微　积　分

一九七三年十二月

前　言

微积分是以现实世界中变量之间的函数关系作为研究对象的一门数学。它来源于劳动人民的实践，由于生产的推动而产生和发展。微积分是物理学及其它技术科学的基本数学工具之一，在工程实践中有广泛的应用。

但是，长期以来，在旧微积分教材中，深深地渗透着资产阶级的种种反动思想。它们用唯心论的先验论，抹煞微积分的实践基础；它们用形而上学的思想，掩盖微积分本来的辩证法；它们宣揚资产阶级的"天才论"，引导人们脱离无产阶级政治；它们宣揚"理论至上"的思想，引导人们脱离三大革命的实践。微积分旧教材是被资产阶级的立場、观点、方法所歪曲了的东西。所謂"千錘百炼、天衣无縫"的旧体系，不过是毒害青年、排斥工农，为资产阶级文化专制服务的工具。一句话，旧微积分教材是为资产阶级和修正主义教育路线服务的。

为了实现无产阶级在上层建筑领域的全面专政，为了造成宏大的工人阶级知识分子的新部队，实现无产阶级教育革命，微积分旧教材必须彻底改革。我们的战斗任务是：彻底批判统治着旧教材的资产阶级反动思想体系，用马列主义毛澤东思想的立場、观点、方法，去其糟粕，取其精华，使微积分成为工农兵認识世界和改造世界的工具，为无产阶级教育路线服务。

在微积分教材改革过程中，存在着两条路线、两种世界观的尖銳斗争。在工人阶级领导下，通过接受工人阶级再教育，我们对旧教材做了初步的批判，并在教育革命实践中初步编写了新教材。几年来，在广大工农兵群众的热情支持下，在教育革命实践中进一步吸取了宝贵的意见，努力使之不断完善。但是，有些资产阶级世界观严重的人，他们将对资产阶级的批判说成是"极左思潮的产物"，说什么"新教材寿命不长，要对它来个反动"，什么"破了旧体系，成了个破体系"等等。现实的路线斗争教育了我们，是坚持唯物论的反映论，还是搞唯心论的先验论；是坚持唯物辩证法，还是搞形而上学；是坚持理论与实际的统一，还是使二者分离；是坚持为工农兵服务，还是为少数精神贵族服务；这些都是关系到教材改革的大问题。毛主席教导我们："**思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。**"对于来自资产阶级的压力，必须坚决抵制彻底批判。现实的情况说明，对旧教材的改革绝不是过了头，而仅仅是开始。我们認识到，必须进一步深入批判资产阶级反动思想体系，才能完成"**教材要彻底改革**"的任务。

这本教材是在 70 年编的《微积分》的基础上，经过两届学员的试用，改编而成的。修改时，征求了部分学员和教员意见，同时也吸收了工农兵读者来信中的意见。由于我们世界观的改造刚刚是开始，深入实践很差，所以，这次修改本，还有许多旧体系的影响。我们决心，要进一步深入实践，向工农兵学习，进一步开展大批判，总结实践经验，促进微积分教材的改革。

这本书的内容是一元函数的微积分。在实践的基础上，本书力图突出无穷小局部分析的方法，以微分和积分这对矛盾的产生、发展和相互转化为基本线索组织教材。第一章介紹微积分的研究对象——函数，以及无穷小分析的基本方法——极限；第二章介紹对函数的局部变化进行无穷小分析的基本工具——导数；第三章，从求未知函数关系问题，提出微分和其逆运算——不定积分——的基本方法；第四章，以运动的观点分析区间量的数学结构，揭示微分与定积分的內在联系，使定积分与不定积分统一起来。在各章中有一定数量的应用例题，特别是第三、四章，编排了微分和积分綜合应用的例题，以有助于培养分析问题和解决问题的能力。

本书由清华大学与北京鋼鉄学院数学教研组协作改编。

目　录

什么是微积分

先直观地了解一下微积分是怎么回事，学习起来心里可以有个"譜"。

例如，物体沿斜坡滑下（图 1），要计算它走过的路程 c，可以用初等几何的方法求，由勾股定理，有

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如果斜坡是条曲线（图 2），要计算它走过的路程，就要算这段曲线的弧长 s，用初等数学的方法就算不了啦。困难在哪呢？问题是直的会算，曲的不会算。要解决这个困难，就要分析曲与直的关系。

