第三十五分集

幾　　何

編著者：嚴文郁

平面幾何學

目　次

第一章　幾何學的基礎

第二章　基本事項及證明的根據和手續

平面幾何學

第一章

幾何學的基礎

1. 體，面，線，點：

人所佔的空間叫“體”；體的界叫“面”；面的界叫“線”；線的界叫“點”。

2. 直線曲線：

自起端以迄終端皆取同向的線，叫“直線”。

其方向逐處變換的，叫“曲線”。

由數直線接成的線叫折線。折線或曲線兩端相接的叫閉線。

3. 平面，曲面。

平面如靜止的水面等，各部同狀，且自一側視之，與自他側無異的。

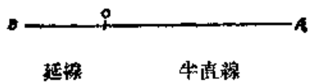
曲面如沸水氣泡的表面等，無論何部，自其一側視

之，與自他側不同者也。

4. 直線，射線，線分：

凡直線的起端終端，都在無限遠的地方的，都僅稱“直線”，若僅終端在無限遠的地方的，就叫“射線”；起端終端都不在無限遠的地方的，就叫“線分”。

5. 延線：



圖的 OB，自半直線 OA 引申而得，為半直線 OA 的延線。

上圖的 BC 是 AB 引申而得，為直線段 AB 的延線。

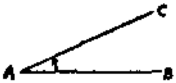
6. 凸角，凹角：

角者，如布面的四隅等，自始於同點之二射線而成者。

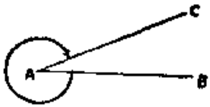
在一平面內，固定一半直線的始端，自一位置旋至他位置，常成一凸角，或一凹角。

7. 平角，傾角：

1.平 角



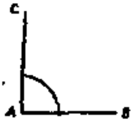
2.傾角(凸角)



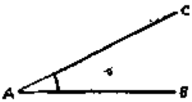
3.傾角(凹角)

圖的 ∠BAC 其二邊相接成一直線，叫做"平角"。圖的凸角 ∠BAC 小於平角，圖之凹角∠BAC大於平角，都叫"傾角"。

8. 直角，斜角：



1.直 角



2.斜角(銳角)

3.斜角(鈍角)

圖的 ∠BAC 為一平角的一半，叫"直角"，圖的∠BAC 小於直角，圖的 ∠BAC 大於角直而小於平角，對直角說，都叫"斜角"。

9. 三角形：

任二邊皆不相等，或任二角皆不相等的叫"不等邊三角形"或"不等角三角形"。

二邊相等，或二角相等的叫"二等邊三角形"或"二等角三角形"。

三邊三角皆相等的叫"等邊三角形"或"等角三角形"。

有一直角的叫"直角三角形"，

有一鈍角的叫"鈍角三角形"

有兩銳角的，叫"銳角三角形"

10. 直交線斜交線。

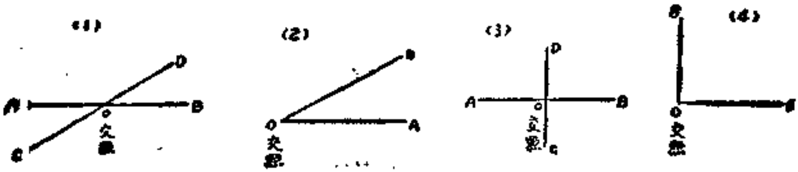
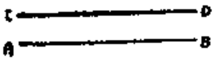


圖1的 AB，CD 相交於 O，成斜角 BOD 等爲"斜交線" 圖2的 OA，OB 相交於 O，成斜角 AOB 亦叫"斜交線"。

圖3的 AB，CD 相交於 O，成直角 BOD 等，爲"直交線"。圖4的 OA，OB 相交於 O，成直角 AOB，亦叫"直交線"。

11. 平行線：



上圖的 AB，CD 不交，且無論若何引申長去，終不相交，即 AB，CD 同向或反向，互稱做"平行線"。

12. 四邊形：

1. 四邊兩兩平行，不皆相等，各角都爲斜角的叫‘長斜方”。

2. 四邊兩兩平行，且都相等，各角皆斜角的叫“正斜方”。

3. 四邊兩兩平行不皆相等各角皆爲直角的叫“長方”。

4. 四邊兩兩平行，且都相等，各角都爲直角的叫“正方形”。

上面四種，都可稱“平行四邊形”。

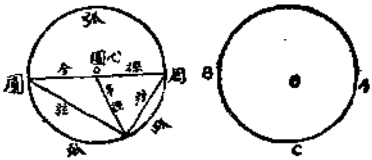
5. 相對二邊平行，餘二邊不平行而相等的叫“等腰梯形”

