k = 1\}$$

$$w(h, \tau) = w(h) \cup w(\tau), T_k \tau = w_k \setminus w(h, \tau)$$

其中, 函数 $\lambda(t)$ 定义为

$$\lambda(t) = \begin{cases} \psi(t) = 1 - Qe\left(\left(\frac{1-\bar{q}}{t-\bar{q}}\right)^p - 1\right) & t \in [2, 1] \\ \psi(\alpha) + \psi'(\alpha)(t-\alpha) & t \in [0, 2] \end{cases}$$

这里, $\bar{q}, a, p$ 为参数, $a > 0, p \geq p_0(q), p_0(q) = \frac{q^2}{4} - 1, \bar{q} \in (0, 1), \alpha$ 的取值使 $\lambda(\alpha) = 0$ 。记 $\tau_{k+1} = \lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)$

在 $w(h, \tau)$ 上构造迎风差分格式

$$\begin{cases} \Delta z_{i,k} = \frac{Z_{i+1,k} - 2Z_{i,k} + Z_{i-1,k}}{h^2} + e \frac{2}{\tau_k + \tau_{k+1}} \left(\frac{Z_{i,k+1} - Z_{i,k}}{\tau_{k+1}} - \frac{Z_{i,k} - Z_{i,k-1}}{\tau_k} \right) - a_{i,k} \frac{Z_{i,k} - Z_{i,k-1}}{\tau_k} + C_{i,k} Z_{i,k} = f_{i,k} \\ Z_{j,h} / T_k \tau = \varphi_{j,k} \end{cases}$$

此格式如正型的, 满足离散的极大值原理。

将差分算子展开, 继而可推出差分分解关于 h, τ 的展开式

$$Z_{i,k} = u_{i,h} + \sum_{k(r,q)} V^{(r,q)} h^{2r} \tau^q + \eta_{i,k}(r, q)$$

其中, $V^{(r,q)}$ 有如下估计

$$\left| \frac{\partial^r V^{(r,q)}}{\partial x^r} \right| \leq M$$

$$\left| \frac{\partial^q V^{(r,q)}}{\partial y^q} \right| \leq M(1 + e^{-1} e^{-\alpha} \frac{1-y}{\varepsilon})$$

这里, r, q 为整数。余项 $\eta_{i,k}(r, q)$ 有如下估计

$$|\eta_{i,k}(r, q)| \leq M [h^r + \tau^q + \tau^q / (\varepsilon + a(1 - y_{h+1}))]$$

利用和均匀网格情形完全相同的外推公式。求得外推解 $Z''^q(x_i, y_h)$ ，并作出如下的误差估计：

$$|Z''^q(x_i, y_h) - u(x_i, y_h)| \leq M [h^r + \tau^q + \tau^q / (\varepsilon + a(1 - y_{h+1}))]$$

数值解椭圆—抛物偏微分方程奇异 摄动问题的亏量校正法

计算数学专业84级硕士生 孙小弟
指导教师 吴启光副教授、苏煜城教授

本文运用亏量校正原理对椭圆—抛物型方程进行了探讨, 试图在一些已有格式的基础上, 通过亏校正法来得到稳定的高精度方法。

我们在区域 $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ 内讨论奇异摄动问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u = \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 a, b 为常数, $\varepsilon > 0$, 对于问题 (3.1), 常见的离散化方法有两种
i. 中心差格式 (不稳定, 二阶精度)

$$L_h \varepsilon u_h = \varepsilon D_{xx} u_h + D_{yy} u_h + a D_x^\circ u_h + b D_y^\circ u_h = f_h \quad (3.2)$$

ii. 人工扩散格式 (稳定, 一阶精度), $\alpha = \varepsilon + \frac{ah}{2}$

$$L_{h,a} u_h = \alpha D_{xx} u_h + D_{yy} u_h + a D_x^\circ u_h + b D_y^\circ u_h = f_h \quad (3.3)$$

定义直接亏校正为:

$$\begin{cases} L_{h,a} u_h^\circ = f_h \\ L_{h,a} u_h' = f_h + (\alpha - \varepsilon) D_{xx} u_h^\circ \end{cases} \quad (3.12)$$