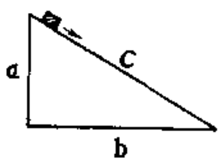


图 1

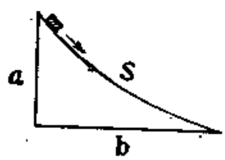


图 2

图 3

实践出眞知。看看鉗工师付用平銼銼圆形工件时（图 3），每銼一下都是直的，那怎么能銼成曲的呢？师付一边銼一边转动銼的方向，不断打去尖角，繼續做下去，连續不断地转动銼的方向，就銼成圆形工件了。这就是说，整体上是曲的工件，在相对于整体来说微小的局部上，可以"以直代曲"。

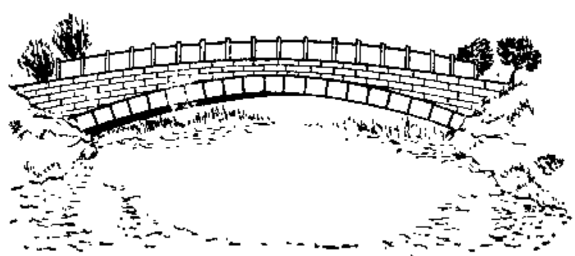


图 4

再看看建筑工人用条石砌桥洞（图 4）。每块条石是直的，总体看却是曲的，这是在微小的局部，"以直代曲"。

工人师付的实践，生动地说明了曲与直互相转化的辩证关系。总体上曲的东西，在微小的局部，曲和直是可以达到统一的。正如毛主席教导的那样：**"矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。"**

用这种辩证的方法，就可以解决求曲线弧长的问题。如图 5，将整个弧段分小，对于每一微小弧段可以"以直代曲"。把每一微小弧段看作直的，直的会算，就可以算出

各微小弧段的弧长，这叫做微分过程，这样“以直代曲”算出的各个微小弧段的长，就叫弧长的微分。

是不是不论分多少段，把这些弧长的微分累加起来，就可以得到整个弧段的长度呢？还不是。因为曲与直的统一，只在各小段不断变小的进程中才能实现。只分有限段，把微分相加，只能得到近似值，要算出精确值，就要无限的分小，才能由近似转化为精确。因此要有从有限转到无限的算法，这个算法叫取极限，这是微积分中的新算法。由分有限段累加求出近似值，再用取极限的方法，算出精确值，这是积分过程。这样将微分无限积累就叫积分。

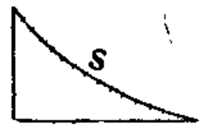


图　5

概括起来，可以用四句话：

化整为零无限分，以直代曲得微分；

积零为整微分和，无限积累是积分。

微积分的基本思想就是：在无限小局部，“曲”与“直”互相转化。正如恩格斯所说：**“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”**

上面以求曲线弧长为例，说了说微积分是什么意思。计算曲边形面积，曲面体体积等，都可以用这种方法解决。又如，研究物体运动，有两类基本问题：

(1) 已知经过时间 t，走了路程 s，求速度 $v=?$

(2) 已知运动速度 v，求经过时间 t 走过的路程 $s=?$

这是一对相反的问题。对于等速运动，这一对问题都好解决，物理中学过

$$速度=\frac{路程}{时间}, \qquad 路程=速度\times时间。$$

不过实际的运动一般不是等速的：如火车刹车过程中，速度越来越慢；物体下落，速度越来越快。控制各种机械，就要研究变速运动问题。对于变速运动，只用上述公式，就解决不了问题。困难在于速度是“变”的。要解决问题就要創造条件，促成速度“变”与“不变”相互转化。以后将看到，速度变与不变的问题，和上面说的曲直问题，从数量关系方面看，分析问题和解决问题的方法基本是一样的。其他物理变化都有同样的问题。因此，在现代生产实践和科学研究中，广泛使用着微积分的方法。

微积分就是由于实践中需要研究各种变化过程而产生的一种数学方法。一切客观事物由于内部矛盾性，总是处在不断变化的过程中。数学中反映现实的变化过程，是用有关的变量之间的函数关系，例如运动问题，路程 s 和速度 v 就都是时间 t 的函数；曲线弧长是曲线上点的坐标的函数。微积分就是以变量之间的函数关系为研究对象的。