6 相對二邊平行，餘二對邊不平行，且不相等的叫“不等腰三角形”。

7. 相鄰二邊相等，餘二邊也相等的叫“箏形”。

8. 不合上面所講條件的形叫“無法四邊形”。

13. 圓：



曲界面是以一閉曲線爲界或界含曲線的平面。上圖示

邊界之任何點與界內某一點之聯線皆相等的叫"圓"上圖O爲圓心，曲線 ABC 爲圓周；OA，OB，OC，皆爲半徑，AB 爲全徑。AB，BC，CA都是弦，周之AB，BC，CA 各部是弧。

注意　記一角一三角和平行四邊形等等的記號是：

‖平行於，⊥垂直於，～差，∽相似，＝等於，≡全等，∠一角，∠s諸角，

∠R直角　⌒圓弧　△一三角形　△s諸三角形

▱一平行四邊形　▱s諸平行四邊形

▭一矩形　▭s諸矩形

□一正方形　□s諸正方形

⊙一圓　ⓢ諸圓

∵因　∴故

第　二　章

基本事項及證明的根據和手續

14. 定理與問題：

幾何學中的一種可以證明的道理叫做"定理"。

幾何學中作一種圖形，適合于一定條件的叫"問題"。

根據已有定理的證明，或無須證明，而推想出來的道理叫做系或叫做推論。

15. 定義與公理：

幾何學中的一種圖形或一種名詞，用簡單詞句來說明的叫"定義"。

幾何學的基礎建立在少數的很明白的事理上的，此種事理，叫做"公理"，公理有普通公理及幾何公理二種。

16. 普通公理：

一種普通的說明，不待證明，已屬正確的，叫做"普通公理"。

1. 等量加等量其和必等。
2. 等量減等量其差必等。
3. 等量乘等量其積必等。
4. 等量除等量其商必等。

   除數不可以爲零。

5. 等量同指數或同正根數的量必相等。

   代數學中，如 4 的平方根爲 $+2$，-2，但正數和負數不能相等，故幾何學中祇用正根。

6. 不等量加正等量，其和不等，原大者和亦大；不等量減正等量，其差不等，原大者差亦大；不等量被

正等量乘，其積不等，原大者積亦大；不等量被正等量除，其商不等，原大者商亦大。

設$a>b$，x和y為正等量，則$a+x>b+y$；

$a-x>b-y$，$ax>by$；$a/x>b/y$。

7. 不等量加同次序的不等量，其和不等，所加大者其和亦大；等量減去不等量，其差不等，所減大者其差小。

設$a>b$，$c>d$和$x=y$，則$a+c>b+d$和$x-a<y-b$

8. 等于同量或等量的諸量必互等。

9. 方程式和不等式中的量，可代以相等的量。

10. 三量之第一量大于第二量，第二量大于第三量，則第一量必大于第三量。

11. 總量等于諸部分之和而大于其一部分。

17. 幾何公理：

1. 兩點之間僅有一直線可作。

2. 直線可任意延長。

3. 直線是兩點間最短之徑。

4. 用一點為心，一直線為半徑，可以作圓。

5. 圖可任意遷移，牠的大小和形狀，不因之變。

6. 凡平角必相等。

7. 經過一點僅能作一線和其牠一線平行。

8. 平面上有兩條線同平行于第三條線時，這兩條線互相平行。

9. 兩形重叠，倘是處處相合時，這兩形完全相等。

註：其餘的幾何公理，以後于需要時，隨時舉出。

18. 幾何公理的系：從以上幾何公理中得系數條；

1. 兩點可以決定一直線。

這是幾何公理1的簡說。

2. 兩直線僅能相交於一點。

依幾何公理1，倘是兩直線能相交于兩點，這兩個線必相合

19. 角：

(一)定理1. 凡直角必相等。

(二)定理2. 從直線上一定點作垂直線，僅有一條。

(三)定理3. 等角的餘角及補角和共軛角必相等。(倘是兩角的和為一直角，這兩角就互為餘角。倘使兩角的和為一平角，這兩個角就互為補角。平面上繞一點所得完全角的地位，叫做周面。倘使兩角的和為一周角這兩角互為共軛角)。