关于直接亏校正 (3.12), 我们有以下结论:

定理 2, 直接亏校正 (3.12) 应用于问题 (3.1) 时, 是二阶相容, 且关于 ε 一致稳定。

定义混合亏校正迭代为

$$\begin{cases} L_{h,a} u_{i+1/2} = f_h + (L_{h,a} - L_{h,\varepsilon}) u_i, \\ D_{h,a} u_{i+1} = f_h + (D_{h,a} - L_{h,\alpha}) u_{i+1/2} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots \end{matrix} \quad \begin{matrix} (4.2a) \\ (4.2b) \end{matrix}$$

一般地, $u_{1/2}, u_1, u_{3/2}, u_2, \dots$ 不收敛, 但存在以下二个极限

$$u_h^A = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i, \quad u_h^B = \lim_{i \rightarrow \infty} u_{i+1/2}$$

为简单起见, 我们只讨论 u_h^A 的性质, 它满足

$$M_{h,\varepsilon} u_h^A = f_h \quad (4.4)$$

其中

$$M_{h,\varepsilon} = L_{h,\varepsilon} + L_{h,a} D_{h,a}^{-1} (L_{h,a} - L_{h,\varepsilon})$$

$$D_{h,a} = -8\alpha/h^2$$

关于混合亏校正 (4.2), 我们可得

定理 8, 取 $L_{h,\varepsilon}$ 为中心差格式 (3.2), $L_{h,a}$ 为人工扩散格式 (3.3), 则由 (4.4) 定义的算子 $M_{h,\varepsilon}$ 对于微分算子 L_ε 是二阶相容, 且关于 ε 一致稳定。

下面我们试图在 $\varepsilon \leq ch$ 情形下给出直接亏校正的具体的误差估计, 从中可以看到直接亏校正的缺点, 由此提出局部亏校正。这些结论对变系数的椭圆-抛物方程同样成立。

记迎风格式为 L_h^a , 中心差格式为 L_h^ε , 直接亏校正同 (3.12) 为

$$\begin{cases} L_h^a u_h^0 = f_h \\ L_h^a u_h' = f_h + (L_h^a - L_h^\varepsilon) u_h^0 \end{cases} \quad (5.29)$$

关于直接亏校正 (5.29), 有以下结论

定理 6, 设 u_h' 为直接亏校正 (5.29) 的解, u 为方程 (3.1) 的解, 则

$$|(u_h')_{i,j} - u(x_i, y_j)| \leq C \left\{ \max(\varepsilon, h) \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + ah} \right)^{i-1} + h^2 + \frac{\varepsilon^{Q+1}}{h} \right\}$$

其中 C 不依赖于 ε, h , Q 为任一正整数。

定义局部亏校正为

$$\begin{cases} L_h^a u_h^0 = f_h & (x, y) \in \Omega_1^h = \{(x_i, y_j), i=1, 0 \leq j \leq N\} \\ L_h^a u_h' = \begin{cases} f_h \\ f_h + (L_h^a - L_h^\varepsilon) u_h^0 \end{cases} & (x, y) \in \Omega_2^h = \Omega^h - \Omega_1^h \end{cases} \quad (5.32)$$

定理 7, 设 u_h' 为局部亏校正 (5.32) 的解, u 为方程 (3.1) 的解, 则在 $\varepsilon \leq c_1 h, h \leq h_0$ 情形下, 有以下估计

$$|(u_h')_{i,j} - u(x_i, y_j)| \leq C \{ \psi(x_i) + h^2 + \varepsilon^{Q+1}/h \}$$

其中 C_1, h_0 仅依赖于 a, c 与 ε, h 无关, Q 为任一正整数, 而

$$\psi(x_i) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ \left(1 + \frac{a}{2c_1}\right) h \left(h + \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} e^{-\frac{ah}{\varepsilon}}\right) & i=1 \\ h \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + ah}\right)^{i-1} & i \geq 2 \end{cases}$$