如前所述，从运算来看，为了解决由近似转化为精确，从有限認识无限，微积分中用一种区别于初等数学的新方法，就是极限方法。

微积分的中心问题是：对于各种现实的变化过程，研究微分与积分这一对矛盾的产生、发展和相互转化。正象计算弧长，关鍵在于算出弧长的微分，解决一般的微积分问题，关鍵就在于分析微小变化的规律。

第一章 函数和极限

这一章的目的是：

介紹研究对象——函数，这里对初等数学中已经学过的函数概念进行复习和补充；

提供运算工具——极限，这是本章的重点。

第一节 函 数

函数概念复习

初等数学中学过，函数概念的一般定义如下：

定义 在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果 x 变化时，y 按一定的关系同时变化；从数值上看，对于 x 在它的变化范围内的每一个数值，y 按一定的规律取得确定的对应值，这时，称 y 是 x 的函数。x 叫做自变量，y 叫做因变量。

例如：

物体作等速直线运动，速度是 v，那么，物体的位移 s 是时间 t 的函数，用公式表示为

$$s=vt.$$

物体作自由落体运动，路程 s 是时间 t 的函数，用公式表示为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

一般地，物体沿 os 作直线运动（图 1—1），用坐标 s 表示物体的位置，用 t 表示相应的时间，对 t 的每一个值，s 都有确定的对应值，s 是 t 的函数。

图 1—1

可以看出，函数关系是变量之间的数値对应关系，它从数量方面表现变化过程中的每一个状态。

实际中，通常用三种方法表示函数关系：

① 表格表示法。例如三角函数表，对数函数表等。表格表示法的优点是：有现成数据，查函数值方便；缺点是：不直观，数据也不完全。

② 图形表示法。例如某发电厂的自动记录仪表，记录了某一昼夜的负荷曲线，如图 1—2，这个图形中的曲线，表示了负荷 P 和时间 t 之间的函数关系。从图上可以得出一昼夜间任何时刻负荷的大小。如 10 点鐘时的负荷是 1900 仟瓦；从图形上也可以看出负荷增减变化情况。图形表示法的优点是直观，函数变化情况一目了然；缺点

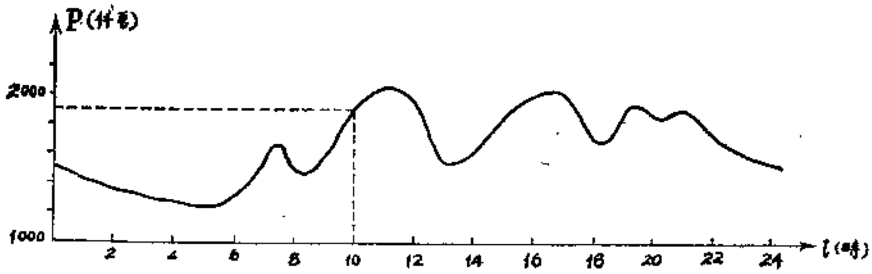


图 1—2

是，不便于作理论推导，且不够精确。

③ 公式表示法。例如，自由落体运动，路程 s 与时间 t 的函数关系就是用公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示的。公式表示法的优点是：适宜于理论推导和计算；缺点是：不直观。

三种表示法，以不同的方式表示因变量和自变量的对应规律，实际运用中它们是互相补充的。例如，在自由落体运动的研究中，除了要用公式表示法 $s=\frac{1}{2}gt^2$，常常还要辅之以图形表示法，如图 1—3。在图中可看出 t 越大，曲线越陡，说明 s 增长的越快，这从公式表示中就不容易看出来。

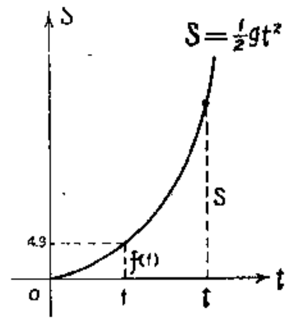


图 1—3

要强调指出的是，不要認为函数就是公式，公式只是表示函数关系的一种方式。许多实际的函数关系，常常并不能用一个簡单的公式表示 。 如上面讲的负荷 P 与时间 t 的函数关系，就是一例。

为了讨论方便，一般将"y 是 x 的函数"这句话，用符号记作：

$$y=f(x)$$

这里，"f"表示 x 和 y 的对应规律。

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的值记为 $f(x_0)$.