(四)系　不相等的兩角中，大角的餘角，補角和共軛角反

小。

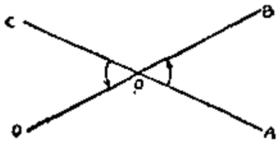
(五)接補角的性質 接補角的性質不待證明 ，有下列兩條。

(六)定理 4. 兩個接角的外邊爲一直線時，這兩個角的和必等於一平角。

(七)定理 5. 兩個接補角的外邊爲直線時 ，這兩個角的和，必等於一平角。

(八)定理 6. 在一平面內，一點四週之角的和，等於兩平角。

(九)定理 7. 兩直線相交所成的對頂角相等。



〔假設〕 AC 和 BD 兩直線相交於 O點

〔求證〕 $\angle AOB = \angle COD$

〔證明〕 $\angle AOB + \angle BOC = 1st\angle$ (平角)

(兩個接角爲一直線時，這兩個角的和必等於1平角)

(公理 4)

〔同理〕 $\angle BOC + \angle COD = 1st\angle$

$$\therefore \quad \angle AOB+\angle BOC=\angle BOC+\angle COD$$

（凡平角必相等）

$$\angle AOB=\angle COD$$

等量減等量其差必等

20. 定理的證明：

由定理 (7) 可知一個定理內必包括 (1) 假設 (2) 求證 (3) 證明三個部份，這是證明幾何學中一切定理時常用的，讀者深宜注意。

21. 三角形。

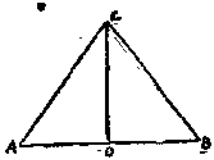
平面上由三條直線圍成的叫三角形。

(一)定理 8. 全等形的相當部分必相等。

(二)定理 9. 兩個三角形有兩邊及其所夾的角，對應相等，這兩個三角形必全等。

(三)定理10. 兩個三角形有兩個角及其所夾的邊，對應各相等，這兩個三角形必全等。

(四)定理11. 等腰三角形中，對等邊的角必相等。



〔假設〕 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，$AC=BC$

〔求證〕 $\angle A=\angle B$

〔證明〕 倘作 CD線平分$\angle ACB$

則 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CBD$ 中

$AC=BC$ （假設）

$CD=CD$ （同量）

和 $\angle ACD=\angle DCB$

（因CD平分$\angle ACB$）

$\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle DCB$

$\therefore$ $\angle A=\angle B$

（全等形相當部份必相等）

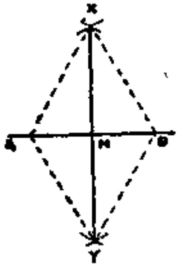
(五)系 等邊三角形的角必相等。

(六)定理12. 兩個三角形的邊，一一相等時，這兩個三角形必全等。

(七)定理13. 將三角形一邊延長，所成外角，必大於其任一內對角。（三角形的一邊和其鄰邊延長線所成的角叫"外角"）。

22. 簡易問題作圖及證法：

(一)問題1. 求平分一直線。



〔假設〕 AB 線。

〔求作〕 平分 AB 線。

〔作法〕 用 A點和 B點爲圓心，用 AB 的長爲半徑作弧相於交 x，y 點，作xy。

則xy平分 AB 。

〔證明〕 聯 Ax，Bx，Ay，By諸線。

則成$\triangle Axy$，$\triangle Bxy$

今知$Ax=Bx$，$Ay=By$，　　（作法）

$xy=xy$　　（相同）

則 $\triangle Axy \equiv \triangle Bxy$

$\therefore$ $\angle Axy=\angle Bxy$ （全等圖的相當部份相等）

$Ax=Bx$

$\angle xAB=\angle xBA$　　（定理//）

∴　$\triangle AxM \cong \triangle BxM$

∴　$AM = BM$（全等圖的相當部份相等）

23. 平行線：

(一)關於平行線的幾何的公理：

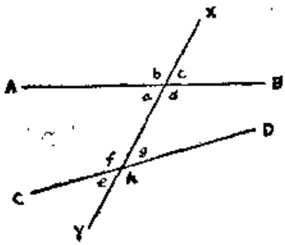
1. 經過一點僅能作一條線和其他一條線平行。

2. 平面上有兩條線同平行于第三條線時，這兩條線互相平行。

(二)截線：

一條直線截數條直線的叫截線。

(三)由截所成的八角：



i 內角　$\angle a$，$\angle d$，$\angle g$，及$\angle f$

ii 外角　$\angle b$，$\angle c$，$\angle e$，及$\angle h$

iii 錯角

1. 內錯角　$\angle a$對於$\angle g$；$\angle d$對於$\angle f$