例如，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$，可以记为 $s=f(t)$，这里

$$f(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

"f"表示这样的对应规律，自变量 t 平方后乘以$\frac{1}{2}g$ 得 s.

$$t \longrightarrow \overset{f}{\boxed{t^2 \longrightarrow \frac{1}{2}gt^2}} \longrightarrow s$$

在 $t=1$ 时的值，记作 $f(1)$，

$$f(1)=\frac{1}{2}g\cdot 1^2=\frac{1}{2}g=4.9.$$

在表示 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的曲线上（图 1—3），横坐标 t 为 1 的点，其縱坐标 s 就是$f(1)$.

又如，图 1—2 表示了负荷 P 与时间 t 之间的函数关系，为了与上面例子的函数关系相区别，可以记作：

$$P=F(t),$$

从图上可得，当 $t=10$（小时），$P=1900$（仟瓦），可以记为 $F(10)=1900$.

总之，当函数 $y=f(x)$ 用公式表示时，$f(x_0)$ 是将式子 $f(x)$ 中的 x 換成 x_0 而得到；当函数 $y=f(x)$ 用图形表示时，$f(x_0)$ 就是曲线上横坐标为 x_0 的点的縱坐标。

例 设 $y=\varphi(x)=\sqrt{4-x^2}$，求 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi(a)$，$\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$，$\varphi(1+a)$.

解 这里“φ”表示了这样的对应规律：

自变量 x 平方、添负号、再加 4、再开方，得 y. 即：

$$x \longrightarrow \underbrace{\boxed{x^2} \longrightarrow \boxed{-x^2} \longrightarrow \boxed{4-x^2} \longrightarrow \boxed{\sqrt{4-x^2}}}_{\varphi} \longrightarrow y$$

因此，有

$$\varphi(0)=\sqrt{4-0^2}=2,$$
$$\varphi(1)=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3},$$
$$\varphi(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

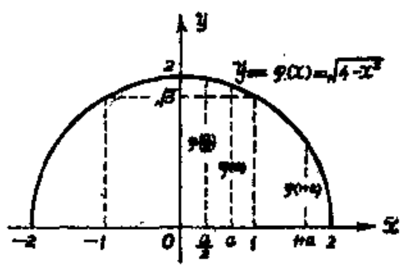


图 1—4

同样，有

$$\varphi(a)=\sqrt{4-a^2},$$

$$\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{4-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16-a^2},$$

$$\varphi(1+a)=\sqrt{4-(1+a)^2}=\sqrt{3-2a-a^2}.$$

问： $\varphi(-1)=-\varphi(1)$，对嗎？$\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\varphi(a)$，对嗎？$\varphi(1+a)=\varphi(1)+\varphi(a)$，对嗎？上面出现的各个记号应该怎样正确地理解，請对照图 1—4 想一想。

两个变量之间有函数关系，就是指它們的数值之間有确定的对应关系，已如上

述。按照这样的理解，如果在某个变化过程中，对于变量 x 取得的每一个值，y 的对应值都是常数 C，那么，y 也是 x 的函数，用公式表示就是：

$$y=C,$$

用图形表示，就是一条平行于 x 轴的直线，如图 1—5。在这种意义下，常数也是函数，这个看法以后常要用到。

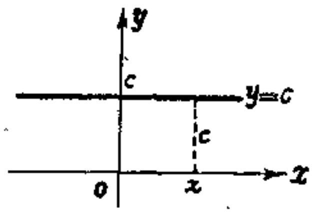
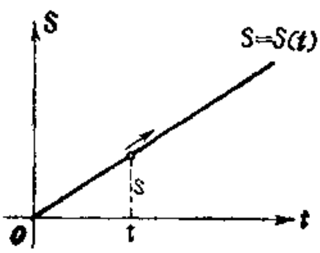


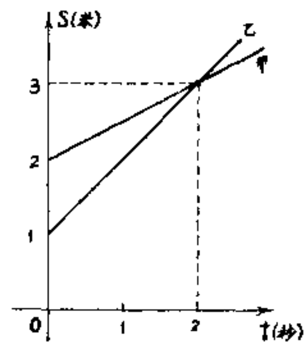
图　1—5

练　　习

1. 物体作直线运动，运动规律 $s=s(t)$ 如图所示，能说物体就是沿图上的直线运动嗎？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 设甲乙两个物体沿同一条直线运动，运动规律如图所示。

① 试分别求出甲、乙二物体的初始位置，说明开始时，谁前谁后？

② 说明，哪个物体运动得快一些？ 2 秒以后，谁前谁后？

③ 用公式分别表示两个物体的运动规律。

3. 在下列公式中，y（或 u）是不是 x（或 t）的函数？

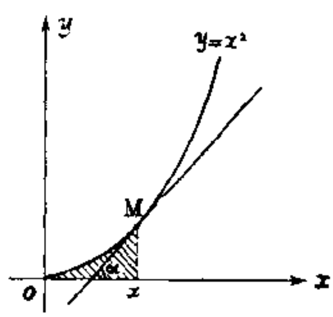
① $y=\dfrac{1}{x^2}$　　② $u=\sqrt[3]{1-t^2}$

③ $2x+3y+1=0$　　④ $x^2+y^2+1=0$

4. 如图，M 是曲线 $y=x^2$ 上的动点，问：

① $\overset{\frown}{OM}$ 的弧长 s 是不是 x 的函数？

② M 点的切线的倾角 α 是不是 x 的函数？



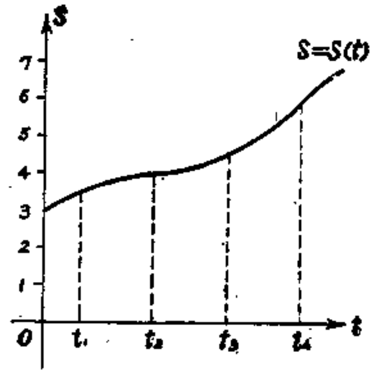
（第 4 题）

③ 图中阴影部分的面积 A 是不是 x 的函数？

5. 一物体作直线运动，其运动规律 $s=s(t)$ 如图所示。

① 分别求出 $t=0$，t_1，t_2，t_3，t_4 时，物体的位置 $s(0)$，$s(t_1)$，$s(t_2)$，$s(t_3)$，$s(t_4)$，

② 求从 0 到 t_2 这段时间内，物体运动的路程；求从 t_2 到 t_4 这段时间内，物体运动的路程；并分别说明在图上如何表示他们。



（第 5 题）

6. 设 $y=f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f(3)$，$f(3+h)$.

7. 设 $y=\varphi(x)=x^2-x+1$，求 $\varphi(2)$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$，$\varphi(a)$，$\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$，$\frac{1}{\varphi(a)}$.

8. 设 $u=F(t)=\frac{2t+1}{t-1}$，求 $F(0)$，$F(t_0)$，$F(-t_0)$，$F(1-t_0)$.

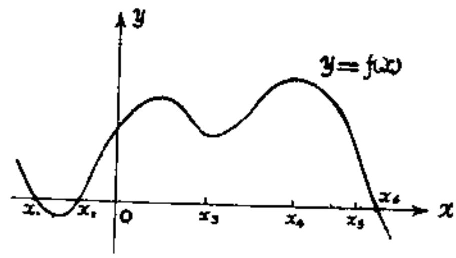
9. 设 $y=f(x)$ 的图形如右，

① 在图中标出：

$f(0)$，$f(x_3)$，$f(x_4)$，$f(x_5)$，

② $f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_6)$ 各等于多少？

③ x 取哪些值时，y 取正值？x 取哪些值时，y 取负值？



（第 9 题）

函数的定义域

关于函数，除了要注意因变量与自变量的对应规律以外，还要注意自变量取值的范围。

自变量取值的范围，叫做函数的**定义域**。自变量只有在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，函数才有意义。

例 1 堆放鋼管，按最上层一根，以下每一层多一根的方法堆放（图 1—6）。这时，鋼管的总根数（记为 T）是堆放层数（记为 n）的函数，即

$$T=f(n)=1+2+3+\cdots+n.$$

图 1—6

T 可以这样算：

由　　　　$T=1+2+\cdots+(n-1)+n$,

及　　　　$T=n+(n-1)+\cdots+2+1$, （将 $1+2+\cdots+n$ 倒过来写）

把上面二式相加，左边等于 $2T$；右边各项都是 $(n+1)$ 得

$$2T=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ 项}}$$

$$=n\cdot(n+1).$$

$$\therefore\qquad T=\frac{n(n+1)}{2}.$$

T 作为 n 的函数，定义域是什么呢？这要看堆鋼管时最多能堆放多少层；如果最多堆放 20 层，那么，自变量 n 就只能取 1，2，3，……，20 这二十个正整数值，n 取其他任何值，函数都沒有意义。就是说，函数 $T=f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ 的定义域是由 1 到 20 的整数组成的，记作 $M=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 20\}$。函数的定义域都是由一些数组成的。一些数的全体叫做一个数集合，簡称集合。例 1 中，定义域是由 1 到 20 的正整数组成的集合。

例 1 中，自变量只能取正整数值，这是定义域的一种常见情形。还有一种常见的情形，自变量可以取某两个数之间的全部实数值。

√**例 2**　将直径 $d=4$ 的圆木（图 1—7）截成方木，用 x、y 分别表示方木断面两边之长。因为，x 变化时，y 按一定关系同时变化，y 是 x 的函数。由勾股定理，有

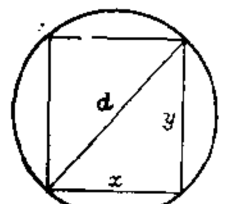


图　1—7

$$x^2+y^2=4^2,$$

$$\therefore\qquad y=\sqrt{4^2-x^2}.$$ 改成 $0<x<4$

上式表示了 y 和 x 之间的函数关系。按照实际意义，x 应为正数，且 x 必定小于直径 $d=4$，所以自变量 x 取 0 与 4 之间的任何实数值，但 x 不取 0 及 4。y 作为 x 的函数，它的定义域是 0 与 4 之间全体实数组成的集合。

两个数之间的全体实数组成的集合，叫做区间。

区间常用下列三种方法表示：

√① 几何表示法。

初等数学中讲过，任何一个实数都可以用数轴上的一个点表示，那么，区间就可以用数軸上的一个线段来表示。如例 2 中，0 与 4 之间的所有实数组成的区间，用图 1—8 中的线段表示。

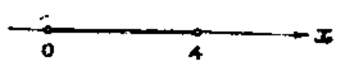


图　1—8

一般说，如果 x 取 a、b 之间的所有实数值（设 $a<b$），包括两个端点 a 和 b 时，这样的区间叫閉区间，如图 1—9(a)；不包

括端点 a 和 b 的区间就叫做开区间。如图 1—9(b)。例 2 中函数的定义域就是开区间。

图 1—9

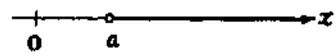


图 1—10

② 括号表示法。

闭区间用 $[a, b]$，开区间用 (a, b)。例 2 中的定义域可以表示为 $(0, 4)$。

③ 不等式表示法。

闭区间用 $a \leqslant x \leqslant b$，开区间用 $a < x < b$. 如例 2 中定义域也可表示为 $0 < x < 4$.

如果变量 x 取大于 a 的全体实数值，这时，x 取值的集合可以在数轴上按图 1—10 的方法表示，叫无穷区间。这种区间也可以用 $(a, +\infty)$ 或 $a < x < +\infty$ 表示，“$+\infty$”读作正无穷大。

如果变量 x 取值的集合是全部实数，即可用整个数轴表示，这也是一种无穷区间，可以记作 $(-\infty, +\infty)$ 或 $-\infty < x < +\infty$，“$-\infty$”读作负无穷大。

例 1、2 中，函数的定义域都是由实际意义确定的。数学中为了更好的解决各种实际问题，需要研究抽象的函数关系，这时，函数的定义域就由函数公式本身来确定。例如，例 2 中的函数 $y=\sqrt{4^2-x^2}$，从能否算出函数值的角度看，它的定义域是 $-4 \leqslant x \leqslant 4$. 因为对于满足这个条件的 x 值，$4^2-x^2 \geqslant 0$，都可由公式算出 y 的对应值，即函数 $y=\sqrt{4^2-x^2}$ 的定义域是 $[-4, 4]$.

例 3 求下列函数的定义域。

① $y=\dfrac{1}{x}$　　　　② $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

解 ① 对于 $y=\dfrac{1}{x}$，x 取不等于 0 的任何实数值，都可以由公式算出 y 的对应值；$x=0$ 时，y 没有对应值。因此，定义域是除去 0 以外的全体实数的集合，如图 1—11(a)，可以表示为 $x \neq 0$. 即 $\left(-\infty < x < 0 \text{ 和 } 0 < x < +\infty\right)$

② 对于 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，要能算出 y 值，必须有

$$1-x^2>0, \quad (\text{为什么？})$$ $\sqrt{-1}$ 无意义

也就是 $\quad x^2<1,$

或 $\quad |x|<1,$

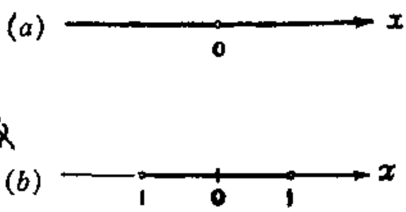


图 1—11

即 $$-1<x<1.$$ ($x\neq -1$ 或 1)

对于在 $(-1,\ 1)$ 上的任何 x 值，都可由公式算出 y 值。对于其它的 x 值，函数没有意义，所以，定义域是 $(-1,\ 1)$ 如图 1—11(b)。

以后讨论中，常常说："函数 $y=f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上有定义"。这句话的意思是：x 取 $(a,\ b)$ 上的任何值时，y 都有确定的对应值。为了说明某函数在 $x=x_0$ 附近有定义，常常给"$x=x_0$ 的附近"一个名称，叫 x_0 的邻域，x_0 的邻域就是指的以 x_0 为中心的某个区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ （δ 是个正数），如图 1—12。这样，说"函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义"，就是说，在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 上函数 $y=f(x)$ 有定义。

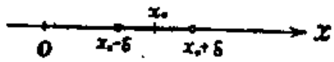


图 1—12

容易看出 x_0 的邻域，也可用不等式 $|x-x_0|<\delta$ 来表示。

*下面介紹一些常用的集合符号。

集合常用一个大写字母表示，例如，用

N 表示全体正整数的集合；　I 表示全体整数的集合；

R 表示全体有理数的集合；　Z 表示全体实数的集合。

数 a 属于集合 A，记作

$$a\in A.$$

例如，
$$100\in N,\ -25\in I,\ \frac{7}{8}\in R;$$
$$1.5\in(-2,\ 2),\ 10\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20\}.$$

数 b 不属于集合 A，就记作

$$b\,\overline{\in}\,A.$$

例如，
$$\frac{3}{5}\,\overline{\in}\,N,\ -3\,\overline{\in}\,(-2,\ 2),\ 1.5\,\overline{\in}\,\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20\}$$

集合 A 中的数都属于集合 B 时，说"A 包含于 B"或"B 包含 A"，记作

$$A\subset B.$$

例如，
$$N\subset I,\ I\subset R,\ R\subset Z,\ (0,\ 4)\subset[-4,\ 4].$$

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即集合 A 与 B 中的数完全相同，叫"集合 A 与 B 相等"，记作

$$A=B.$$

例如：$x^2-1=0$ 的解的集合，与 1 的平方根的集合就是相等的，都是由 -1，1 两个数组成的集合 $\{-1,\ 1\}$。

---

* 有"*"号的内容，可以略去，用到再看。

以上的集合符号，在近代的某些科学书籍中开始使用起来，因此，这里作一个简单的介紹。

练　　习

1. 求下列函数的定义域

① $y=\frac{1}{x^2}$　　② $y=\frac{1}{1-x}$

③ $y=\frac{1}{1-x^2}$　　④ $y=\sqrt{x}$

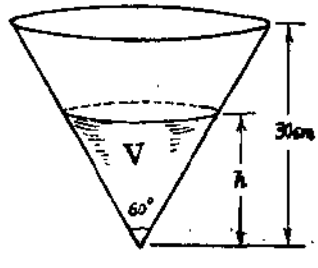
⑤ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$　　⑥ $y=\sqrt{x-1}$

⑦ $y=\sqrt{1-2x^2}$　　⑧ $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$

⑨ $y=\ln x$　　⑩ $y=\ln(1-x)$

2. 有一物体自高为 5 米处自由落下，它下落的路程 s 是时间 t 的函数，$s=\frac{1}{2}gt^2$. 试根据实际意义确定函数的定义域；如果从抽象的式子来看，定义域是什么？

3. 一个圆錐形容器，頂角为 60°，高 30 厘米。如果容器內装了 V 立方厘米的水，那么，液面高度 $h=$? 即求出表示函数 $h=h(V)$ 的公式。试从实际意义确定 $h=h(V)$ 的定义域，并与从抽象式子确定的定义域比较一下。



（第 3 題）

4. 求下列函数的定义域

① $y=\frac{1}{1-x}+\sqrt{x}$

② $y=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

列函数式举例

列函数式就是用公式表示变量间的函数关系。怎样从实际问题列函数式？这是一个重要的问题。下面举一些根据物理规律和几何关系列函数式的例。

例 1　弹簧受力变形时，有一个恢复力。根据物理实验，弹簧恢复力的大小与变形

的大小成正比，方向是使弹簧复原的方向。为了使这个规律更明白，我们用公式来表示恢复力与变形之间的函数关系。

由于力是有方向的量，变形也有压缩和拉伸的区别，因此，首先要规定好坐标轴。取拉伸方向为 ox 轴，弹簧在未变形时自由端的位置为原点 o。这样在拉伸时，变形 x 是正的；压缩时，变形 x 是负的。恢复力 F 则相反，拉伸时是负的，压缩时是正的（见图 1—13）。

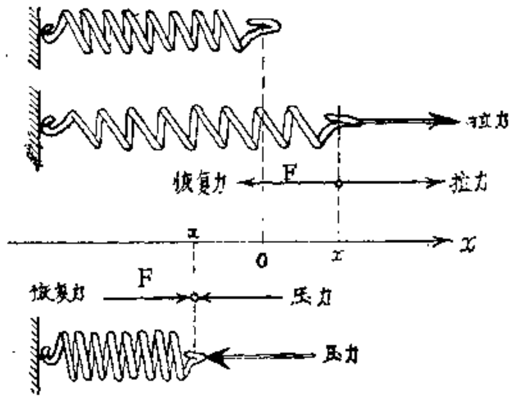


图　1—13

根据物理规律，有

$$|F| \propto |x|.$$

设比例系数为 $k(>0)$，则有

$$|F| = k|x|,$$

由规定的坐标，F 与 x 的符号永远是相反的，故有

$$F = -kx. \qquad (1)$$

这个公式表示了任何弹簧恢复力 F 与变形 x 之间的函数关系。对于不同的弹簧，k 不一样。k 的物理意义是单位变形产生的恢复力的大小。

为了确定某个弹簧的 k，可以做实验，如当弹簧伸长 2 毫米时，测出恢复力的大小是 4 公斤，即当 $x=2$（毫米）时，$F=-4$（公斤），代入 (1)，得

$$-4 = -k\cdot 2,$$

所以

$$k = 2 \text{（公斤/毫米）}.$$

那么，对于这个弹簧，有

$$F = -2x.$$

要注意的是，只有在弹簧的弹性限度内，关系式 (1) 才成立。

如某弹簧，$F=-2x$，弹性限度允许最大的变形为 20（毫米），即 $-20\leqslant x\leqslant 20$，那么，$F=-2x$ 的定义域就是 $[-20, 20]$。

例 1 说明，列函数式时，常常要首先规定好坐标；规定得恰当，可以使列出的函数式简单。大家也可以试用其它方式规定例 1 中的坐标，看一看，怎样规定恰当些？

√**例 2**　用铁皮做一批容积为 V_0 的水桶，为了计算铁皮的用量，就要算桶的表面积 S。

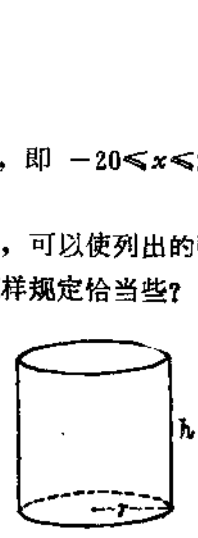


图　1—14

初步看，S 与桶高 h 和桶半径 r 都有关系，即

$$S = \pi r^2 + h\cdot 2\pi r. \qquad (1)$$

r 取得不同，S 不同；h 取得不同，S 也不同。

实际上，为了做成容积为 V_0 的桶，h 和 r 是不能